

МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ РЕБРИСТОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Балабанов В.В., Миронова Л.И.

*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),
Москва*

Ключевые слова: оребренная оболочка, перемещения, потенциальная энергия упругой деформации, краевая задача, напряжения, теория оболочек.

Аннотация. В статье изложена методика решения краевой задачи ребристой цилиндрической оболочки на основе разработанной математической модели цилиндрической оболочки, подкрепленной кольцевыми ребрами, испытывающей силовое нагружение. В предположении, что напряженно-деформированное состояние подкрепленной оболочечной конструкции состоит из основного состояния, обусловленного воздействием внешних нагрузок, и дополнительного внутреннего напряженно-деформированного состояния, локализирующего вблизи краев оболочек или возможных линий искажения в местах сочленения кольцевых ребер с образующей обшивки, исследование проведено в рамках пространственной теории упругости. В терминах линейной теории упругости оболочек и пластин определение дополнительного напряженно-деформированного состояния обшивки сводится к решению трехмерной краевой задачи, с учетом ряда дополнительных факторов, допускающих асимптотическое разложение компонентов вектора перемещения в виде полиномов по нормальной координате к срединной поверхности. Математическая модель построена на основе интегрирования системы уравнений равновесия, полученных вариационным методом Лагранжа, и условий нагружения на лицевых поверхностях, а также некоторых граничных условий на боковых поверхностях. Отмечено, что аналитическое решение краевой задачи имеет значительные математические трудности. Приведены некоторые результаты численного решения краевой задачи, полученные методом конечных разностей, выполненных на языке программирования Python.

METHODOLOGY FOR SOLVING THE BOUNDARY-VALUE PROBLEM OF A RIBBED CYLINDRICAL SHELL

Balabanov V.V., Mironova L.I.

Moscow Aviation Institute (State National Research University), Moscow

Keywords: ribbed shell, displacements, potential energy of elastic deformation, boundary-value problem, stresses, shell theory.

Abstract. The article presents a methodology for solving the boundary-value problem of a ribbed cylindrical shell based on a developed mathematical model of a cylindrical shell reinforced with ring ribs and subjected to force loading. Under the assumption that the stress-strain state of the stiffened shell structure consists of a primary state caused by external loads and an additional internal stress-strain state localized near the shell edges or possible distortion lines at the junctions of the ring ribs with the shell generatrix, the study was carried out within the framework of three-dimensional elasticity theory. In terms of the linear theory of elasticity of shells and plates, the determination of the additional stress-strain state of the shell skin is reduced to the solution of a three-dimensional boundary-value problem, taking into account a number of additional factors that allow an asymptotic expansion of the displacement vector components in the form of polynomials in the normal coordinate to the middle surface. The mathematical model was constructed by integrating the equilibrium equations obtained by the Lagrange variational method, together with the loading conditions on the face surfaces and certain boundary conditions on the lateral surfaces. It is noted that the analytical solution of the boundary-value problem involves considerable mathematical difficulties. Some results of the numerical solution of the boundary-value problem, obtained by the finite-difference method implemented in the Python programming language, are presented.

Введение. Современные механические конструкции характеризуются высоким уровнем техники и работают в сложных условиях нагружения, вследствие чего ужесточаются требования к надежности и безопасности технических объектов. Появляется необходимость в построении более достоверных методов исследования и математических моделей определения напряженно-деформированного состояния (НДС), особенно, вблизи области крепления элементов конструкций, стыков, скачкообразного изменения жесткостных

характеристик, в том числе подкрепляющих элементов [1, 2]. Наиболее опасными являются зоны искажения напряженного состояния тонкостенных элементов, обусловленные действием локальных и быстро изменяющихся нагрузок, что приводит к постановке и решению краевых задач теории упругости, где в качестве исходных общих уравнений целесообразно рассмотреть уравнения пространственной теории оболочек и пластин [3-5]. Поэтому разработка методов определения напряженно-деформированного состояния подкрепленных цилиндрических оболочек, уточняющих результаты классической теории и применяемых на практике при проектировании перспективной техники, направленных на обеспечение прочностной надежности, определяет актуальность выполненного исследования.

Целью настоящей статьи является поиск решения краевой задачи уточненной математической модели напряженно-деформированного состояния тонкостенной оболочки, подкрепленной упругими элементами, испытывающей локальное напряженное состояние.

