

РАЗРАБОТКА КРИТЕРИЕВ ОЦЕНКИ ДИНАМИЧЕСКОГО КАЧЕСТВА ВИБРАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ МАШИН РЕЗОНАНСНОГО ТИПА

Елисеев А.В.^{1,2}, Кузнецов Н.К.², Миронов А.С.¹

¹*Иркутский государственный университет путей сообщения, Иркутск;*

²*Иркутский национальный исследовательский технический университет, Иркутск*

Ключевые слова: вибрационно-технологическая машина, режим резонанса, механические колебательные системы, динамический гаситель, оптимизация параметров, амплитудно-частотная характеристика, вариационный метод, динамическое качество, стабилизация режима, виброизоляция.

Аннотация. Разрабатывается концепция многокритериальной оптимизации вибрационных технологических машин резонансного типа с учётом совокупности одновременных требований к характеристикам режима резонанса и виброизоляции. В качестве базовой расчётной схемы рассматривается классическая модель динамического гашения колебаний механической системы с двумя степенями свободы, образованная основной массой, пружиной и демпфирующим устройством. Используется методология структурного математического моделирования. Предложен вариационный подход к разработке критериев оптимизации динамического качества на основе коэффициента вязкого трения, позволяющий решать задачи динамического гашения, стабилизации и интенсификации резонансных режимов путём целенаправленного формирования амплитудно-частотной характеристики. Показано, что классический подход может быть обобщён в рамках метода трёх точек, обеспечивающего равенство амплитуд на инвариантных частотах и в средней точке резонансного пика. Получена новая аналитическая формула оптимального относительного демпфирования, которая обеспечивает снижение коэффициента трения по сравнению с классическим решением при сохранении пологости резонансного плато. Представлены результаты численных экспериментов, подтверждающие повышение стабильности амплитуды колебаний рабочего органа при изменении параметров нагрузки и частоты возбуждения. Разработанный подход может быть использован для проектирования вибрационных стендов, грохотов, конвейеров и питателей с улучшенными динамическими характеристиками.

DEVELOPMENT OF CRITERIA FOR ASSESSING THE DYNAMIC QUALITY OF RESONANT-TYPE VIBRATION TECHNOLOGICAL MACHINES

Eliseev A.V.^{1,2}, Kuznetsov N.K.², Mironov A.S.¹

¹*Irkutsk State Transport University, Irkutsk;*

²*Irkutsk National Research Technical University, Irkutsk*

Keywords: vibration-technological machine, resonance mode, mechanical oscillatory systems, dynamic absorber, parameter optimization, amplitude-frequency characteristic, variational method, dynamic quality, mode stabilization, vibration isolation.

Abstract. The concept of multi-criteria optimization of resonant-type vibration technological machines is being developed, taking into account the combination of simultaneous requirements for the characteristics of the resonance and vibration isolation mode. The classical model of dynamic damping of vibrations of a mechanical system with two degrees of freedom, formed by the main mass, a spring and a damping device, is considered as the basic calculation scheme. The methodology of structural mathematical modeling is used. A variational approach to the development of criteria for optimizing dynamic quality based on the coefficient of viscous friction is proposed, which makes it possible to solve the problems of dynamic damping, stabilization and intensification of resonant modes by purposefully forming an amplitude-frequency response. It is shown that the classical approach can be generalized within the framework of the three-point method, which ensures the equality of amplitudes at invariant frequencies and at the midpoint of the resonant peak. A new analytical formula for optimal relative damping has been obtained, which provides a reduction in the coefficient of friction compared to the classical solution while maintaining the flatness of the resonant plateau. The results of numerical experiments confirming an increase in the stability of the oscillation amplitude of the working body when changing the load parameters and the excitation frequency are presented. The developed approach can be used to design vibration stands, screens, conveyors and feeders with improved dynamic characteristics.

