

ПРЕДЕЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ УПРУГОЙ НЕОДНОРОДНОЙ ПОЛОСЫ, НАХОДЯЩЕЙСЯ В УСЛОВИЯХ ВСЕСТОРОННЕГО СЖАТИЯ

Коротков М.М.

Воронежский государственный университет, Воронеж

Ключевые слова: структурная нелинейность, бифуркационный анализ, устойчивость, подход несовершенств, граничное условие, обобщённые конечные разности, напряженно-деформированное состояние, сжимаемая упругая полоса.

Аннотация. В работе исследуется предельное состояние упругой неоднородной полосы из несжимаемого материала с неидеальными границами поперечного сечения в условиях всестороннего сжатия. Математическая модель, учитывающая нелинейные граничные условия и углы поворота в трактовке Новожилова–Ишлинского, базируется на анализе однородного напряженно-деформированного состояния. Критерием достижения предельного состояния принято нарушение непрерывности решения относительно исходных параметров, объединяющее признаки первой группы (потерю устойчивости равновесной формы) и второй группы (возникновение недопустимых деформаций). Для численного построения границы области непрерывной зависимости применён метод обобщённых конечных разностей на регулярной сетке с аффинным масштабированием. Диагностика вырожденности разностной схемы обеспечивается за счёт TSVD-регуляризации локальных систем, что гарантирует устойчивость аппроксимации вблизи деформированных границ. Проведён анализ влияния геометрического параметра и параметров сжатия на критические кривые. Установлено, что аффинное преобразование координат сохраняет второй порядок точности схемы даже при неидеальных контурах. Численные эксперименты подтверждают высокую чувствительность критических нагрузок к начальным геометрическим несовершенствам контура. Полученные диаграммы могут быть использованы при нормировании допустимых отклонений формы для реальных строительных конструкций. Построенные границы позволяют точно отделять область сохранения однородного состояния от зон бифуркации, что существенно повышает достоверность инженерных расчётов тонкостенных элементов.

LIMIT STATE OF AN ELASTIC INHOMOGENEOUS STRIP UNDER ALL-ROUND COMPRESSION

Korotkov M.M.

Voronezh State University, Voronezh

Keywords: structural nonlinearity, bifurcation analysis, stability, imperfection approach, boundary condition, generalized finite differences, stress-strain state, compressive elastic strip.

Abstract. The paper investigates the limit state of an elastic inhomogeneous strip made of incompressible material with imperfect cross-sectional boundaries under all-round compression. The mathematical model, accounting for nonlinear boundary conditions and rotation angles in the Novozhilov–Ishlinskii framework, is based on analysis of a homogeneous stress-strain state. The criterion for reaching the limit state is taken as the loss of solution continuity with respect to initial parameters, combining features of the first group (loss of equilibrium stability) and the second group (occurrence of inadmissible deformations). For numerical construction of the continuous dependence boundary, a generalized finite difference method on a regular grid with affine scaling is applied. Degeneracy diagnostics of the difference scheme is ensured via TSVD regularization of local systems, which guarantees approximation stability near deformed boundaries. The influence of the geometric ratio and compression parameters on critical curves is analyzed. It is established that affine coordinate transformation preserves the second-order accuracy of the scheme even for imperfect contours. Numerical experiments confirm high sensitivity of critical loads to initial geometric imperfections of the contour. The obtained diagrams can be used for standardizing permissible shape deviations in real building structures. The constructed boundaries accurately separate the region preserving the homogeneous state from bifurcation zones, which significantly improves the reliability of engineering calculations for thin-walled elements.

Введение

При проектировании предполагается, что напряженно-деформированное состояние конструкций будет соответствовать установленным эксплуатационным требованиям и расчетным допускам. Несоответствие этим требованиям может привести элементы к критическому состоянию (ГОСТ 27751-2014).

Согласно анализу более 400 случаев разрушения стальных конструкций, при статическом нагружении потеря устойчивости элементов преобладает среди всех видов разрушений, в то время как усталостные повреждения составляют лишь около 10% [1]. Такое положение требует пристального внимания к этой проблеме, поскольку многообразие постановок, упрощений и методов решения нелинейных задач, краевых задач расчета конструкций, с учетом одного или одновременно нескольких видов подходов, критериев, и методов решения задач устойчивости усложняет процесс исследований.

Для обеспечения надежности и безопасности конструкции при проведении расчетов на основе математической модели, необходимо, чтобы изменения характеристик элементов оказывали лишь минимальное влияние на их напряженно-деформированное состояние [2]. Если это условие не соблюдается, возможны аварийные ситуации или даже техногенные катастрофы. Таким образом, ключевым аспектом безопасной эксплуатации конструкций на этапе математического моделирования является непрерывность решения от начальных параметров [2]. Нарушение этой непрерывности способно вызывать потерю устойчивости (первая группа предельных состояний) или чрезмерные деформации, отклонения и сбои в работе системы (вторая группа предельных состояний) [3-5].

В настоящее время разработаны различные методы изучения предельных состояний различных конструкций на основе моделей теории упругости [6-7]. В работе [7] приведены возможные формулировки проблем, приводящих к потере устойчивости. Дается методика определения группы предельного состояния тонкостенных систем по условию потери устойчивости равновесных форм. Показано, что для однозначного определения состояния следует указать «природу» критических точек, от которой зависит характер послекритического деформирования конструкции. Исследования предельных состояний различных элементов при потере устойчивости активно ведутся. Например, в работе [8] рассматривается взаимосвязь между потерей устойчивости и предельным состоянием несущей способности для замкнутых тонкостенных композитных конструкций, подвергаемых осевому сжатию. Обзорная статья [9] посвящена современным достижениям в анализе тонких упругих структур, теряющих устойчивость субкритически (без устойчивого закритического состояния), что напрямую связано с наступлением предельного состояния сразу после бифуркации. В работе [10] показано, что именно потеря устойчивости определяет предельное состояние при оценке прочности и устойчивости конструкций при комбинированном нагружении.