В практическом применении решаемой задачи следует отметить некоторые расчетные случаи, например, нагружение фюзеляжа самолета. Основными действующими нагрузками на фюзеляж, являются силы, передающие усилия от прикрепленных к нему агрегатов самолета (крыла, оперения, силовой установки, шасси) [6]. Этот случай соответствует максимальной перегрузке в полете по вертикальной координате. Такие условия силового воздействия могут быть рассмотрены как локальное быстро меняющееся во времени нагружение, которое характеризуется быстроменяющимся напряженным состоянием [7], и может быть опасным с точки зрения оценки устойчивости объекта.

Материалы и методы исследований. Исследованию НДС изотропных и ортотропных ребристых оболочек посвящено немало работ, например, [8, 9]. Многие из них базируются на общей теории пластин и оболочек в двумерной постановке задачи, основанной на гипотезах Киргофа-Лява и теории стержней Киргофа-Клебша [5, 8, 10]. Принятые допущения к свойствам тонкой оболочки приводят к упрощению расчетов, что требует обоснования применимости гипотез теории оболочек [11]. Предлагаем искать решения краевой задачи нагружения тонкостенной ребристой оболочки кругового очертания, используя уравнения пространственной задачи теории упругости. Такой подход был рассмотрен в работе [12].

Сформулируем следующую постановку задачи. Пусть упругая ребренная цилиндрическая оболочка находится под действием некоторой нагрузки q , которую пока уточнять не будем. Принимаем, что положение каждой точки поверхности исследуемой оболочки определяется значениями триортогональной криволинейной системы координат $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Геометрическую форму ребренной оболочки будем рассматривать в виде составной конструкции тонкостенного цилиндра (обшивки) с подкреплениями в радиальном направлении (кольцевыми ребрами), соединенные между собой жестко. Взаимодействия ребер и обшивки на поверхности контакта предполагают одинаковые перемещения. Считаем, что координатные оси α_1, α_2 совпадают с линиями главных кривизн срединной поверхности цилиндрической оболочки, обозначив их через r_1 и r_2 . Направление оси α_3 совпадает с направлением нормали, проведенной снаружи к срединной поверхности, рис. 1.

Для круговой цилиндрической оболочки, подкрепленной кольцевыми ребрами, удобно принять новую систему координат ξ, θ, z , для которой выполняются соотношения

$$\alpha_1 = R \cdot \xi, \alpha_2 = R \cdot \theta, \alpha_3 = z + R, \quad (1)$$

где R – радиус оболочки; ξ – относительные (измеренные в долях радиуса R) расстояния по образующей; θ – относительное расстояние по направляющему кругу, т.е. центральный угол; z – относительное расстояние по наружной нормали к срединной поверхности (рис. 1).

Соотношения для коэффициентов Ламе H_1 и H_2 и криволинейных координат α_1 и α_2 запишем, выразив главные кривизны срединной поверхности цилиндрической оболочки r_1 и r_2 через ее радиус. Тогда с учетом (1) имеем

$$H_i = A_i \alpha_i; \alpha_i = 1 + r_i; i = 1, 2, \quad (2)$$

где A_i – коэффициенты первой квадратичной формы оболочки.

Путем надлежащего выбора криволинейных координат α_1 и α_2 приведем цилиндрическую поверхность оболочки к форме с коэффициентами A_i , так, что $A_1 = A_2 = \text{const}$ и $A_1 = A_2 = R$, принимая величину толщины оболочки $2h$ малой, для которой соблюдается соотношение $2h \ll R$.

Исследуем локальное напряженное состояние оболочки на краю и в местах креплений ребер. Принимаются следующие допущения. Исходная форма оболочки – идеальная (начальные прогибы отсутствуют), нагружение является статическим, вследствие чего напряженное состояние оболочки считаем безмоментным.

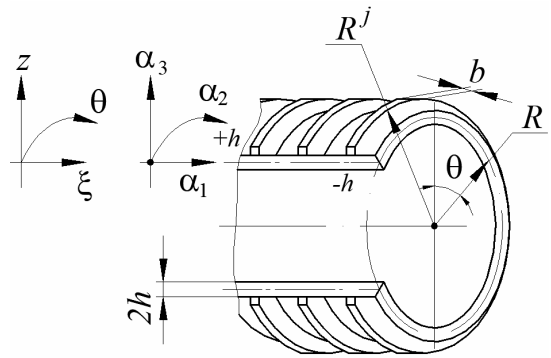


Рис. 1. Фрагмент круговой оребренной оболочки: расчетная схема

При локальной нагрузке в местах сочленения оболочки и ребер возникает быстроменяющееся напряженное состояние [11], поэтому решение будем искать в перемещениях, допуская их асимптотическое разложение в виде полиномов по нормальной координате к срединной поверхности. Имеем

