Смолин И.Ю., Зимина В.А. О влиянии учета температурных зависимостей свойств материалов на расчет термических напряжений в композитах // Транспортное, горное и строительное машиностроение: наука и производство. – 2026. – № 40. – С. 31-35.

УДК 539.3 https://doi.org/10.26160/2658-3305-2026-40-31-35

О ВЛИЯНИИ УЧЕТА ТЕМПЕРАТУРНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛОВ НА РАСЧЕТ ТЕРМИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЙ В КОМПОЗИТАХ

Смолин И.Ю., Зимина В.А.

Институт физики прочности и материаловедения им. В.Е. Панина Сибирского отделения Российской академии наук, Томск

Ключевые слова: слоистые композиты, керамика, температурная зависимость, остаточные напряжения, остывание после спекания, касательный и секущий коэффициент теплового расширения.

Аннотация. Оценка температурных напряжений в керамических слоистых композитах представляет научный и практический интерес. Значительные изменения температур при изготовлении таких материалов требуют учета температурных зависимостей характеристик компонентов композита для более точной оценки возникающих напряжений. В работе предложено аналитико-численное решение задачи для слоистого диска. Предполагается, что процесс остывания происходит медленно и температура успевает равномерно распределиться. Для центральной части диска задача сводится к одномерной с изменением напряжений и деформаций только по толщине диска. Решение для такой задачи, когда свойства материала не зависят от температуры, было получено ранее в нескольких работах. Если же принять, что модули упругости и коэффициент линейного теплового расширения зависят от температуры, то полученные формулы можно рассматривать как решение на малом интервале температур dT. Интегрированием этого выражения по заданному диапазону температур получены искомые значения температурных напряжений. В явном виде конечное решение не записано, т.к. оно определяется через вложенные интегралы нескольких функций. Поэтому для анализа полученного решения использовано численное интегрирование. На примере образца, состоящего из пяти слоев керамики ZrB_2–SiC с разными добавками ZrO_2, показано, что учет температурных зависимостей характеристик составляющих композита приводит к отличию напряжений до 1,4 раз по сравнению с постоянными характеристиками при температуре 1900ºС и до 5,4 раз – при температуре 20ºС. Получено совпадение аналитических решений с результатами прямого численного моделирования в программном комплексе ABAQUS. Отмечается важность корректного учета температурных зависимостей коэффициента теплового расширения в этих двух подходах. В ABAQUS используются средний (секущий) коэффициент линейного теплового расширения, а в аналитическом решении – текущий (касательный) коэффициент линейного теплового расширения.

ON THE EFFECT OF ACCOUNTING FOR TEMPERATURE-DEPENDENT MATERIAL PROPERTIES ON THE EVALUATION OF THERMAL STRESS IN COMPOSITES

Smolin I.Yu., Zimina V.A.

Panin Institute of Strength Physics and Materials Science of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Tomsk

Keywords: laminated composites, ceramics, temperature dependence, residual stresses, cooling after sintering, tangent and secant coefficient of thermal expansion.

Abstract. The estimation of thermal stresses in ceramic laminated composites is of scientific and practical interest. Significant temperature changes during the manufacturing of such materials require consideration of the temperature dependencies of the characteristics of the composite components in order to more accurately assess the resulting stresses. The paper proposes an analytical-numerical solution to the problem for a laminated disk. It is assumed that the cooling process occurs slowly and the temperature has time to distribute evenly. For the central part of the disk, the problem reduces to a one-dimensional case, with stresses and strains varying only across the disk's thickness. The solution to this problem, for the case where material properties are independent of temperature, was previously obtained in several papers. Assuming that the elastic moduli and the coefficient of linear thermal expansion are functions of temperature, the derived equations can be treated as a solution within a small temperature range dT. The required values of thermal stresses are obtained by integrating this expression over the specified temperature range. The final solution is not written in explicit form, as it is defined through nested integrals of several functions. Therefore, numerical integration was used to analyze the resulting solution. Using a sample consisting of five layers of ZrB_2–SiC ceramics with different ZrO_2 additives, it is shown that taking into account the temperature dependence of the characteristics of the composite's components results in a stress difference of up to 1.4 times compared to constant characteristics at a temperature of 1900ºC and up to 5.4 times at a temperature of 20ºC. The analytical solutions are found to be in good agreement with the

results of direct numerical simulation in the ABAQUS software package. The importance of correctly accounting for the temperature dependencies of the coefficient of thermal expansion in these two approaches is noted. ABAQUS uses total or mean (secant) coefficient of linear thermal expansion, while the analytical solution uses instantaneous (tangent) coefficient of linear thermal expansion.