Особое внимание уделяется одной из простейших моделей – упругой полосе. В работе [11] анализируется устойчивость естественно изогнутых, несжимаемых упругих полос вследствие собственной геометрии и внешних связей. В работе [12] исследуется модель фон Кармана для бесконечной упругой полосы на линейном упругом основании типа Винклера.

В российской научной школе значительный вклад в теорию устойчивости внесли работы В.В. Новожилова [13], заложившие основы нелинейной теории упругости и устойчивости деформируемых систем. В них приведено обоснование учета углов поворота в уравнениях равновесия, что соответствует физически более полной модели, при проведении исследований, связанных с устойчивостью состояния.

Несмотря на большое количество работ теоретического и экспериментального характера, проблема исследования предельных состояний ни в теоретическом, ни в практическом отношениях полностью еще не решена, и она остается привлекательной, сложной и актуальной проблемой.

Рассмотрим упругую полосу с неоднородными характеристиками материала и неидеальными поверхностями, подверженную сжатию усилиями, приложенными по контуру поперечного сечения.

Постановка задачи

В качестве математической модели, описывающей напряжённое состояние полосы из несжимаемого материала, примем следующую задачу [10-11, 13]

$$\frac{\partial(\sigma_x - \omega\tau)}{\partial x} + \frac{\partial(\tau - \omega\sigma_y)}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial(\tau + \omega\sigma_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\sigma_y + \omega\tau)}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \quad \omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (1)$$

$$\sigma_x - \sigma_y = 4G \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \tau = G \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right),$$

$$\sigma_y|_{y=g_1(x)} = -p_y, \quad \sigma_y|_{y=g_2(x)} = -p_y,$$

$$\sigma_x|_{x=q_1(y)} = -p_x, \quad \sigma_x|_{x=q_2(y)} = -p_x. \quad (2)$$

Здесь $G(x, y) = G_0 + G_1(x, y)$, далее будем обозначать эту функцию как G ; $G_0 = \text{const}$ – соответствует модулю сдвига однородного материала, а $G_1(x, y)$ описывает изменение физических свойств полосы в процессе эксплуатации; u, v – компоненты вектора перемещений по осям x и y соответственно; σ_x, σ_y – нормальные компоненты тензора напряжений; τ – касательный компонент тензора напряжений; ω – малый угол поворота нормали к срединной поверхности; p_x, p_y – внешние сжимающие усилия, приложенных по контуру. Декартова система координат Oxy вязана с геометрическим центром поперечного сечения полосы в недеформированном состоянии. Ось Ox направлена вдоль высоты сечения, а ось Oy – вдоль его длины.

Функции $q_1(y)$ и $q_2(y)$ характеризуют правую и левую границу поперечного сечения полосы после деформирования, а $g_1(x)$ и $g_2(x)$ верхнюю и нижнюю кромки соответственно. В ненагруженном состоянии контур поперечного сечения описывается функциями $f_1, \dots, f_4$ следующим образом

$$f_1(y) = -l - f_1^{(0)}(y), \quad f_2(y) = l + f_2^{(0)}(y),$$

$$f_3(x) = -h - f_3^{(0)}(x), \quad f_4(x) = h + f_4^{(0)}(x), \quad (3)$$

где $f_i^{(0)}, i=1, \dots, 4$ – описывают отклонение границ от прямолинейной формы; l, h – полуширина и полувысота поперечного сечения полосы в недеформированном состоянии.

Если пренебречь несовершенствами, т.е. $f_i^{(0)} = 0, i=1, \dots, 4$, то задача (1)-(3) допускает решение [14, 15], описывающее однородное состояние:

$$\sigma_x = \sigma_x^0 = -p_x; \quad \sigma_y = \sigma_y^0 = -p_y; \quad \tau = \tau^0 = 0,$$

$$v = v^0 = \epsilon_y^0 y; \quad u = u^0 = \epsilon_x^0 x; \quad \omega = \omega^0 = 0, \quad (4)$$

где константы из (4) $\epsilon_y^0, \epsilon_x^0$ определяются следующими соотношениями

$$\epsilon_y^0 = \frac{p_x - p_y}{4G}, \quad \epsilon_x^0 = -\epsilon_y^0, \quad (5)$$

а $\sigma_x^0, \sigma_y^0, \tau^0, \omega^0, v^0, u^0$ – решение из [14].

Однородное напряженное состояние позволяет провести анализ конструкции с экономической точки зрения: добиться оптимальной формы при минимальном расходе материала. Кроме этого, легче рассчитать момент разрушения. Учитывая этот факт, в качестве исследуемого состояния выбрано это решение. Используя данный подход можно провести изучение другого решения, отличного от (4), нелинейной задачи (1)-(2).

В процессе эксплуатации происходят незначительные изменения геометрических размеров и физических свойств материала. Проанализируем, насколько эти изменения могут повлиять на напряженно-деформированное состояние полосы, описываемое (2), т.е. проведем исследование непрерывной зависимости решения задачи (1) от исходных данных при $G_1(x, y) = 0, f_i^{(0)} = 0, i=1, \dots, 4$.

