Бохонский А.И., Майстришин М.М., Мозолевская Т.В. Снижение энергоемкости управляемого движения объекта в полярной системе координат // Транспортное, горное и строительное машиностроение: наука и производство. – 2026. – № 40. – С. 25-30.

УДК 519.3:05.011.56:621.865.8 https://doi.org/10.26160/2658-3305-2026-40-25-30

СНИЖЕНИЕ ЭНЕРГОЕМКОСТИ УПРАВЛЯЕМОГО ДВИЖЕНИЯ ОБЪЕКТА В ПОЛЯРНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

***Бохонский А.И.*[1], *Майстришин М.М.*[1], *Мозолевская Т.В.*[2]**
[1]*Севастопольский государственный университет, Севастополь;*
[2]*Черноморское высшее военно-морское училище им. П.С. Нахимова, Севастополь*

Ключевые слова: полярная система координат, уравнения движения, оптимальное управление, классическое управление, реверсионно конструируемое управление, энергоемкость движения, снижение энергетического принуждения.

Аннотация. Исследовано сравнение энергоемкости управляемого движения объекта в полярной системе координат при использовании классического управления (задача Ж.Л. Лагранжа) и реверсионно конструируемого. На численном примере показано, что с помощью конструируемого управления реализуется оптимальное движение материальной точки в горизонтальной плоскости из исходного в конечное состояние покоя, при котором не только достигается цель движения (заданы время и величина перемещения объекта), но и приводит к экономии энергии. Конструируемое управление задавалось в виде полинома. Исследована зависимость энергоемкости затраченной на движение материальной точки массой 1 кг от степени формируемого полинома управления. В случае использования реверсионно конструируемого управления (степень полинома управления $n = 3$) энергоемкость по сравнению с классическим управлением (степень полинома управления $n = 1$) снижается на 27% в сравнении с классическим. Реверсионно конструируемое и классическое управление являются частными случаями управлений, которые следуют из найденных ранее универсальных аналитических зависимостей, полученных на основании обобщения задач с использованием алгоритма решения полной обратной задачи вариационного исчисления. Предложенные управления могут быть использованы в роботах-манипуляторах, в том числе работающих в цилиндрической и сферической системах координат.

REDUCTION OF ENERGY INTENSITY OF CONTROLLED OBJECT MOTION IN A POLAR COORDINATE SYSTEM

***Bokhonsky A.I.*[1], *Maistrishin M.M.*[1], *Mozolevskaya T.V.*[2]**
[1]*Sevastopol State University, Sevastopol;*
[2]*Nakhimov Black Sea Higher Naval School, Sevastopol*

Keywords: polar coordinate system, equations of motion, optimal control, classical control, control designed via time-reversal, motion energy intensity, reduction of energy-related control effort.

Abstract. A comparison was made regarding the energy expenditure associated with the controlled motion of an object in a polar coordinate system, contrasting classical control (the J.L. Lagrange problem) with a control law designed via a reversion-based approach. A numerical example demonstrates that this designed control enables the optimal motion of a material point in a horizontal plane-transitioning from an initial state of rest to a final state of rest-thereby achieving the motion objectives (specified duration and displacement) while simultaneously reducing energy consumption. The designed control law was formulated as a polynomial. The dependence of the energy expenditure required to move a material point of mass 1 kg on the degree of the polynomial of the generated control law was investigated. When using a reversibly constructed control law (control polynomial degree $n = 3$), energy expenditure is reduced by 27% compared to classical control (control polynomial degree $n = 1$). Reversion-based control and classical control are specific cases of control laws derived from previously established universal analytical relationships; these relationships were obtained by generalizing problems using an algorithm for solving the complete inverse problem of the calculus of variations. The proposed control laws can be applied to the control of robotic manipulators, including those operating in cylindrical and spherical coordinate systems.

Введение

Оптимальному управлению движением посвящены работы [1-7] и другие. Вариационным методом Ж.Л. Лагранжем решена задача оптимального управления движением с использованием квадратичного критерия оптимальности.

Фундаментальный принцип наименьшего принуждения сформулирован К.Ф. Гауссом (1829 г.). В статье [8] А.П. Маркеевым показаны варианты применения принципа наименьшего принуждения.

Можно предположить, что в оптимальном движении с разгоном и торможением не исключается наименьшее энергетическое принуждение для достижения поставленной цели движения [9-11].