Введение

В качестве перспективных материалов для различных технических изделий, в том числе и для высокотемпературных приложений, интерес представляют керамические слоистые композиты, сочетающие различные преимущества разных оксидных керамик [1, 2]. Остаточные напряжения, формируемые в таких композиционных материалах при изготовлении, оказывают значительное влияние на их механические и функциональные свойства. Поэтому теоретическая оценка температурных напряжений в таких материалах представляет научный и практический интерес [3-5].

При расчетах остаточных напряжений в металлических изделиях обычно пренебрегают температурной зависимостью термомеханических параметров материалов. Такое предположение можно считать приемлемым для упругих модулей, особенно, если диапазон изменения температур невелик, т.к. упругие характеристики материалов при этом изменяются незначительно. Однако при изготовлении керамических композиционных материалов, когда происходит остывание от высоких температур спекания, подобная гипотеза не может быть принята. Особого внимания требует анализ коэффициентов теплового расширения, изменения которых могут быть существенными даже для относительно небольшого диапазона температур.

Кроме подробного решения таких задач методами численного моделирования с применением компьютерных средств конечно-элементного анализа, важным инструментом инженерного расчета возникающих остаточных напряжений является аналитическая оценка для задач в упрощенной постановке. Аналитические решения позволяют не только быстро получить необходимую информацию, но и могут служить основой для верификации численных решений.

Целью работы является получение аналитического решения задачи о расчете остаточных термических напряжений в слоистом композиционном диске с учетом температурных зависимостей характеристик компонентов композита и определение влияния этого учета на получаемые зависимости.

Постановка задачи и ее аналитическое решение в упрощенной постановке

Рассматривается задача об остаточных термических напряжениях, возникающих при остывании от температуры спекания до комнатной температуры композитного диска, состоящего из нескольких слоев разного состава.

Используем цилиндрическую систему координат. Ось x направим вдоль радиуса диска, ось y – вдоль толщины диска, угловую координату обозначим θ.

Для нахождения остаточных напряжений в центральной части диска, предлагается аналитическое решение поставленной задачи в упрощенной постановке. Предполагается, что все слои диска являются однородными, а процесс остывания происходит медленно и температура успевает равномерно распределиться по всему диску. Для центральной части диска задача является одномерной, поскольку параметры напряженно-деформированного состояния являются функциями только координаты y. В силу осевой симметрии, в центре диска имеет место двухосное напряженное состояние $\sigma_{xx} = \sigma_{\theta\theta} = \sigma$, а сдвиговые напряжения σ_{xy} и напряжения вдоль толщины диска (оси симметрии) σ_{yy} равны нулю.

При независящих от температуры характеристиках материалов, решение задачи для диска было получено ранее в работах [6, 7], а в случае подобной задачи для пластины – в работах [8-10]. Решение для напряжений имеет следующий вид:

$$\sigma(y) = E'(y)\big(Ay + B - \alpha(y)\big)(T_r - T_0)\,. \qquad (1)$$

Здесь $E'(y) = E(y)/(1-\nu(y))$ – двухосный модуль упругости, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, T_r – конечная (комнатная) температура, T_0 – начальная температура (температура спекания),

$$A = \frac{bc-ad}{b^2-ag},\ B = \frac{bd-cg}{b^2-ag},\ a = \int_0^H E'(y)dy,\ b = \int_0^H E'(y)ydy, \tag{2}$$

$$c = \int_0^H E'(y)\alpha(y)dy,\ d = \int_0^H E'(y)\alpha(y)ydy,\ g = \int_0^H E'(y)y^2dy, \tag{3}$$

где $\alpha(y)$ – коэффициент линейного теплового расширения (КЛТР) соответствующего слоя, H – толщина диска. При этом для деформаций справедливы формулы:

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon = (Ay+B)(T_r - T_0), \tag{4}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{(1+\nu(y))\alpha - 2\nu(y)(Ay+B)}{(1-\nu(y))}(T_r - T_0). \tag{5}$$