Исследование непрерывной зависимости

Для исследования проблемы непрерывной зависимости, как следует из [10, 11], следует рассмотреть вспомогательную линеаризованную однородную задачу относительно функций $\zeta_i, i = 1, \dots, 6$, которая получена на основе (1)-(4). При

$$\sigma_x = \sigma_0 + \zeta_1; \quad \omega = \omega_0 + \zeta_2; \quad \sigma_y = \sigma_0 + \zeta_3; \quad \tau = \tau_0 + \zeta_4; \quad u = u_0 + \zeta_5; \quad v = v_0 + \zeta_6$$

получаем следующую систему уравнений, введя замену $\alpha_x = \frac{p_x}{2G}$, $\alpha_y = \frac{p_y}{2G}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} + \frac{\partial \zeta_3}{\partial y} + 2\alpha_y \frac{\partial \zeta_2}{\partial y} &= 0; \quad \frac{\partial \zeta_3}{\partial x} + \frac{\partial \zeta_4}{\partial y} - 2\alpha_x \frac{\partial \zeta_2}{\partial x} = 0; \\ \frac{\partial \zeta_5}{\partial x} + \frac{\partial \zeta_6}{\partial y} &= 0; \quad \zeta_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \zeta_6}{\partial x} - \frac{\partial \zeta_5}{\partial y} \right); \\ \zeta_1 - \zeta_4 &= 4 \frac{\partial \zeta_5}{\partial x}; \quad \zeta_3 = \frac{\partial \zeta_5}{\partial y} + \frac{\partial \zeta_6}{\partial x} \end{aligned} \quad (6)$$

с граничными условиями:

$$\begin{aligned} \zeta_4 = 2\alpha_x \frac{d\zeta_6}{dx} + \zeta_3 &= 0, \quad \text{при } y = -h(1 + \varepsilon_y^0) \text{ и } y = h(1 + \varepsilon_y^0), \\ \zeta_3 + 2\alpha_y \frac{d\zeta_5}{dy} = \zeta_1 &= 0, \quad \text{при } x = -l(1 + \varepsilon_x^0) \text{ и } x = l(1 + \varepsilon_x^0). \end{aligned} \quad (7)$$

Чтобы решение задачи (1)-(3) непрерывно зависело от исходных данных, необходимо [15], чтобы задача (6)-(7) была регулярной, ее первые производные были непрерывны по всем своим аргументам, а также она имела только тривиальное решение. Группа условий, касающаяся регулярности и непрерывности в этой задаче выполняется. Проанализируем существование только тривиального решения.

Следуя [16], положим

$$\zeta_5 = \frac{\partial \Phi}{\partial y}; \quad \zeta_6 = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad (8)$$

где $\Phi(x, y)$ – функция напряжений, связывающая возмущения перемещений.

Используя выражения (9), имеем уравнения для определения $\Phi(x, y)$:

$$(1 - \alpha_y) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} + (2 - \alpha_x - \alpha_y) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + (1 - \alpha_x) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} = 0. \quad (9)$$

Для анализа структуры общего решения представим решение в виде $\Phi(x, y) = e^{s \cdot x + \lambda \cdot y}$, где s, λ – показатели экспоненциального решения, что приводит (9) к следующему уравнению:

$$(1 - \alpha_y) \lambda^4 + (2 - \alpha_x - \alpha_y) s^2 \lambda^2 + (1 - \alpha_x) s^4 = 0. \quad (10)$$

Рассмотрим свойства корней данного уравнения относительно параметра разделения. Поскольку предполагается, что деформации малы, то $0 \leq \alpha_y \leq 1$, $0 \leq \alpha_x \leq 1$, получаем, что все коэффициенты строго положительны. Анализ дискриминанта полученного уравнения показывает, что корни для квадрата параметра разделения λ^2 являются вещественными и отрицательными при вещественном s . Таким образом, структура коэффициентов исходного уравнения исключает возможность существования решений чисто тригонометрического вида (по обоим переменным) или чисто экспоненциального вида. Единственно возможной формой общего решения является смешанная форма, представляющая собой произведение тригонометрической переменной по одной координате и экспоненциальной функции по другой. Если подставить смешанную форму решения в граничные условия (7), то получение условия нетривиальности решения задачи (6)-(7) в аналитическом виде весьма проблематично. Воспользуемся численным подходом для построения границы области непрерывной зависимости.

Использование сингулярного разложения для диагностики вырожденности

Для численной реализации модели фон Кармана на нерегулярной сетке применён метод обобщённых конечных разностей на основе сингулярного разложения (SVD-GFD) [17], обеспечивающий устойчивость аппроксимации вблизи деформированных границ. Из этой работы берём три ключевых элемента. Во-первых, построение локальной «звезды» из ближайших узлов с весами, обратно пропорциональными квадрату расстояния, что обеспечивает второй порядок точности. Во-вторых, аппроксимацию производных через взвешенный метод наименьших квадратов с использованием разложения в ряд Тейлора до второго порядка. В-третьих, регуляризацию локальной системы посредством усечённого сингулярного разложения – Truncated SVD (TSVD), модификации классического SVD, в которой преднамеренно отбрасываются наименьшие сингулярные числа, ответственные за усиление численных шумов. Как показано в [17], именно применение TSVD позволяет получать устойчивые коэффициенты аппроксимации даже при плохой обусловленности локальной матрицы, что особенно критично вблизи деформированных границ и угловых точек.

Для каждого узла сетки с координатами (x_0, y_0) формируется множество $S(x_0)$ из m ближайших узлов. Радиус поиска динамически увеличивается (уровни от 2 до 10) до тех пор, пока не наберётся не менее 13 узлов, как рекомендовано в [17] для достижения второго порядка точности. Вес k -го узла «звезды» с координатами (x_k, y_k) задаётся следующим образом:

$$w_k = r_k^{-2}; \quad r_k = \sqrt{(x_k - x_0)^2 + (y_k - y_0)^2}; \quad k=1, \dots, m,$$

где m – количество ближайших узлов.

Выбор весовой функции w_k обусловлен следующими факторами. Обратно-квадратичное затухание соответствует асимптотике фундаментальных решений двумерных эллиптических операторов, что обеспечивает физически корректное распределение влияния соседних узлов. Данная весовая функция гарантирует доминирование ближайших соседей в задаче взвешенного МНК, что критично для устойчивости локальной аппроксимации на нерегулярных сетках. В сочетании с квадратичным базисом Тейлора и $m \geq 13$ узлами она строго обеспечивает второй порядок точности аппроксимации производных [17].