$$u(\xi, \theta, z) = \sum_{k=0}^K u_k(\xi, \theta) \frac{z^k}{k!}; \quad v(\xi, \theta, z) = \sum_{k=0}^K v_k(\xi, \theta) \frac{z^k}{k!}; \quad w(\xi, \theta, z) = \sum_{k=0}^K w_k(\xi, \theta) \frac{z^k}{k!}. \quad (3)$$

где u, v, w – перемещения; k – степень полинома.

В отличие от работы [12], где в разложении (3) были рассмотрены два члена ряда, $k = 2$, для нашего случая принимаем $k = 3$. Это позволит повысить степени полиномов на два порядка в сравнении с классической теорией оболочек.

При степени полинома $k = 3$ асимптотическое представление перемещений оболочки представим в виде

$$\begin{aligned} u(\xi, \theta, z) &= u_0(\xi, \theta) + u_1(\xi, \theta)z + u_2(\xi, \theta)\frac{z^2}{2} + u_3(\xi, \theta)\frac{z^3}{3!}; \\ v(\xi, \theta, z) &= v_0(\xi, \theta) + v_1(\xi, \theta)z + v_2(\xi, \theta)\frac{z^2}{2} + v_3(\xi, \theta)\frac{z^3}{3!}; \\ w(\xi, \theta, z) &= w_0(\xi, \theta) + w_1(\xi, \theta)z + w_2(\xi, \theta)\frac{z^2}{2}. \end{aligned} \quad (4)$$

В предположении, что перемещение кольцевых ребер и их влияние на обшивку происходит через две компоненты вектора перемещений – по окружному и нормальному направлениям (θ, z) , считаем $u = 0$. Полагая в (3) $k = 1$, получим выражения для перемещений кольцевых ребер в виде

$$v^j(\theta, z) = v_0^j(\theta) + v_1^j(\theta)z, \quad j = 1 \dots N; \quad w^j(\theta, z) = w_0^j(\theta), \quad j = 1 \dots N, \quad (5)$$

где v^j, w^j – перемещения кольцевых ребер; j – порядковый номер кольцевого ребра.

Используем вариационный метод исследования, основанный на принципе минимума перемещений (принцип Лагранжа), в котором минимизируется полная энергия упругой системы в целом. Поскольку вариационные методы и их модификации хорошо известны, то в силу краткости изложения математические соотношения здесь не приводятся.

Из решения вариационной задачи нахождения минимума полной энергии с учетом выражений (4) и (5) были получены уравнения равновесия оболочки, а также соотношения между деформациями и перемещениями обшивки и кольцевых ребер. Данное решение в достаточной степени приведено в работе [13].

Полученная система дифференциальных уравнений в перемещениях подкрепленной цилиндрической оболочки имеет вид

$$\sum_{n=0}^3 \left(K_{u_{m_n}} + K_{u_{11m_n}} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + K_{u_{22m_n}} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \cdot u_n + \sum_{n=0}^3 K_{v_{12m_n}} \cdot \frac{\partial^2 v_n}{\partial \xi \partial \theta} + \sum_{n=0}^2 K_{w_{1m_0}} \cdot \frac{\partial w_n}{\partial \xi} = K_{q_m};$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^3 K_{u_{12l_n}} \cdot \frac{\partial^2 u_n}{\partial \xi \partial \theta} + \sum_{n=0}^3 \left(K_{v_{1n}} + K_{v_{11l_n}} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + K_{v_{22l_n}} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \cdot v_n + \sum_{n=0}^2 K_{w_{2l_n}} \cdot \frac{\partial w_n}{\partial \theta} + \\
& + \sum_{j=1}^N \left[\sum_{n=0}^3 \left(K_{v_{1n}}^j + K_{v_{22l_n}}^j \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \cdot v_n + \sum_{n=0}^2 K_{w_{2l_n}}^j \cdot \frac{\partial w_n}{\partial \theta} + \left(K_{v_{1l}}^j + K_{v_{22l}}^j \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \cdot v_1^j \right] \cdot \delta(\xi - \xi_j) = K_{q_l}; \\
& \sum_{n=0}^3 K_{u_{1k_n}} \cdot \frac{\partial u_n}{\partial \xi} + \sum_{n=0}^3 K_{v_{2k_n}} \cdot \frac{\partial v_n}{\partial \theta} + \sum_{n=0}^2 \left(K_{w_{k_n}} + K_{w_{11k_n}} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + K_{w_{22k_n}} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \cdot w_n + \\
& + \sum_{j=1}^N \left[\sum_{n=0}^3 K_{v_{2k_n}}^j \cdot \frac{\partial v_n}{\partial \theta} + \sum_{n=0}^2 \left(K_{w_{k_n}}^j + K_{w_{22k_n}}^j \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \cdot w_n + K_{v_{2k}}^j \cdot \frac{\partial v_1^j}{\partial \theta} \right] \cdot \delta(\xi - \xi_j) = K_{q_k}; \\
& \sum_{n=0}^3 \left(K_{v_{12n}}^j + K_{v_{2212n}}^j \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \cdot v_n + \sum_{n=0}^2 K_{w_{212n}}^j \cdot \frac{\partial w_n}{\partial \theta} + \left(K_{v_{12}}^j + K_{v_{2212}}^j \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \cdot v_1^j = 0; \\
& m = 1 \dots 4, \quad l = 5 \dots 8, \quad k = 9 \dots 11, \quad j = 1 \dots N,
\end{aligned} \tag{6}$$