В работах [12-14] показано использование алгоритма решения полной обратной задачи вариационного исчисления при конструировании управлений типа «разгон-торможение» с реализацией принципа наименьшего энергетического принуждения при достижении цели движения (из исходного состояния покоя в конечное состояние покоя). ПНЭП отдаленно перекликается с классическими принципами аналитической механики.

Цель статьи – моделирование оптимального управления движением объекта в полярной системе координат со снижением энергетического принуждения для достижения цели движения.

Принцип наименьшего энергетического принуждения (ПНЭП) в случае разгона-торможения формулируется следующим образом: существует такое управление (переносное ускорение) типа «разгон-торможение», для которого (при заданном времени и перемещении объекта из исходного в конечное состояние) движение осуществимо с минимальной энергоемкостью. Управление задавалось в виде полинома [11, 12].

Пример 1

Материальная точка массы $m = 1$ кг движется в идеальной горизонтальной плоскости (без трения) под действием двух взаимно перпендикулярных сил, причем одна из них все время направлена по полярному радиусу. Необходимо за заданное время T переместить материальную точку в положение: на расстояние $r(T) = L$, на угол $\varphi(T) = \pi/4$.

На рисунке 1 изображена точка в произвольный момент времени, указаны составляющие ускорения.

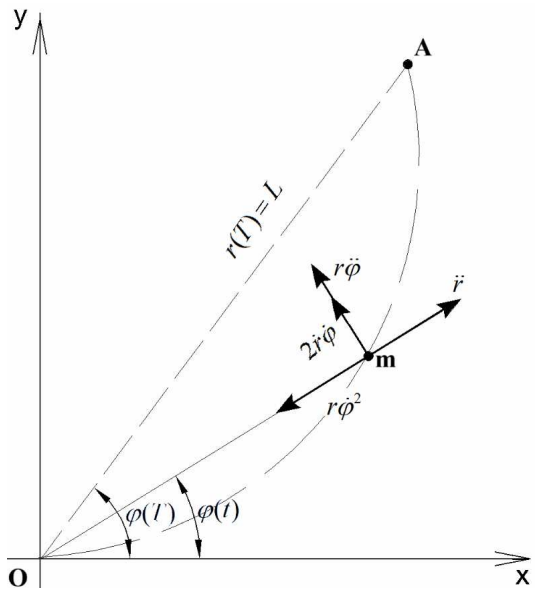


Рис. 1. Ускорения объекта при движении в полярной системе координат

Дифференциальные уравнения движения материальной точки имеют вид:

$$m\left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right) = U_r;\ m\left(r\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\right) = U_\varphi, \quad (1)$$

где из (1) непосредственно следует управляющее воздействие:

$$U_r = m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2),\ U_\varphi = m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}), \quad (2)$$

где U_r, U_φ – ускорения в радиальном и трансверсальном направлениях; t – время.

При движении материальной точки вдоль радиуса:

$$S_r = L \cdot B_1,\ V_r = L \cdot B_2,\ U_r = L \cdot B_3,$$

где B_1, B_2, B_3 – аналитические зависимости:

$$B_1 = \left(\frac{(1-2t)^{n+2}}{T^{n+1}} + 2nt + 4T - T\right),\ B_2 = \frac{dB_1}{dt} = \frac{n+2}{T(n+1)}\left(1 - \frac{(T-2t)^{n+1}}{T^{n+1}}\right),$$

$$B_3 = \frac{dB_2}{dt} = \frac{(2n+4)(T-2t)^n}{t^2T^n}, \quad (3)$$

где n – степень полинома (n =1,3,5…); T – заданное время движения; S_r, V_r, U_r – перемещение, скорость и ускорение в радиальном направлении.

При вращении радиуса в конечное состояние:

$$\varphi = \varphi(T)\cdot B_1,\ \omega = \dot{\varphi} = \varphi(T)\cdot B_2,\ \varepsilon = \ddot{\varphi} = \varphi(T)\cdot B_3, \quad (4)$$

где ω, ε – угловая скорость и угловое ускорение.