Функция ζ (любая из $\zeta_1 \dots \zeta_6$) раскладывается в ряд Тейлора в окрестности (x_0, y_0) с удержанием членов до второго порядка:

$$\zeta(x_k, y_k) \approx \zeta_0 + \Delta x_k \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \Delta y_k \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{(\Delta x_k)^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \Delta x_k \Delta y_k \cdot \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} + \frac{(\Delta y_k)^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2},$$

$$\zeta_0 = \zeta(x_0, y_0), \quad \Delta x_k = x_k - x_0, \quad \Delta y_k = y_k - y_0.$$

Для всех m узлов это даёт переопределённую систему,

$$P \cdot D = \Delta \zeta,$$

$$P_k = \sqrt{w_k} \left[\Delta x_k, \Delta y_k, \frac{(\Delta x_k)^2}{2}, \Delta x_k \Delta y_k, \frac{(\Delta y_k)^2}{2} \right], \quad (11)$$

где $P \in R^{m \times 5}$ – матрица геометрических коэффициентов, составленная из взвешенных мономов Тейлора; $D \in R^5$ – вектор неизвестных производных

$$D = \left[\frac{\partial \zeta}{\partial x}, \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y}, \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right]^T,$$

$\Delta \zeta \in R^m$ – вектор взвешенных разностей и значений функции,

$$\Delta \zeta = [w_1(\zeta_1 - \zeta_0), \dots, w_m(\zeta_m - \zeta_0)]^T, \quad w_k(r_k) = r_k^{-2}.$$

Для регуляризации локальной переопределённой системы (11) вместо неустойчивого обращения через нормальные уравнения применяется метод усечённого сингулярного разложения (TSVD) адаптированный из [14]. Вычисляется сингулярное разложение матрицы: $P = U \Sigma V^T$, где $\Sigma = \text{diag}(\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_5)$ и $\delta_1 \geq \dots \geq \delta_5 \geq 0$; $U \in R^{m \times 5}$ – ортогональная матрица левых сингулярных векторов ($U^T U = I_5$, где I_5 – единичная матрица порядка 5); $V \in R^{5 \times 5}$ – ортогональная матрица правых сингулярных векторов ($V^T V = I_5$).

Сингулярные числа $\delta_i \in R, i=1,...,5$ характеризуют степень обусловленности локальной задачи: малые значения δ_i соответствуют направлениям, чувствительным к численному шуму. Для построения устойчивого решения вводится относительный порог отсечения $\epsilon_{loc} = \delta_{min}^{thr} \cdot \delta_1$. В данной работе порог δ_{min}^{thr} был взят равным 10^{-6} (рекомендованный порядок величины для задач с плохой обусловленностью [12]).

Псевдообратная матрица P^+ строится как: $P^+ = V\Sigma^+U^T$, где

$$\begin{aligned} \Sigma^+ &= \text{diag}(\delta_1^+, \dots, \delta_5^+), \\ \delta_i^+ &= \begin{cases} 1/\delta_i, & \delta_i > \epsilon_{loc}, i=1, \dots, 5, \\ 0, & \delta_i \leq \epsilon_{loc}. \end{cases} \end{aligned} \quad (12)$$

Первые две строки полученной матрицы P^+ содержат искомые весовые коэффициенты $w_{x,k}$ и $w_{y,k}$ для аппроксимации частных производных:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} \approx \sum_{k=1}^m w_{x,k} \cdot \zeta(x_k, y_k), \quad \frac{\partial \zeta}{\partial y} \approx \sum_{k=1}^m w_{y,k} \cdot \zeta(x_k, y_k).$$

Используя полученные коэффициенты $w_{x,k}$, $w_{y,k}$ для каждого узла, мы дискретизируем систему (6)-(7). Дискретизация внутренней области для каждого узла (x_0, y_0) даёт 6 уравнений:

$$\begin{aligned} \sum w_{x,k} \zeta_{1,k} + \sum w_{y,k} \zeta_{3,k} + 2\alpha_y \sum w_{y,k} \zeta_{2,k} &= 0, \\ \sum w_{x,k} \zeta_{3,k} + \sum w_{y,k} \zeta_{4,k} - 2\alpha_x \sum w_{x,k} \zeta_{2,k} &= 0, \\ \sum w_{x,k} \zeta_{5,k} + \sum w_{y,k} \zeta_{6,k} &= 0, \\ \zeta_{2,0} - \frac{1}{2} \sum w_{x,k} \zeta_{6,k} + \frac{1}{2} \sum w_{y,k} \zeta_{5,k} &= 0, \\ \frac{1}{4} \zeta_{1,0} - \frac{1}{4} \zeta_{4,0} - \sum w_{x,k} \zeta_{5,k} &= 0, \\ \zeta_{3,0} - \sum w_{y,k} \zeta_{5,k} - \sum w_{x,k} \zeta_{6,k} &= 0, \end{aligned} \quad (13)$$

где $\zeta_{i,k}$, $i=1,...,6$ – компоненты ζ_i для k -й звезды.

Здесь все суммы берутся по узлам «звезды», а индексы 0 и k обозначают значения в центральном и соседних узлах соответственно.

Граничные условия добавляются отдельными строками. На нижней и верхней гранях для каждого узла $y = \pm h(1 + \epsilon_y^0)$ грани задаются условия $\zeta_4 = 0$ и $\zeta_5 = 0$. На левой и правой гранях $x = \pm l(1 + \epsilon_x^0)$ для каждого узла ставится $\zeta_1 = 0$, а для не угловых узлов (исключая $j=1, j=N_y$) добавляется смешанное условие $\zeta_3 + 2\alpha_y \frac{d\zeta_5}{dy} = 0$, которое аппроксимируется как $\zeta_{3,k}(x_0) - \sum w_{y,k} \zeta_{5,k} - \sum w_{x,k} \zeta_{6,k} = 0$. В угловых узлах (пересечение границ) смешанное условие опускается, остаются только условия Дирихле, что соответствует физическому закреплению углов и стандартной практике [17, 18].