где коэффициенты K с различными индексами представляют собой постоянные величины, зависящие от геометрических и физических параметров обшивки и подкрепляющих ребер.

Считаем, что НДС подкрепленной оболочечной конструкции состоит из основного напряженно-деформированного состояния, обусловленного воздействием внешних нагрузок, и дополнительного внутреннего напряженно-деформированного состояния, локализирующего вблизи краев оболочек или возможных линий искажения в местах сочленения кольцевых ребер с образующей обшивки. Тогда определение дополнительного напряженно-деформированного состояния обшивки (ортотропной оболочки) сведем к решению трехмерной краевой задачи, заключающейся в интегрировании системы уравнений равновесия с учетом условий нагружения на лицевых поверхностях и некоторых граничных условий на боковых поверхностях.

Нагружению обшивки отвечают следующие граничные условия:

– на лицевых и боковых поверхностях в направлении координаты z

$$\sigma_z(\pm h) = q_{33}^\pm; \quad \tau_{\xi z}(\pm h) = q_{13}^\pm; \quad \tau_{\theta z}(\pm h) = q_{23}^\pm; \tag{7}$$

– вдоль краев координатных линий ξ и θ

$$\sigma_\xi = q_{11}; \quad \sigma_\theta = q_{22}; \quad \tau_{\xi\theta} = q_{12}; \quad \tau_{\theta\xi} = q_{21}. \tag{8}$$

Здесь σ_ξ , σ_θ , σ_z , $\tau_{\xi\theta}$, $\tau_{\xi z}$, $\tau_{\theta z}$ – компоненты напряжения; q_{ij} – поверхностные силы, приложенные к лицевым и боковым поверхностям обшивки, $i, j = 1, 2, 3$; q^+ и q^- – поверхностные силы, приложенные к внешней и внутренней поверхностям.

Для решения дифференциальной системы уравнений (6) приведем ее к системе обыкновенных дифференциальных уравнений методом разложения искомых перемещений и нагрузок в тригонометрические ряды Фурье по окружной переменной θ . Тогда соотношения компонентов перемещения и нагрузки имеют вид