Введение. Вибрационные технологические машины (грохоты, конвейеры, питатели, машины для вибрационного уплотнения бетонной смеси) широко применяются в

промышленности, благодаря высокой энергоэффективности при работе вблизи резонанса [1, 2]. Однако в процессе эксплуатации возможны изменения параметров: частоты возмущения, массы нагрузки, жёсткости пружин, характеристик демпферов. Это может привести к срыву резонансного режима и потере работоспособности. Поэтому в ряде задач возникает необходимость обеспечения так называемого плато резонансного пика. Ширина и пологость резонансного пика повышают стабильность работы вибрационных технологических машин.

В классической работе [1] заложены теоретические основы настройки динамических гасителей, расчётные схемы которых служат основой для оценки особенностей динамических взаимодействий, носящих в целом универсальный характер в плане возможности применения для формирования динамического качества. Вопросы расширения резонансных пиков обсуждались в работе [3] и в современных исследованиях [4, 5], где рассматриваются подвеска рабочего органа и резонансная настройка с дебалансным вибровозбудителем. В последние годы активно развивается математическое моделирование резонансных вибрационных стендов, в том числе с эксцентриково-маятниковыми системами и гидравлическими связями [6, 7].

Значительный вклад в развитие теории колебаний и структурного математического моделирования внесли работы [8, 9], где предложены подходы к анализу динамического взаимодействия элементов вибрационных машин. В частности, динамическое гашение колебаний с введением дополнительных связей и рычажных взаимодействий рассмотрено в работе [10].

Вместе с тем единая теория динамического качества вибрационных машин ещё далека от своего завершения.

Настоящая статья посвящена разработке вариационного подхода, позволяющего определять оптимальные параметры системы, исходя из семейства критериев динамического качества.

I. Основные положения. Постановка задачи. Рассматривается классическая схема динамического гашения колебаний основной массы m_1 с помощью гасителя m_2 , пружины k_2 и демпфера b_2 (рис.1). Гашение колебаний массивного тела реализуется с помощью включения в систему динамического гасителя колебаний. Внешнее гармоническое возмущение Q_1 приложено к основной массе m_1 [1].

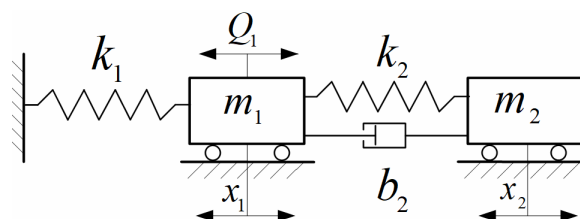


Рис. 1. Расчётная схема: m_1 – основная масса, m_2 – масса гасителя, k_1, k_2 – жёсткости, b_2 – коэффициент вязкого трения

Задача заключается в разработке метода определения параметров формирующих динамическое качество вибрационных взаимодействий технологических машин.

II. Математическая модель. Рассмотрим в качестве обобщенных координат x_2, x_1 рассмотрим смещения сосредоточенных масс m_1, m_2 относительно положения статического равновесия. Кинетическая T , потенциальная Π энергия и функция рассеивания Φ принимают вид:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2;$$

$$\Pi = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 (x_2 - x_1)^2;$$

$$\Phi = \frac{1}{2} b_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2.$$

Уравнения Лагранжа второго рода имеют вид:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 - k_2 (x_2 - x_1) - b_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = Q_1(t); \\ m_2 (\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) + k_2 (x_2 - x_1) + b_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = 0. \end{cases}$$

После преобразования Лапласа получаем структурную схему механической

колебательной системы, эквивалентной в динамическом отношении структурной схеме системы автоматического управления (рис. 2).

На основе структурной схемы могут быть определены передаточные функции системы:

$$W_1(p) = \frac{\bar{x}_1}{\bar{Q}_1} = \frac{m_2 p^2 + b_2 p + k_2}{A};$$

$$W_2(p) = \frac{\bar{x}_2}{\bar{Q}_1} = \frac{b_2 p + k_2}{A};$$

где $A = (m_1 p^2 + b_2 p + k_1 + k_2)(m_2 p^2 + b_2 p + k_2) - (k_2 + b_2 p)^2$ – характеристический многочлен.