Из универсальных аналитических зависимостей следует частный случай классического управления (задача Лагранжа) при $n=1$. Из (3) получено:

1) движение вдоль радиуса:

положение $S_r = \dfrac{Lt^2(3T-2t)}{T^3}$, скорость $V_r = \dfrac{6L+(T-2t)}{T^3}$, ускорение $U_r = \dfrac{6L(T-2t)}{T^3}$; (5)

2) вращение радиуса-вектора:

угол поворота $\varphi(t) = \dfrac{\varphi(T)t^2(3T-2t)}{T^3}$, угловая скорость $\omega(t) = \dfrac{6\varphi(T)t\cdot(T-t)}{T^3}$,

угловое ускорение $\varepsilon = \dfrac{6\varphi(T)\cdot(T-2t)}{T^3}$. (6)

Решение обратной задачи динамики точки

Необходимо найти: управления (ускорения) движения вдоль радиуса $U_r(t)$ и управление (ускорение) вращения радиуса-вектора $U_\varphi(t)$, при которых материальная точка, двигаясь из состояния покоя ($\varphi(0)=0$, $r(0)=0$, $\dot{\varphi}(0)=0$, $\dot{r}(0)=0$), перемещаются в конечное состояние покоя ($\varphi(T)=\pi/4$, $r(T)=L$, $\dot{\varphi}(T)=0$, $\dot{r}(T)=0$). Функции $\varphi(t)$, $r(t)$, удовлетворяющие заданным краевым условиям, принятые как частные случаи из универсальных аналитических зависимостей [12-14].

Численный пример. Исходные данные: $m=1$ кг; $S(T)=L=1$ м; $T=1$ с; $\varphi(T)=\pi/4$.

Графики движения S_r, V_r, U_r изображены на рисунке 2, а графики φ, ω, ε – на рисунке 3.

Для вычисления управляющих воздействий, обеспечивающих цели движения, использованы уравнения (2). Графики $U_r(t)$ и $U_\varphi(t)$ изображены на рисунке 4.

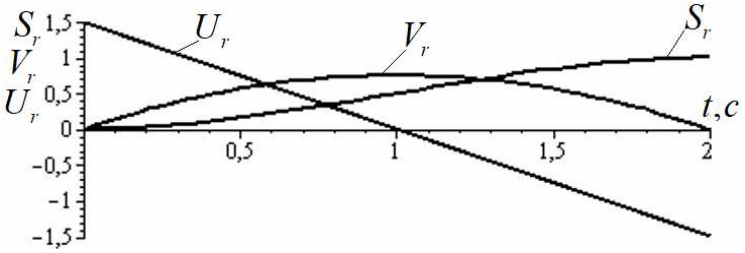


Рис. 2. Графики движения материальной точки при перемещении вдоль радиуса (при $n=1$)

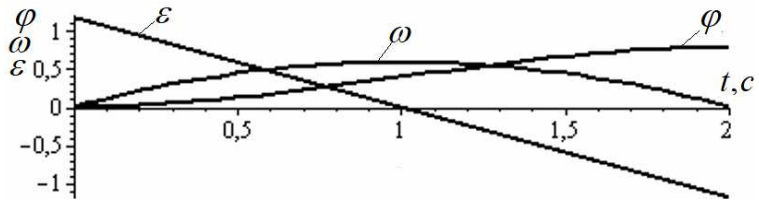


Рис. 3. Графики движения материальной точки при вращении радиуса-вектора с ускорением $\ddot{\varphi}$ (при $n=1$)