$$\begin{aligned}
u_k(\xi, \theta) &= u_{k0}(\xi) + \sum_{m=1}^{\infty} \left[u_{km}^{(1)}(\xi) \cdot \cos(m\theta) + u_{km}^{(2)}(\xi) \cdot \sin(m\theta) \right]; \\
v_k(\xi, \theta) &= v_{k0}(\xi) + \sum_{m=1}^{\infty} \left[v_{km}^{(1)}(\xi) \cdot \sin(m\theta) - v_{km}^{(2)}(\xi) \cdot \cos(m\theta) \right]; \\
w_l(\xi, \theta) &= w_{l0}(\xi) + \sum_{m=1}^{\infty} \left[w_{lm}^{(1)}(\xi) \cdot \cos(m\theta) + w_{lm}^{(2)}(\xi) \cdot \sin(m\theta) \right]; \\
v_1^j(\theta) &= B_0^j(\xi) + \sum_{m=1}^{\infty} \left[B_m^{j(1)}(\xi) \cdot \sin(m\theta) - B_m^{j(2)}(\xi) \cdot \cos(m\theta) \right]; \\
k &= 0 \dots 3, \quad l = 0 \dots 2, \quad j = 1 \dots N.
\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
q_{13}^{\pm}(\xi, \theta) &= q_{130}^{\pm}(\xi) + \sum_{m=1}^{\infty} \left[q_{13m}^{\pm(1)}(\xi) \cdot \cos(m\theta) + q_{13m}^{\pm(2)}(\xi) \cdot \sin(m\theta) \right]; \\
q_{23}^{\pm}(\xi, \theta) &= q_{230}^{\pm}(\xi) + \sum_{m=1}^{\infty} \left[q_{23m}^{\pm(1)}(\xi) \cdot \sin(m\theta) - q_{23m}^{\pm(2)}(\xi) \cdot \cos(m\theta) \right]; \\
q_{33}^{\pm}(\xi, \theta) &= q_{330}^{\pm}(\xi) + \sum_{m=1}^{\infty} \left[q_{33m}^{\pm(1)}(\xi) \cdot \cos(m\theta) + q_{33m}^{\pm(2)}(\xi) \cdot \sin(m\theta) \right].
\end{aligned} \tag{10}$$

В общем виде аналитическое решение краевой задачи можно представить следующим образом

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_1 + \Phi_j, \tag{11}$$

где Φ_0 – общее решение однородной системы, Φ_1 – частное решение, соответствующее внешней нагрузке, Φ_j – частные решения, соответствующие j -му ребру.

Аналитическое решение выражения (11) связано со значительными математическими трудностями. Приведем некоторые результаты численного решения краевой задачи, полученные методом конечных разностей, выполненных на языке программирования Python.

Результаты

Рассмотрен случай осесимметричного нагружения цилиндрической оребренной оболочки внутренним давлением. Исходные данные. Подкрепление отсутствует, обшивка закреплена жестко по обеим сторонам, выполнена из алюминиевого сплава и нагружена нормальным атмосферным давлением, $q = 101325$ Па. Геометрические параметры оболочки: длина $L = 3$ м радиус оболочки $R = 0,5$ м, $R/L = 6$, толщина обшивки $2h = R/20 = 0,025$ м; упругие постоянные: $E = 72 \cdot 10^9$, $\mu = 0,3$.

Граничные условия (7) и (8) имеют вид

$$q_{33}^- = q_{330}^- = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq \xi \leq \xi_{01}; \\ Q_0 & \text{при } \xi_{01} \leq \xi \leq \xi_{02}; \\ 0 & \text{при } \xi_{02} \leq \xi \leq \xi_0 = L/R. \end{cases} \tag{12}$$

где Q_0 – нагрузка, действующая на оболочку.

На рисунках 2 и 3 приведены графики распределения перемещений в продольном направлении при нулевой гармонике ($m = 0$) и гармонике $m = 4$. На рисунке 4 показано деформированное состояние контура оболочки в поперечном сечении: а – при нулевой гармонике ($m = 0$), масштабный коэффициент для отображения деформаций равен 40; б – при гармонике $m = 4$. На рисунке 5 показано деформированное состояние оболочки в поперечном сечении и продольном направлении: а – при нулевой гармонике ($m = 0$), масштабный коэффициент для отображения деформаций равен 400; б – при гармонике $m = 4$, масштабный коэффициент для отображения деформаций равен 4.