Решение в случае зависимости механических характеристик от температуры

Примем теперь, что модули упругости и КЛТР слоев композита зависят от температуры. Тогда формулу (1) можно рассматривать как решение на некотором небольшом интервале температур dT. Перепишем соотношение (1) для такого случая и пропишем явно, какие переменные являются функциями температуры, получим:

$$d\sigma(y) = E'(y,T)\big(A(T)y + B(T) - \alpha(y,T)\big)dT. \tag{6}$$

Значения температурных напряжений на конечном интервале температур от T_1 до T_2 получим интегрированием выражения (6) по указанному диапазону температур:

$$\sigma(y) = \int_{T_1}^{T_2} E'(y,T)\big(A(T)y + B(T) - \alpha(y,T)\big)dT. \tag{7}$$

Формулы для расчета деформаций будут иметь вид:

$$\varepsilon_{xx}(y) = \varepsilon_{\theta\theta}(y,T) = \varepsilon(y,T) = \int_{T_1}^{T_2}\big(A(T)y + B(T)\big)dT, \tag{8}$$

$$\varepsilon_{yy}(y) = \int_{T_1}^{T_2}\frac{\big(1+\nu(y,T)\big)\alpha(y,T) - 2\nu(y,T)\big(A(T)y + B(T)\big)}{\big(1-\nu(y,T)\big)}dT. \tag{9}$$

В явном виде функции $A(T)$ и $B(T)$ прописать достаточно затруднительно, т.к. они определяются через интегралы нескольких функций. Поэтому в общем случае для получения решений приходится использовать численное интегрирование, например, с применением классического метода Рунге-Кутты четвертого порядка.

Поскольку, согласно принятому предположению, свойства материала являются постоянными по толщине слоев диска и меняются скачком на интерфейсах между слоями, то полученные решения представляют собой кусочно-линейные зависимости от координаты y. Поэтому для получения полного решения и построения графиков достаточно выполнить численное интегрирование и определить решения на интерфейсах и внешних границах диска.

Анализ полученных результатов

Для оценки того, как влияет учет температурных зависимостей свойств материала на значения остаточных напряжений в композите, были проведены расчеты на примере керамического композиционного диска, состоящего из пяти слоев керамики ZrB_2–SiC с разными добавками ZrO_2 [5-7].

Физико-механические свойства составляющих композита и температурные зависимости упругих модулей и КЛТР использовались те же, что и в статьях [6, 7]. Кроме расчета по формуле (7), также были проведены расчеты по формуле (1), в которой значения модуля Юнга, коэффициента Пуассона и КЛТР были приняты постоянными и равными соответствующим значениям при температуре спекания 1900ºС и комнатной температуре 20ºС (рис. 1).

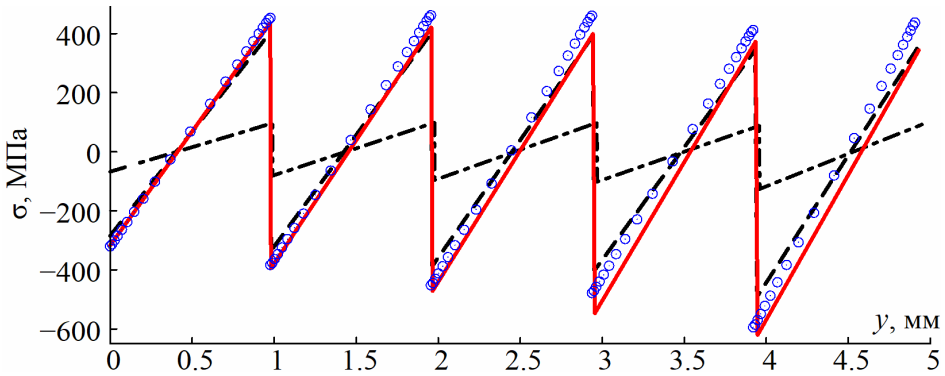


Рис. 1. Распределения остаточных напряжений по толщине диска, рассчитанных по формулам (7) (сплошная линия) и (1) для T = 1900ºC (штриховая линия) и T = 20ºC (штрихпунктирная линия) и в программе ABAQUS (кружки)