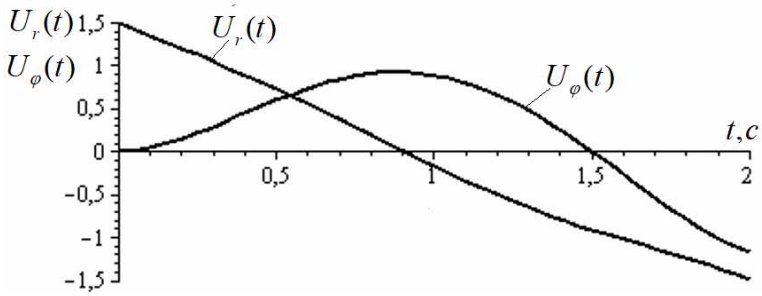
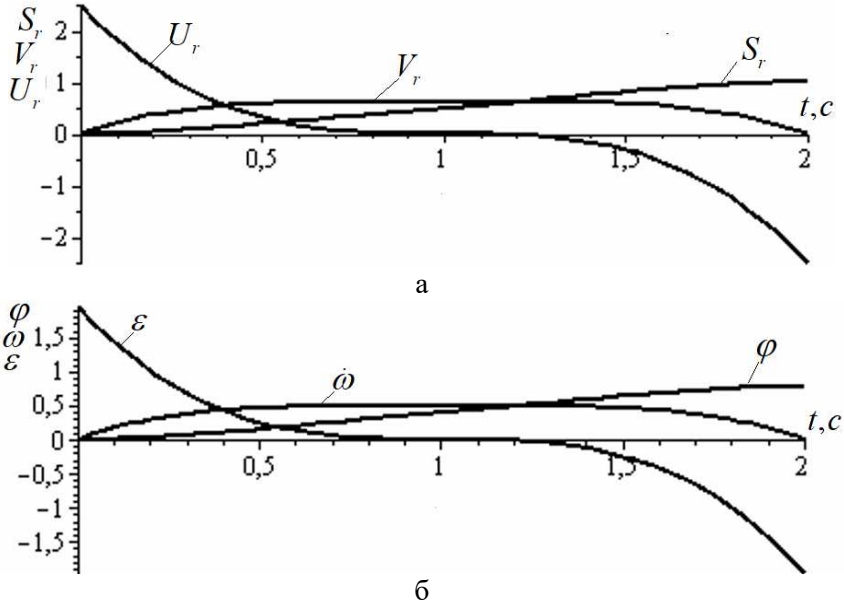


Рис. 4. Графики управлений $U_r(t)$ и $U_\varphi(t)$

Графики движения при $n=3$ изображены на рисунках 5, 6.



а

б

Рис. 5. Графики движения материальной точки: а) при перемещении вдоль радиуса; б) при вращении радиуса-вектора с ускорением $\ddot{\varphi}$ (при $n=3$)

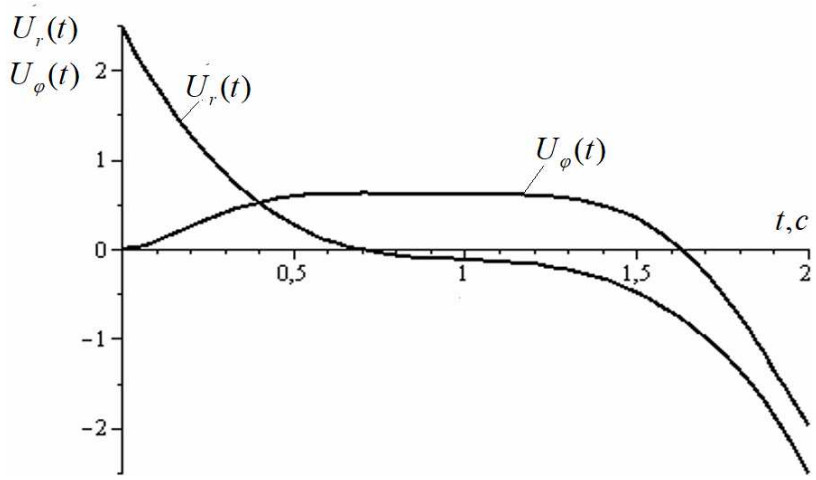


Рис. 6. Графики управлений $U_r(t)$ и $U_\varphi(t)$

Для классического случая ($n=1$) энергия, затраченная на реализацию движения вдоль радиуса:

$$W_r = m\int_0^{T_1} U_r V_r dt - m\int_{T_1}^{T} U_r V_r dt = 0,553 \text{ Дж},$$

и в трансверсальном направлении:

$$W_\varphi = m\int_0^{T_2} \varepsilon S V_\varphi dt - m\int_{T_2}^{T} \varepsilon S V_\varphi dt = 0,085 \text{ Дж}.$$

Общая энергия $W = W_r + W_\varphi = 0,6386$ Дж.

При использовании реверсионно конструируемого управления ($n=3$)

$$W_r = m\int_0^{T_1} U_r V_r dt - m\int_{T_1}^{T} U_r V_r dt = 0,3843 \text{ Дж},$$

и в трансверсальном направлении:

$$W_\varphi = m\int_0^{T_2} \varepsilon S V_\varphi dt - m\int_{T_2}^{T} \varepsilon S V_\varphi dt = 0,077 \text{ Дж}.$$

Общая энергия $W = W_r + W_\varphi = 0,4612$ Дж.