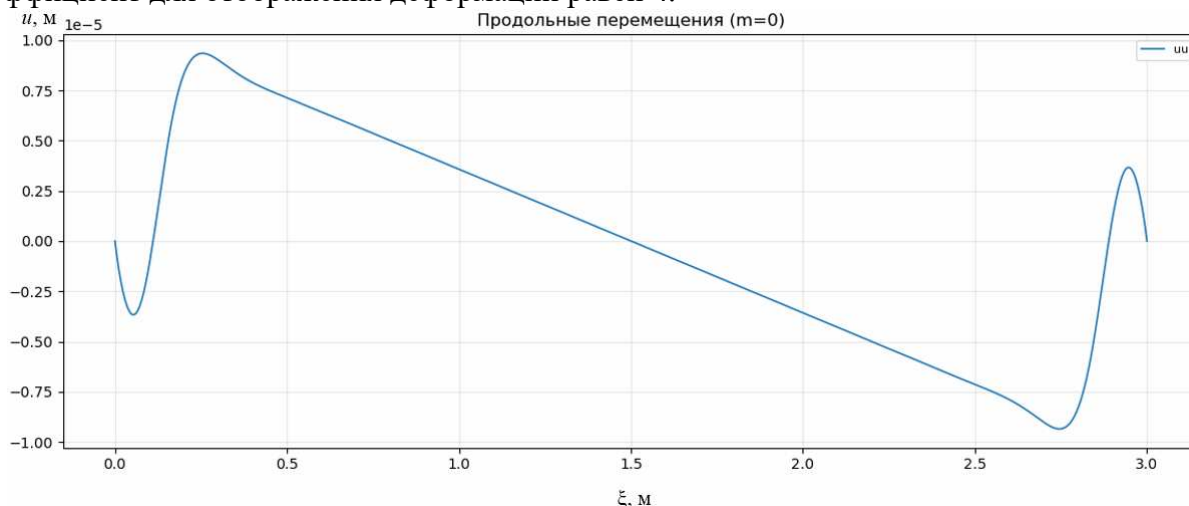


Рис. 2. Перемещения оболочки в продольном направлении, $\theta = 0$, $m = 0$

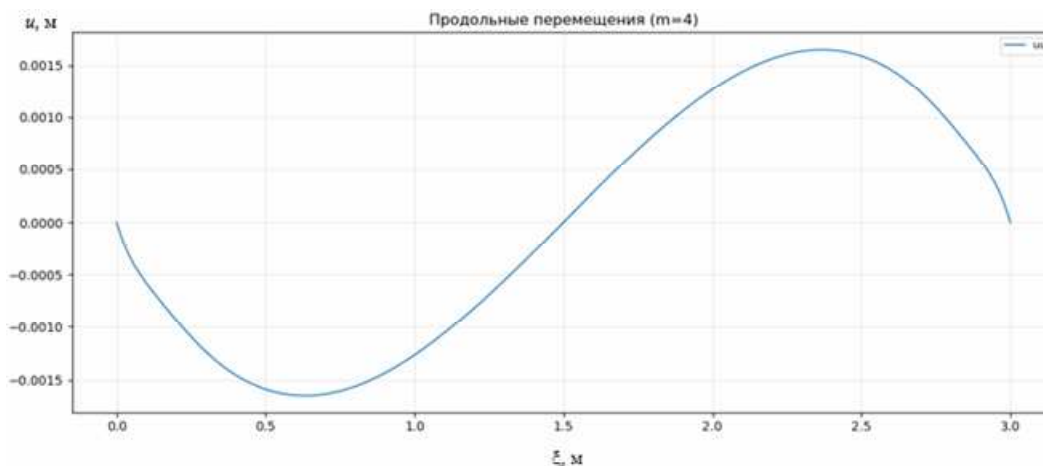
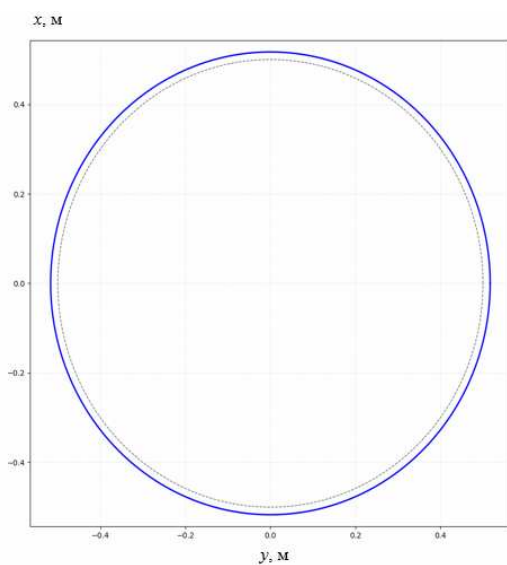
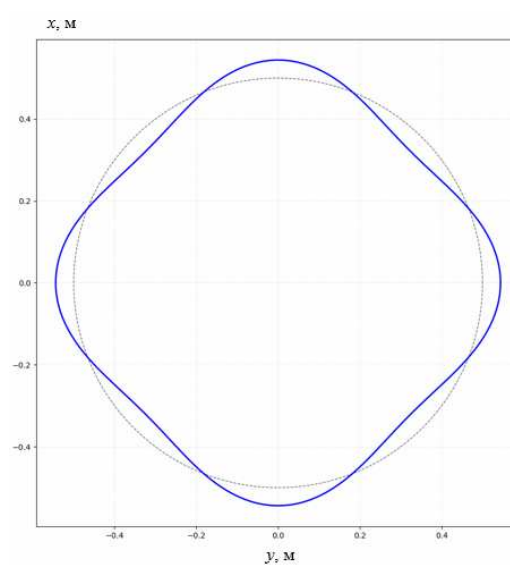