Принципиальная схема дискретизации (локальная «звезда», весовая функция $w_k = r_k^{-2}$, TSVD-регуляризация) полностью соответствует методологии SVD-GFD, разработанной для задач с деформируемыми и подвижными границами [17]. Диагностика потери единственности решения через минимальное значимое сингулярное число глобальной матрицы опирается на классическую теорию численного ранга и регуляризации некорректных задач и ранее успешно применялась для анализа устойчивости матриц схем в задачах линейной упругости [18].

Хотя метод SVD-GFD разработан для работы на нерегулярных сетках, в данной постановке геометрическая деформация области учитывается через аффинное

масштабирование координат в соответствии с граничными условиями (7). Поэтому в расчётах используется регулярная прямоугольная сетка 35×35 . При этом весовые коэффициенты $w_k = r_k^{-2}$ автоматически учитывают физические расстояния от центрального узла до деформированных границ, что сохраняет второй порядок точности и численную устойчивость схемы без необходимости генерации криволинейного или полностью нерегулярного облака узлов.

Однородные условия Дирихле реализуются заменой соответствующих строк глобальной матрицы на единичные, что в однородной системе эквивалентно прямому занулению граничных неизвестных. Смешанные условия аппроксимируются через взвешенные разности значений в узлах «звезды» и добавляются отдельными строками для неугловых граничных узлов. Угловые узлы подчиняются только условиям Дирихле.

Одной из основных характеристик расчётной является: N_x, N_y – число узлов расчетной сетки по осям Ox и Oy соответственно. В итоге получается прямоугольная матрица размера $M \times N$, где $N = 6N_x N_y$ – число неизвестных (значения всех функций во всех узлах), а $M = 6N_x N_y + 4N_x N_y$ – число уравнений. Поскольку $M > N$, то система переопределена.

Для анализа вырожденности вычисляем сингулярные числа получившейся разностной схемы:

$$K = U \Sigma V^n, \quad \Sigma = \text{diag}(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_N), \quad \delta_1 \geq \delta_2 \geq \dots \geq \delta_N \geq 0, \quad (14)$$

где $\delta_i \in R, i = 1, \dots, N$ – сингулярные числа, полученные путём сингулярного разложения итоговой разностной схемы.

Для вычисления сингулярного спектра используется полное сингулярное разложение плотной матрицы K (алгоритмы на базе LAPACK). Вычислительные затраты ограничивают размер сетки значением $N_x = N_y = 35$ ($N = 7350$ неизвестных). Для больших сеток требуется применение разреженных форматов или итерационных методов (ARPACK) [19], что выходит за рамки данной работы.

В теоретически полной ранговой переопределённой системе минимальное сингулярное число строго положительно. Однако на практике из-за погрешности аппроксимации производных и ошибок округления спектр содержит «шумовой хвост» из значений, близких к машинному нулю. Прямое использование $\delta_{\min} = \min\{\delta_i\}$ неинформативно, поэтому для отделения физической вырожденности от численного шума применяется относительный порог.

Для отделения численного шума от физической вырожденности вводится порог $\varepsilon_{\text{global}} = 10^{-11}$. Наименьшее значимое сингулярное число определяется как

$$\delta_{\min}^+ = \min\{\delta_i \mid \delta_i > \varepsilon_{\text{global}} \cdot \delta_1\}, i = 1..5, \quad (15)$$

что соответствует стандартной процедуре оценки численного ранга [15].

Обоснование использования $\delta_{\min}^+$ вместо минимального сингулярного числа: в переопределённой системе минимум всегда равен нулю (или машинному нулю), что неинформативно. Относительный порог $\varepsilon_{\text{global}} \cdot \delta_1$ позволяет отделить «информативные» компоненты от шумовых, что является стандартным приёмом при определении численного ранга матрицы [18]. Применение SVD для анализа вырожденности в задачах теории упругости уже успешно демонстрировалось в работе [18], где авторы использовали сингулярные числа для регуляризации метода граничных элементов и метода фундаментальных решений.

Число обусловленности определяется как $\kappa = \frac{\delta_1}{\delta_{\min}^+}$. Этот критерий широко используется

в линейной алгебре [18] для оценки близости матрицы к вырожденной. В нашем исследовании система считается практически вырожденной, если $\kappa \leq \kappa_{\text{crit}}$. Пороговое значение κ_{crit} определяется верификацией: численная граница потери непрерывной

зависимости совмещается с аналитической кривой из [3]. Полученное значение фиксируется и используется для всех последующих расчётов, что обеспечивает согласованность численного показателя обусловленности с физической бифуркацией решения. Данный подход соответствует стандартной практике определения численного ранга и калибровки порогов по тестовым задачам [3].

В отличие от [17], где SVD применяется для решения обратных задач (восстановление граничных условий) и требуется регуляризация решения, мы используем сингулярные числа исключительно для диагностики вырожденности. Это позволяет не решать систему и не вычислять само поле $\zeta(x,y)$, а ограничиться анализом матрицы K . И в отличие от [17], мы адаптировали метод к системе уравнений линейной теории упругости и к смешанным граничным условиям. Принципиальная схема («звезда») сохранена, что обеспечивает второй порядок точности и устойчивость.

Для проверки справедливости выбранного подхода проведено сравнение с аналитическим результатом из [3]. На рисунке 1 для различных соотношений размеров поперечного сечения полосы, на плоскости параметров (α_x, α_y) показана критическая граница, при пересечении которой решение (4) перестаёт приближенно описывать напряжённо-деформированное состояние рассматриваемой полосы.