Итак, при использовании реверсионно конструируемого управления наблюдаем экономию энергии $\Delta W = 0,178$ Дж.

В случае учета линейно-вязкого сопротивления существенно перераспределяется затрата энергии на движение по радиусу и в трансверсальном направлении, но общее свойство экономии энергии при реверсионнном управлении (по сравнению с классическим управлением) сохраняется.

Заключение

На достаточно простом численном примере управляемого движения объекта в полярной системе координат показано, что достижение заданной цели движения осуществимо при экономии энергии. Экономия достигается в случае использования реверсионно конструируемого управления $(n = 3)$ – по сравнению с классическим управлением $(n = 1)$.

2. Более значительное уменьшение энергетического принуждения возможно при росте степени полинома ускорения (например $n = 5, 7$), что приводит к снижению энергии, как на разгон, так и на торможение.

Список литературы

1. Ведяков А.А., Милованович Е.В., Тертычный-Даури В.Ю., Тимофеева Г.В. Оптимальное управление как условная вариационная задача с подвижной правой границей // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. – 2019. – Т. 19, №1. – С. 59-66. – DOI: 10.17586/2226-1494-2019-19-1-59-66.
2. Ведяков А.А., Милованович Е.В., Слита О.В., Тертычный-Даури В.Ю. Вариационная задача адаптивного оптимального управления. Теоретический и прикладной компьютерный анализ // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. – 2023. – Т. 23, № 2. – С. 252-262. – DOI: 10.17586/2226-1494-2023-23-2-252-262.
3. Сумин М.И. Зачем нужна регуляризация принципа Лагранжа и принципа максимума Понтрягина и что она даёт // Вестник российских университетов. Математика. – 2018. – Т. 23, №124. – С. 757-775. – DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-757-775.
4. Сумин М.И. Принцип Лагранжа и его регуляризация как теоретическая основа устойчивого решения задач оптимального управления и обратных задач // Вестник российских университетов. Математика. – 2021. – Т. 26, вып. 134. – С. 151-171. – DOI: 10.20310/2686-9667-2021-26-134-151-171.
5. Ma Z., Zou S. Optimal Control Theory: The Variational Method. – Singapore: Springer, 2021. – 344 p. – DOI: 10.1007/978-981-33-6292-5.
6. Zabczyk J. Mathematical Control Theory: An Introduction. 2nd ed. – Cham: Birkhäuser, 2020. – DOI: 10.1007/978-3-030-44778-6.
7. Понтрягин Л.С., Болтянский Б.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов – М.: Наука, 1969. – 384 с.
8. Маркеев А.П. О принципе наименьшего принуждения // Соросовский образовательный журнал. – 1998. – №1. – С. 113-121.
9. Ata A.A. Energy Consumption-Based Trajectory Planning for Manipulators // Advances in Manufacturing Technology XXXV. 2022, vol. 25, pp. 119-124. DOI: 10.3233/ATDE220577.
10. Knöchelmann E., Steinke D., Greenyer J., Spindeldreier S., Ortmaier T. Trajectory Optimization Methods for Robotic Cells Considering Energy Efficiency and Collisions // Annals of Scientific Society for Assembly, Handling and Industrial Robotics. 2020, pp. 229-240. DOI: 10.1007/978-3-662-61755-7_21.
11. He Ying, Mei Jiangping, Fang Zhiwei, Zhang Fan, Zhao Yanqin. Minimum Energy Trajectory Optimization for Driving Systems of Palletizing Robot Joints // Mathematical Problems in Engineering. 2018, pp. 7247093. DOI: 10.1155/2018/7247093.
12. Бохонский А.И., Варминская Н.И., Рыжков А.И. Минимальное энергетическое принуждение для достижения цели управляемого движения объекта // Journal of Advanced Research in Technical Science. – 2022. – №28. – С. 30-36. – doi.org/10.26160/2474-5901-2022-28-30-36.
13. Бохонский А.И. Варминская Н.И., Рыжков А.И. Примеры конструирования оптимального движения // Journal of Advanced Research in Technical Science. – 2025. – №47. – С. 17-22. –doi.org/10.26160/2474-5901-2025-47-17-22.
14. Бохонский А.И., Варминская Н.И. Конструирование оптимальных управлений перемещением упругих объектов. – СПб.: НИЦ МС, 2020 – 120 с.