Рис. 3. Перемещения оболочки в продольном направлении, $\theta = 0$, $m = 4$

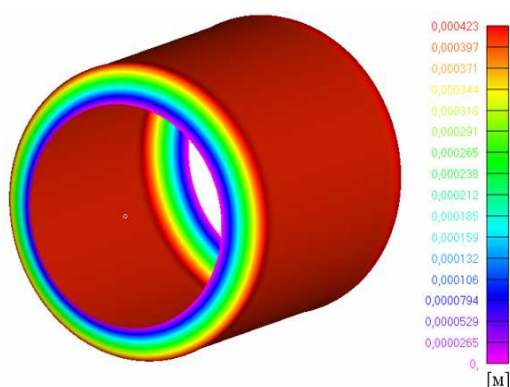


а

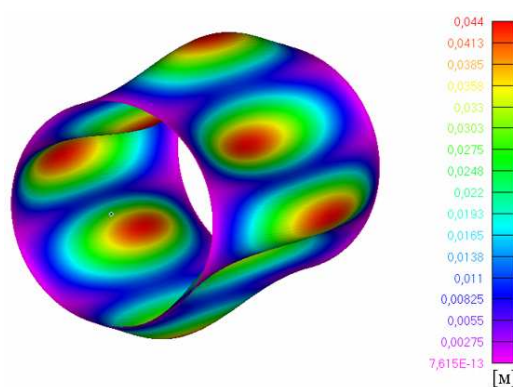


б

Рис. 4. Деформированное состояние контура оболочки в поперечном сечении, $\theta = 0$: а – при $m = 0$; б – при $m = 4$



а



б

Рис. 5. Деформированное состояние оболочки в поперечном сечении и продольном направлении, $\theta = 0$: а – при $m = 0$; б – при $m = 4$

Выводы. Установлено, что обшивка, нагруженная в соответствии с законом (10), удовлетворяющим граничным условиям (11), испытывает быстроменяющееся локальное напряженно-деформированное состояние. Наиболее опасными являются зоны искажения поперечного и продольного контуров, обусловленные действием локальных и быстро изменяющихся нагрузок при увеличении числа полуволн.

Заключение

Изложена методика решения краевой задачи для ребристой цилиндрической оболочки, подкрепленной кольцевыми ребрами, нагруженной внешними и внутренними силовыми факторами с учетом ряда дополнительных факторов, допускающих асимптотическое разложение компонентов вектора перемещения в виде полиномов по нормальной координате к срединной поверхности. Такой подход позволил повысить степени полиномов на два порядка в сравнении с классической теорией оболочек.

Для каждого члена разложения компонентов вектора перемещения краевая задача в конечном виде сведена к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений с учетом условий нагружения на лицевых поверхностях, а также некоторых граничных условий на боковых поверхностях.

Полученные результаты исследования имеют более высокую точность и направлены на обеспечение прочностной надежности реальных тонкостенных конструкций.