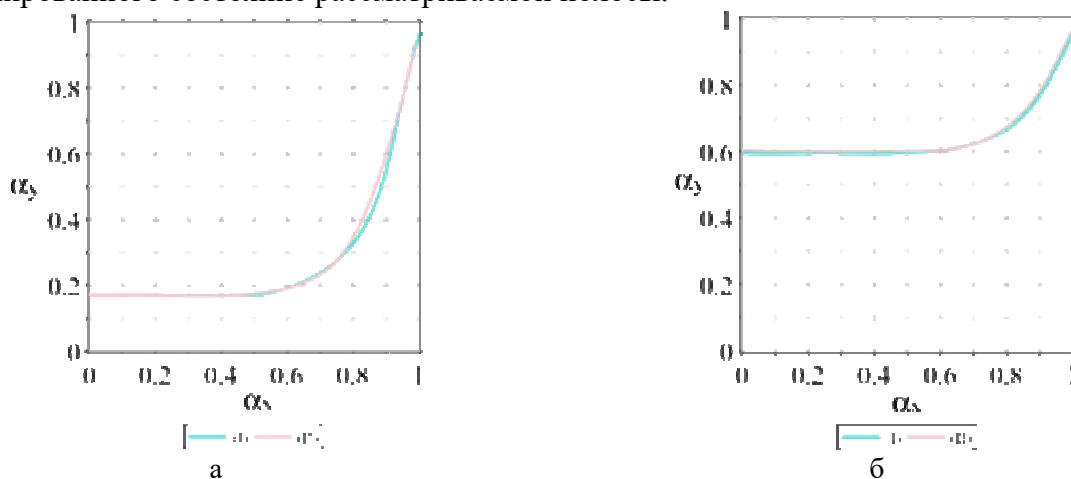


Рис. 1. Область непрерывной зависимости для различных размеров поперечного сечения полосы ((I) отображена кривая, построенная численным методом, а (II) – с помощью аналитического решения из [19]): а) $l/h = 0,5$; б) $l/h = 2$

Поскольку модель (1)-(3) основана на упругих допущениях, то критическая граница построена исключительно в пределах упругой области.

Построение области непрерывной зависимости для различных размеров поперечного сечения полосы

Воспользуемся этим методом для получения границы для анализа решения задачи (1)-(2), в пределах которой решение (4) будет приближенно описывать состояние неоднородной полосы при сжатии.

На рисунках 2-4 на плоскости параметров сжимающих усилий построены области для различных размеров поперечного сечения полосы.

При достижении параметрами нагрузки значений, соответствующим этим линиям, напряжения и деформации, возникающие в реальной полосе, уже не будут соответствовать расчетным значениям, полученным на основе (4). Таким образом, однородное состояние (4) станет предельным в рассматриваемом случае.

Если необходимо проанализировать влияние геометрических параметров на область непрерывной зависимости, то можно рассмотреть различные сечения поверхности, полученной на основе условий непрерывной зависимости, задавая нужные значения параметров нагрузок.

Для многих материалов, у которых $3\sigma_{\text{упр}}/2E \ll 1$, где $\sigma_{\text{упр}}$ – предел упругости для рассматриваемого материала, а E – модуль Юнга, область упругости весьма мала, и граница непрерывной зависимости находится выше нее. Получаем, что решение (4) будет приближенно описывать состояние полосы при любых значениях исходных данных, соответствующих упругой области. Но в этом случае диапазон изменения параметров сжимающих усилий весьма мал, поэтому, в подобных случаях можно использовать другое решение задачи (1), а не (4). Или же применять математическую модель, учитывающую более высокие порядки нелинейности, либо перейти к подходам, основанным на теории пластичности.

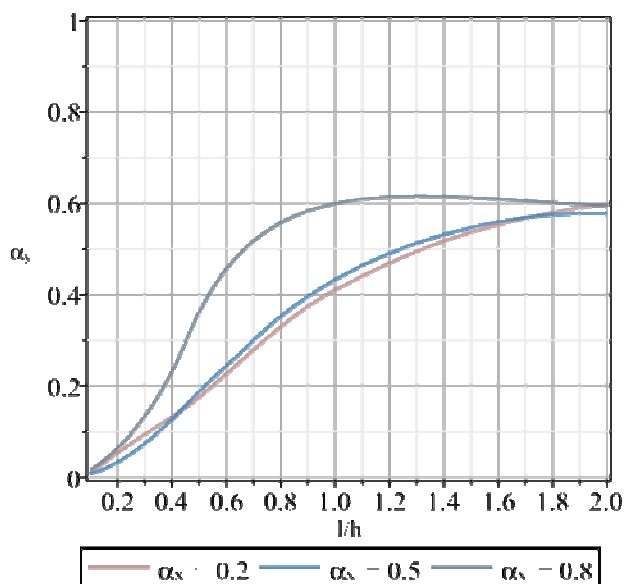


Рис. 3. Область непрерывной зависимости для различных размеров поперечного сечения полосы для разных сечений α_x

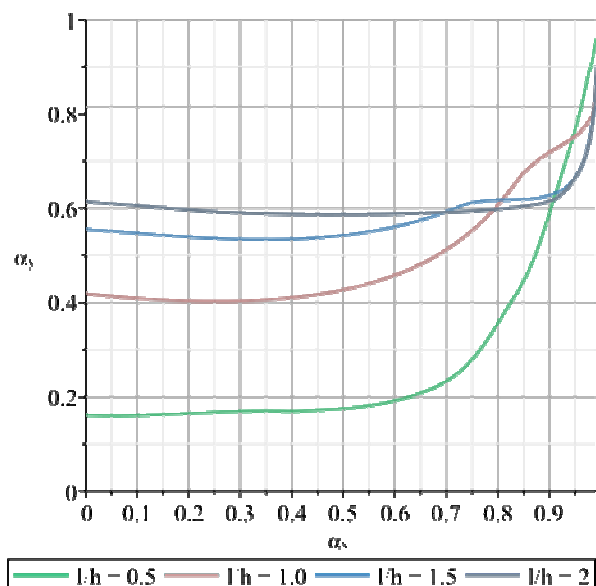


Рис. 2. Область непрерывной зависимости для различных размеров поперечного сечения полосы