Сравнение полученных результатов показало, что решение с температурно-зависимыми свойствами получатся ближе к тем, что дает решение с постоянными свойствами при начальной температуре спекания. В середине слоев все решения практически совпадают, а на интерфейсах и внешних слоях диска различия являются наибольшими. Максимальные отличия напряжений по сравнению с постоянными характеристиками при температуре 1900ºC составляют 1,4 раз, тогда как по сравнению с постоянными характеристиками при температуре 20ºC доходят до 5,4 раз. Ранее в статьях [6, 7] вывод о том, что для приближенных оценок с независящими от температуры свойствами целесообразнее брать термомеханические характеристики при температуре спекания, а не комнатной или средней температуре, был основан только на численных конечно-элементных расчетах с применением программного комплекса ABAQUS. Сравнение результатов этих расчетов с аналитическим решением позволило обратить внимание на то температурная зависимость какого КЛТР принимается в расчет. В ABAQUS используется КЛТР, определяющий полное температурное расширение от отсчетной температуры (средний или секущий КЛТР). В аналитической формуле (7) используется текущее приращение температурного расширения при приращении температуры (текущий или касательный КЛТР). Зависимость между этими разными КЛТР определяется формулами:

$$\alpha_i^{total}(T) = \frac{\varepsilon_i^{th}}{T_i - T_{ref}},\ \varepsilon_i^{th} = \varepsilon_{i-1}^{th} + \alpha_i (T_i - T_{i-1}) \qquad (10)$$

где ε_i^{th} – деформация теплового расширения, i – текущий шаг расчета, T_{ref} – отсчетная температура, α_i^{total} – средний (секущий) КЛТР, α_i – текущий (касательный) КЛТР.

Только после пересчета температурной зависимости среднего КЛТР на текущий КЛТР удалось получить согласие между аналитическим решением и численным решением ABAQUS (рис. 1).

Заключение

Предложено аналитико-численное решение задачи об определении температурных напряжений в слоистом диске с использованием температурных зависимостей свойств компонентов композита. Аналитическое решение содержит интегралы, которые приходится определять с применением численного интегрирования.

Для образца, состоящего из пяти слоев керамики ZrB_2–SiC с разными добавками ZrO_2, показано, что учет температурных зависимостей характеристик составляющих композита приводит к отличию напряжений до 1,4 раз по сравнению с постоянными характеристиками при температуре 1900ºC и до 5,4 раз – при температуре 20ºC. Полученные аналитические решения совпадают с результатами прямого численного моделирования в программном комплексе ABAQUS. Следует отметить важность корректного учета температурных зависимостей КЛТР в этих двух подходах. В ABAQUS используются средние (секущие) КЛТР, а в полученном аналитическом решении используются текущие (касательные) КЛТР.

Заметим также, что точность исходных данных в значительной мере определяет точность полученного решения. В данном случае это относится к модулям упругости и КЛТР, а также их температурным зависимостям.

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания ИФПМ СО РАН, тема номер FWRW-2026-0007.

Список литературы

1. Buyakova S., Fotin I., Mirovoy Y., Burlachenko A., Shmakov V., Abdulmenova E., Buyakov A. Fracture toughness control of gradient layered ZrC–Al2O3 ceramic composites // Materials characterization. 2025, vol. 221, p. 114785. doi.org/10.1016/j.matchar.2025.114785.
2. Ren X., Wang P., Chen Y., Xie W., Ji X., Shang Z., Ji C., Zhao J., Liu H., Lv G., Feng P. Advances in ultra-high-temperature ceramic coatings with enhanced oxidation resistance for carbon-based composites // Extreme materials. 2025, vol. 1, no 3, pp. 9-43. doi.org/10.1016/j.exm.2025.07.003.
3. Bao Y., Kuang F., Sun Y., Li Y., Wan D., Shen Z., Ma D., He L. A simple way to make pre-stressed ceramics with high strength // Journal of materiomics. 2019, vol. 5, pp. 657-662. doi.org/10.1016/j.jmat.2019.06.001.
4. Krishnarao R.V., Bhanuprasad V.V., Madhusudhan Reddy G. ZrB2–SiC based composites for thermal protection by reaction sintering of ZrO2+B4C+Si // Journal of advanced ceramics. 2017, vol. 6, no. 4, pp. 320-329. doi.org/10.1007/s40145-017-0244-2.
5. Бурлаченко А.Г., Мировой Ю.А., Дедова Е.С., Буякова С.П. Механическое поведение слоистого керамического композита ZrB_2-ZrO_2-SiC // Известия вузов. Физика. – 2019. – Т. 62, №8(740). – С. 121-127. – doi.org/10.17223/00213411/62/8/121.
6. Зимина В.А., Смолин И.Ю. Анализ остаточных напряжений в многослойной высокотемпературной керамике // Известия вузов. Физика. – 2022. – Т. 65, №3. – С. 146-153. – doi.org/10.17223/00213411/65/3/146.