References

1. Vedyakov A.A., Milovanovich E.V., Tertychnyi-Dauri V.Yu., Timofeeva G.V. Optimal control as a constrained variational problem with a movable right boundary // Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics. 2019, vol. 19, no. 1, pp. 59-66. DOI: 10.17586/2226-1494-2019-19-1-59-66.
2. Vedyakov A.A., Milovanovich E.V., Slita O.V., Tertychnyi-Dauri V.Yu. Variational potential of adaptive control: theoretical and applied computer analysis // Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics. 2023, vol. 23, no. 2, pp. 252-262. DOI: 10.17586/2226-1494-2023-23-2-252-262
3. Sumin M.I. Why regularization of the Lagrange principle and Pontryagin's maximum principle is needed and what it yields // Bulletin of Russian Universities. Mathematics. 2018, vol. 23, no. 124, pp. 757-775. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-757-775.
4. Sumin M.I. The Lagrange principle and its regularization as a theoretical basis for the stable solution of optimal control problems and inverse problems // Bulletin of Russian Universities. Mathematics. 2021, vol. 26, iss. 134, pp. 151-171. DOI: 10.20310/2686-9667-2021-26-134-151-171.
5. Ma Z., Zou S. Optimal Control Theory: The Variational Method. – Singapore: Springer, 2021. – 344 p. – DOI: 10.1007/978-981-33-6292-5.
6. Zabczyk J. Mathematical Control Theory: An Introduction. 2nd ed. – Cham: Birkhäuser, 2020. – DOI: 10.1007/978-3-030-44778-6.
7. Pontryagin L.S., Boltyanskii B.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. The Mathematical Theory of Optimal Processes – M.: Science, 1969. – 384 p.
8. Markeev A.P. On the Principle of Least Constraint // Soros Educational Journal. 1998, no. 1, pp. 113-121.
9. Ata A.A. Energy Consumption-Based Trajectory Planning for Manipulators // Advances in Manufacturing Technology XXXV. 2022, vol. 25, pp. 119-124. DOI: 10.3233/ATDE220577.
10. Knöchelmann E., Steinke D., Greenyer J., Spindeldreier S., Ortmaier T. Trajectory Optimization Methods for Robotic Cells Considering Energy Efficiency and Collisions // Annals of Scientific Society for Assembly, Handling and Industrial Robotics. 2020, pp. 229-240. DOI: 10.1007/978-3-662-61755-7_21.
11. He Ying, Mei Jiangping, Fang Zhiwei, Zhang Fan, Zhao Yanqin. Minimum Energy Trajectory Optimization for Driving Systems of Palletizing Robot Joints // Mathematical Problems in Engineering. 2018, pp. 7247093. DOI: 10.1155/2018/7247093.
12. Bokhonsky A.I., Varminskaya N.I., Ryzhkov A.I. Minimal energy effort to achieve the target of controlled object motion // Journal of Advanced Research in Technical Science. 2022, iss. 28, pp. 30-36. doi.org/10.26160/2474-5901-2022-28-30-36.
13. Bokhonsky A.I., Varminskaya N.I., Ryzhkov A.I. Examples of optimal motion design // Journal of Advanced Research in Technical Science. 2025, iss. 47, pp. 17-22. doi.org/10.26160/2474-5901-2025-47-17-22
14. Bokhonsky A.I., Varminskaya N.I. Design of optimal controls for the displacement of elastic objects. – SPb.: SRC MS, 2020. – 120 p.

Сведения об авторах:	*Information about authors:*
Бохонский Александр Иванович – доктор технических наук, профессор кафедры "Цифровое проектирование"	**Bokhonsky Aleksandr Ivanovich** – doctor of technical sciences, professor of the Department of digital design
Майстришин Михаил Михайлович – кандидат технических наук, доцент кафедры "Автоматизация и технология машиностроения"	**Maistrishin Mikhail Mikhailovich** – candidate of technical sciences, associate professor of the Department of automation and mechanical engineering technology
Мозолевская Татьяна Викторовна – кандидат технических наук, профессор кафедры физики и общетехнических дисциплин	**Mozolevskaya Tatyana Viktorovna** – candidate of technical sciences, professor of the Department of physics and general technical disciplines
bohon.alex@mail.ru	

Получена 09.10.2026