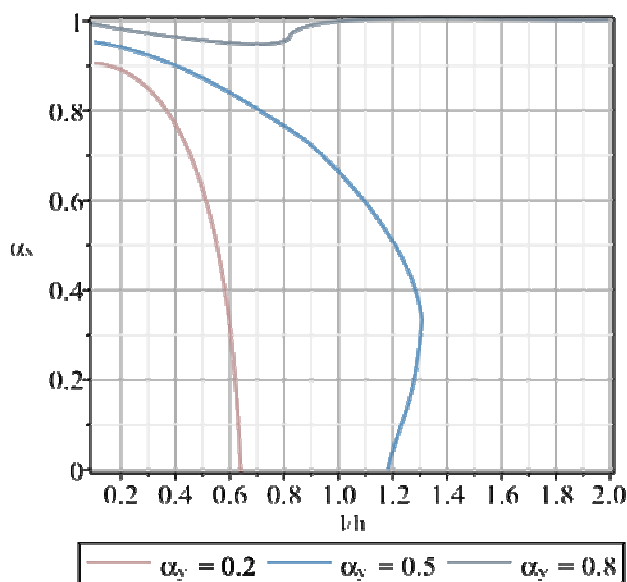


Рис. 4. Область непрерывной зависимости для различных размеров поперечного сечения полосы для разных сечений α_y

Заключение

Таким образом, когда исходные параметры достигают значений, при которых вспомогательная задача (6)-(7) допускает ненулевое решение, решение рассматриваемой задачи теряет свою непрерывную зависимость. В итоге может произойти потеря устойчивости равновесной формы, появиться значительные перемещения, прогибы или углы поворота, что приведет систему к предельному состоянию. В частности, в рассматриваемом случае происходит потеря устойчивости равновесной формы (4), и состояние полосы, соответствующее (4) станет предельным. Используя данный подход можно провести изучение другого решения нелинейной задачи (1)-(2). Полученные результаты следует учитывать при проектировании различных конструкций, при анализе соответствия установленным эксплуатационным требованиям и расчетным допускам.

Список литературы

1. Alpsten G. Causes of structural failures with steel structures // IABSE Symposium Helsinki 2017: Safety, Failures and Robustness of Large Structures: Conference proceedings. – Helsinki: IABSE, 2017. – P. 100-108. – doi.org/10.2749/helsinki.2017.100.
2. Arrayago I., Rasmussen K.J.R. Influence of the imperfection direction on the ultimate response of steel frames in advanced analysis // Journal of Constructional Steel Research. 2022, vol. 190, pp. 107137. doi.org/10.1016/j.jcsr.2022.107137.
3. Ковалев А.В., Коротков М.М., Минаева Н.В., Шашкин А.И. Анализ математических моделей, используемых при исследовании предельного состояния упругой неоднородной полосы при сжатии // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2025. – №2(64). – С. 185-197. – doi.org/10.37972/chgpu.2025.64.2.011.
4. Морозов Н.Ф., Лукин А.В., Попов И.А. Ветвление форм равновесия кольцевой микропластинки в электростатическом поле двух электродов // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2024. – №1. – С. 110-132. – doi.org/10.31857/S1026351924010063.
5. Охлопков Н.Л., Нигоматулин Ф.В. Решение задачи бифуркации для цилиндрической оболочки при сложном нагружении // Вестник Тверского государственного технического университета. Серия: Технические науки. – 2014. – Т. 8, №2-4. – С. 52-56. – doi.org/10.17816/2074-0530-67428.
6. Баженов В.Г., Гоник Е.Г., Кибец А.И., Шошин Д.В. Устойчивость и предельные состояния упругопластических сферических оболочек при статических и динамических нагружениях // Прикладная механика и техническая физика. – 2014. – Т. 55, № 1. – С. 13-22. – doi.org/10.1134/S0021894414010027.
7. Гусейнова С.В., Дибиргаджиев А.М., Муртазалиев Г.М. Возможные постановки задач потери устойчивости конструкций // Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. – 2014. – №35(4). – С. 113-118. – doi.org/10.21822/2073-6185-2014-35-4-113-118.
8. Różyło P. Limit states of thin-walled composite structures with closed sections under axial compression // Composites Part B: Engineering. 2024, vol. 287, p. 111813. doi.org/10.1016/j.compositesb.2024.111813.
9. Champneys A.R., Budd C.J., Healey T.J., Knobloch E., Vanderbauwhede A. Happy Catastrophe: Recent Progress in Analysis and Exploitation of Elastic Instability // Frontiers in Applied Mathematics and Statistics. 2019, vol. 5, p. 34. doi.org/10.3389/fams.2019.00034.
10. Ngoc V. P., Gridnev S. Y., Van Tran Thi T., Minaeva N. V., Korotkov M. M. Limit State of Elastic Strip Under Combined Loading // Lecture Notes in Civil Engineering. 2025, vol. 747, pp. 931-939. doi.org/10.1007/978-3-032-04645-1_108.
11. Audoly B., Seffen K.A. Buckling of Naturally Curved Elastic Strips: The Ribbon Model Revisited // Journal of Elasticity. 2015, vol. 119, pp. 293-320. doi.org/10.1007/s10659-015-9520-y.
12. Borisovich A., Dymkowska J., Szymczak C. Buckling and postcritical behaviour of the elastic infinite plate strip resting on linear elastic foundation // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2005, vol. 307, iss. 2, pp. 480-495. doi.org/10.1016/j.jmaa.2004.11.030.
13. Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. – М.: УРСС, 2003. – 211 с.
14. Надольский В.В. Несовершенства для расчета стальных конструкций методом конечных элементов. Часть 1 // Строительство и реконструкция. – 2024. – №2. – С. 28-38. – doi.org/10.33979/2073-7416-2024-112-2-28-38.
15. Гузь А.Н. Устойчивость трехмерных деформируемых тел. – Киев: Наукова думка, 1971. – 276 с.
16. Ершов Л.В., Ивлев Д.Д. Об устойчивости полосы при сжатии // Доклады Академии наук СССР. – 1961. – Т. 138, №5. – С. 1047-1049.
17. Ang S.J., Yeo K.Y., Chew C.S., Shu C. A singular value decomposition (SVD)-based generalized finite difference (GFD) method for close-interaction moving boundary flow problems // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2008, vol. 76, no. 12, pp. 1892-1929. doi.org/10.1002/nme.2398.
18. Колотовичев Ю.А. Сингулярное разложение динамической реакции зданий и сооружений на элементарные составляющие // Вестник МГСУ. – 2023. – Т. 18, №12. – С. 1880-1891. – doi.org/10.22227/1997-0935.2023.12.1880-1891.
19. Lehoucq R.B., Sorensen D.C., Yang C. ARPACK Users' Guide: Solution of Large-Scale Eigenvalue Problems with Implicitly Restarted Arnoldi Methods. – Philadelphia: SIAM, 1998. – 140 p. – doi.org/10.1137/1.9780898719628.