Список литературы

1. Миронова Л.И., Коваль С.М. Моделирование напряженно-деформированного состояния несущих конструкций в программных комплексах Abaqus и MeshFree на этапе проектирования изделий авиационной техники // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. – 2025. – №2. – С. 4-13.
2. Анисимов С.А., Павлов В.Ф., Сазанов В.П. Численный анализ устойчивости при осевом сжатии вафельных цилиндрических оболочек в рамках линейного бифуркационного подхода в сопоставлении с экспериментом // Труды МАИ. – 2025. – №141. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=184492>.
3. Мавлютов Р.Р. Концентрация напряжений в элементах авиационных конструкций. – М.: Наука, 1981. – 141 с.
4. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука, 1967. – 984 с.
5. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. – М.: Наука, 1976. – 512 с.
6. Анисимов К.С., Евдокименков В.Н., Красильщиков М.Н., Сыпало К.И., Топоров Н.Б. Оптимизация процесса совершенствования авиационных комплексов на базе концепции функционального проектирования // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. – 2022. – №1. – С. 105-123. – DOI: 10.31857/S0002338822010036.
7. Зверев Е.М., Олехова Л.В. Сведение трехмерных уравнений НДС пластины из композиционного материала к двумерным на базе принципа сжатых отображений // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. – 2014. – № 95. – 29 с. – URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-95>.
8. Власов В.З. Общая теория оболочек. – М.: Гостехиздат, 1949. – 475 с.
9. Амиро И.Я. Ребристые цилиндрические оболочки / АН УССР. Институт механики. – Киев: Наукова думка, 1973. – 248 с.
10. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. – СПб: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2010. – 380 с.
11. Зверев Е.М. Конструктивная теория тонких упругих оболочек // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. – 2016. – №33. – 25 с. – URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-33>.
12. Фирсанов В.В., Во А.Х., Доан Ч.Н. Исследование напряженного состояния подкрепленных оболочек по уточненной теории с учетом влияния упругости ребер и защемленного края // Труды МАИ. – 2019. – №104. – URL: <http://www.trudymai.ru/published.php?ID=102130>.
13. Балабанов В.В., Миронова Л.И. К вопросу о деформациях и устойчивости ребренных тонкостенных оболочечных конструкций // XXXVII Международная инновационная конференция молодых ученых и студентов (МИКМУС-2025): Сборник трудов конференции (Москва, 09 декабря – 11 декабря 2025. – М: Изд-во ИМАШ РАН, 2025. – С. 33-36.

References

1. Mironova L.I., Koval' S.M. Modeling of the stress-strain state of load-bearing structures in Abaqus and MeshFree software systems at the stage of design of aviation equipment products // News of Higher Educational Institutions. Aviation Technology. 2025, no. 2, pp. 4-13.
2. Anisimov S.A., Pavlov V.F., Sazanov V.P. Numerical analysis of buckling of orthogrid-stiffened cylindrical shells under axial compression within the framework of a linear bifurcation approach in comparison with experiment // Proceedings of MAI. 2025, no. 141. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=184492>.
3. Mavlyutov R.R. Stress concentrators in aircraft structural elements. – M.: Science, 1981. – 141 p.
4. Vol'mir A.S. Stability of deformable systems. – M.: Science, 1967. – 984 p.
5. Gol'denveizer A.L. Theory of elastic thin shells. – M.: Science, 1976. – 512 p.
6. Anisimov K.S., Syalo K.I., Toporov N.B., Evdokimenkov V.N., Krasil'shchikov M.N. Optimization of the process of improving aviation complexes based on the concept of functional design // Journal of Computer and Systems Sciences International. 2022, vol. 61, no. 1, pp. 65-82. DOI: 10.1134/S1064230722010038.

7. Zveryaev E.M., Olekhova L.V. Reduction of three-dimensional equations of the VAT of a composite plate to two-dimensional ones based on the principle of compressed maps // Preprints of IPM n.a. M.V. Keldysh. 2014, no. 95, 29 p. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-95>.
8. Vlasov V.Z. General theory of shells. – M.: Gostekhizdat, 1949. – 475 p.
9. Amiro, I.Ya. Ribbed Cylindrical Shells / AN UkrSSR. Institute of Mechanics. – Kyiv: Naukova Dumka, 1973. – 248 p.
10. Novozhilov V.V. Thin shell theory. – SPb: Publ. house of SPb. un-ty, 2010, – 380 p.
11. Zveryaev E.M. Constructive theory of thin elastic shell // Preprints of IPM n.a. M.V. Keldysh. 2016, no. 33, 25 p. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-33>.
12. Firsanov V.V., Vo A.H., Doan T.N. Studying stiffened shells stress state by the refined theory with account for ribs elasticity and clamped edge // Proceedings of MAI. 2019, no. 104. URL: <http://www.trudymai.ru/published.php?ID=102130>.
13. Balabanov V.V., Mironova L.I. On the deformations and stability of ribbed thin-walled shell structures // XXXVII International Innovation Conference of Young Scientists and Students (MICMUS-2025): Proceedings of the conference (Moscow, December 09 – December 11, 2025. – M.: IMASH RAS Publishing House, 2025. – P. 33-36.

Сведения об авторах:

Information about authors:

Балабанов Виктор Владимирович – аспирант	Balabanov Viktor Vladimirovich – postgraduate student
Миронова Любовь Ивановна – доктор технических наук, доцент, профессор кафедры 902	Mironova Lyubov' Ivanovna – doctor of technical sciences, associate professor, professor of Department 902
v.v.balabanov98@gmail.com	

Получена 29.07.2026