7-10. См. *References*.

References

1. Buyakova S., Fotin I., Mirovoy Y., Burlachenko A., Shmakov V., Abdulmenova E., Buyakov A. Fracture toughness control of gradient layered ZrC–Al2O3 ceramic composites // Materials characterization. 2025, vol. 221, p. 114785. doi.org/10.1016/j.matchar.2025.114785.
2. Ren X., Wang P., Chen Y., Xie W., Ji X., Shang Z., Ji C., Zhao J., Liu H., Lv G., Feng P. Advances in ultra-high-temperature ceramic coatings with enhanced oxidation resistance for carbon-based composites // Extreme materials. 2025, vol. 1, no 3, pp. 9-43. doi.org/10.1016/j.exm.2025.07.003.
3. Bao Y., Kuang F., Sun Y., Li Y., Wan D., Shen Z., Ma D., He L. A simple way to make pre-stressed ceramics with high strength // Journal of materiomics. 2019, vol. 5, pp. 657-662. doi.org/10.1016/j.jmat.2019.06.001.
4. Krishnarao R.V., Bhanuprasad V.V., Madhusudhan Reddy G. ZrB2–SiC based composites for thermal protection by reaction sintering of ZrO2+B4C+Si // Journal of advanced ceramics. 2017, vol. 6, no. 4, pp. 320-329. doi.org/10.1007/s40145-017-0244-2.
5. Burlachenko A.G., Mirovoy Y.A., Dedova E.S., Buyakova S.P. Mechanical response of ZrB2–SiC–ZrO2 composite laminate // Russian physics journal. 2019, vol. 62, no. 8, pp. 1438-1444. doi.org/10.1007/s11182-019-01861-2.
6. Zimina V.A., Smolin I.Yu. Residual stress analysis in high temperature multilayer ceramics // Russian physics journal. 2022, vol. 65, no. 3, pp. 551-559. doi.org/10.1007/s11182-022-02667-5.
7. Smolin I.Yu., Zimina V.A., Buyakova S.P. Estimation of residual thermal stresses in a layered ceramic composite // Mechanics of composite materials. 2023, vol. 58, no 6, pp. 823-834. doi.org/10.1007/s11029-023-10071-4.
8. Oel H.J., Fréchette V.D. Stress distribution in multiphase systems: I, Composites with planar interfaces // Journal of American ceramics society. 1967, vol. 50, no. 10, pp. 542-549. doi.org/10.1111/j.1151-2916.1967.tb14992.x.
9. Demidov V.N., Knyazeva A.G. Stressed-strain state of multi layer foil under one-axis tension // Applied mechanics and materials. 2015, vol. 756, pp. 540-545. doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMM.756.540.
10. Orlovskaya N., Lugovy M., Slyunyayev V., Kuebler J. Control of thermal residual stresses // Encyclopedia of thermal stresses, eds R.B. Hetnarski. – Dordrecht: Springer, 2014. – P. 727–733. – doi.org/10.1007/978-94-007-2739-7_302.

Сведения об авторах:	*Information about authors:*
Смолин Игорь Юрьевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией нелинейной механики метаматериалов и многоуровневых систем	**Smolin Igor Yurievich** – doctor of physico-mathematical sciences, professor, head of the laboratory of the nonlinear mechanics of metamaterials and multilevel systems
Зимина Валентина Алексеевна – кандидат физико-математических наук, младший научный сотрудник лаборатории нелинейной механики метаматериалов и многоуровневых систем	**Zimina Valentina Alekseevna** – candidate of physico-mathematical sciences, junior researcher of the laboratory of the nonlinear mechanics of metamaterials and multilevel systems
smolin@ispms.ru	

Получена 22.09.2026