References

1. Alpsten G. Causes of structural failures with steel structures // IABSE Symposium Helsinki 2017: Safety, Failures and Robustness of Large Structures: Conference proceedings. – Helsinki: IABSE, 2017. – P. 100-108. – doi.org/10.2749/helsinki.2017.100.
2. Arrayago I., Rasmussen K.J.R. Influence of the imperfection direction on the ultimate response of steel frames in advanced analysis // Journal of Constructional Steel Research. 2022, vol. 190, pp. 107137. doi.org/10.1016/j.jcsr.2022.107137.
3. Kovalev A.V., Korotkov M.M., Minaeva N.V., Shashkin A.I. Analysis of mathematical models used in the study of the limit state of an elastic inhomogeneous strip under compression // Bulletin of Chuvash State Pedagogical University n.a. I.Ya. Yakovlev. Series: Mechanics of Limit State. 2025, no. 2(64), pp. 185-197. doi.org/10.37972/chgpu.2025.64.2.011.

4. Morozov N.F., Lukin A.V., Popov I.A. Bifurcation of equilibrium forms of an annular microplate in the electrostatic field of two electrodes // News of RAS. Solid mechanics. 2024, no. 1, pp. 110-132. doi.org/10.31857/S1026351924010063.
5. Okhlopkov N.L., Nigmatullin F.V. Solution of the bifurcation problem for a cylindrical shell under complex loading // Bulletin of Tver State Technical University. Series: Technical Sciences. 2014, vol. 8, no. 2-4, pp. 52-56. doi.org/10.17816/2074-0530-67428.
6. Bazhenov V.G., Gonik E.G., Kibets A.I., Shoshin D.V. Stability and limit states of elastic-plastic spherical shells under static and dynamic loading // Applied mechanics and technical physics. 2014, vol. 55, no. 1, pp. 13-22. doi.org/10.1134/S0021894414010027.
7. Guseinova S.V., Dibirgadzhiyev A.M., Murtazaliev G.M. Possible formulations of problems of loss of stability of structures // Bulletin of Dagestan State Technical University. Technical Sciences. 2014, no. 35(4), pp. 113-118. doi.org/10.21822/2073-6185-2014-35-4-113-118.
8. Różyło P. Limit states of thin-walled composite structures with closed sections under axial compression // Composites Part B: Engineering. 2024, vol. 287, p. 111813. doi.org/10.1016/j.compositesb.2024.111813.
9. Champneys A.R., Budd C.J., Healey T.J., Knobloch E., Vanderbauwhede A. Happy Catastrophe: Recent Progress in Analysis and Exploitation of Elastic Instability // Frontiers in Applied Mathematics and Statistics. 2019, vol. 5, p. 34. doi.org/10.3389/fams.2019.00034.
10. Ngoc V. P., Gridnev S. Y., Van Tran Thi T., Minaeva N. V., Korotkov M. M. Limit State of Elastic Strip Under Combined Loading // Lecture Notes in Civil Engineering. 2025, vol. 747, pp. 931-939. doi.org/10.1007/978-3-032-04645-1_108.
11. Audoly B., Seffen K.A. Buckling of Naturally Curved Elastic Strips: The Ribbon Model Revisited // Journal of Elasticity. 2015, vol. 119, pp. 293-320. doi.org/10.1007/s10659-015-9520-y.
12. Borisovich A., Dymkowska J., Szymczak C. Buckling and postcritical behaviour of the elastic infinite plate strip resting on linear elastic foundation // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2005, vol. 307, iss. 2, pp. 480-495. doi.org/10.1016/j.jmaa.2004.11.030.
13. Novozhilov V.V. Fundamentals of the nonlinear theory of elasticity – M.: URSS, 2003. – 211 p.
14. Nadolskii V.V. Imperfections for the calculation of steel structures by the finite element method. Part 1 // Construction and reconstruction. 2024, no. 2, pp. 28-38. doi.org/10.33979/2073-7416-2024-112-2-28-38.
15. Guz A.N. Stability of three-dimensional deformable solids – Kiev: Naukova dumka, 1971. – 276 p.
16. Tran Thi T.V., Nguyen T.D., Pham T.H., Le M.T. Study on Stability for Compressive Elastic-Fixed Strip // Civil Engineering and Architecture. 2025, vol. 13, no. 3, pp. 1509–1516.
17. Ang S.J., Yeo K.Y., Chew C.S., Shu C. A singular value decomposition (SVD)-based generalized finite difference (GFD) method for close-interaction moving boundary flow problems // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2008, vol. 76, no. 12, pp. 1892-1929. doi.org/10.1002/nme.2398.
18. Kolotovich Yu.A. Singular decomposition of the dynamic response of buildings and structures into elementary components // Bulletin of MGSU. 2023, vol. 18, no. 12, pp. 1880-1891. doi.org/10.22227/1997-0935.2023.12.1880-1891.
19. Lehoucq R.B., Sorensen D.C., Yang C. ARPACK Users' Guide: Solution of Large-Scale Eigenvalue Problems with Implicitly Restarted Arnoldi Methods. – Philadelphia: SIAM, 1998. – 140 p. – doi.org/10.1137/1.9780898719628.

Сведения об авторах:

Information about authors:

Коротков Михаил Михайлович – аспирант	Korotkov Mikhail Mikhailovich – postgraduate student
mihail_korotkov97@rambler.ru	

Получена 30.04.2026