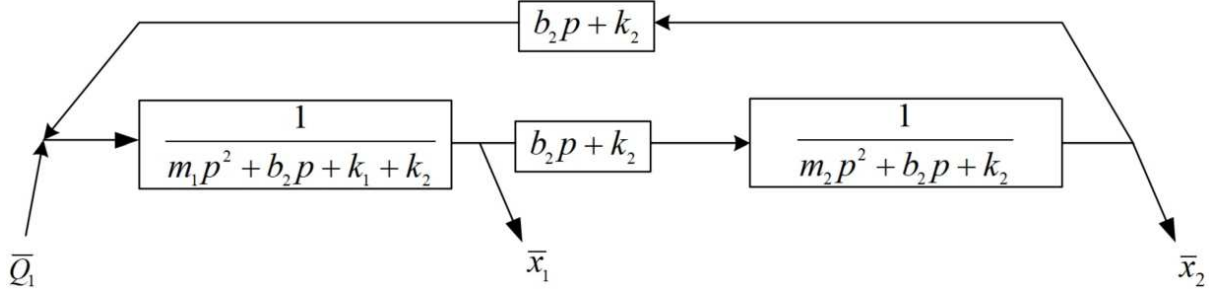


Рис. 2. Структурная схема механической колебательной системы по рисунку 1; $p = j\omega$ – комплексная переменная, $j = \sqrt{-1}$

Для оценки динамических состояний механической колебательной системы используется амплитудно-частотная характеристика A_1 . Для удобства воспользуемся приведением амплитудно-частотной характеристики к безразмерному виду.

III. Классический подход к определению оптимальных параметров демпфирования. Введём безразмерные параметры: $\mu = m_2 / m_1$, $f = \omega_a / \Omega_c$ ($\omega_a^2 = k_2 / m_2$, $\Omega_c^2 = k_1 / m_1$), $\gamma = b_2 / (2m_2\Omega_c)$, $g = \omega / \Omega_c$.

Тогда амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) основной массы:

$$A_1^2(g) = \frac{1}{k_1^2} \left| \frac{x_1}{x_{1st}} \right|^2 = \frac{(f^2 - g^2)^2 + (2\gamma g)^2}{[(1 - g^2)(f^2 - g^2) - \mu f^2 g^2] + (2\gamma g)^2 [1 - (1 + \mu)g^2]^2};$$

где $x_{1st} = Q_1 / k_1$ – статическое смещение.

При $\gamma = 0$ и $\gamma \rightarrow \infty$ амплитудно-частотные характеристики пересекаются в двух точках, частоты которых:

$$g_{1,2}^2 = \frac{1}{1 + \mu} \left(1 \pm \sqrt{\frac{\mu}{2 + \mu}} \right).$$

Условие равенства ординат этих точек даёт $f = 1/(1 + \mu)$. Оптимальный коэффициент затухания по Ден-Гартону [5]:

$$\gamma_{DG} = \sqrt{\frac{3\mu}{8(1 + \mu)^3}}.$$

Однако при $\mu > 0,3$ этот подход приводит к заметным всплескам амплитудно-частотной характеристики на интервале (g_1, g_2) .

IV. Параметрическое семейство оптимальных коэффициентов затухания. Предлагается метод определения оптимального коэффициента затухания на основе трёх известных амплитуд. Зададим отклонение ε амплитудно-частотной характеристики в средней частоте от уровня узловых точек:

$$\frac{x_1}{x_{1st}} = (1 + \varepsilon) \frac{\mu + 2}{\mu}.$$

Решение относительно γ даёт:

$$\gamma_{\varepsilon}^2 = \frac{\mu}{2(1+\mu)^3} + \frac{\varepsilon\mu(\mu+2)}{4(1+\mu)^3}.$$

При $\varepsilon = 0$ (условие «плато») получаем новую формулу оптимального демпфирования:

$$\gamma_{opt} = \sqrt{\frac{\mu}{2(1+\mu)^3}}.$$

На рисунках 3 и 4 показано сравнение амплитудно-частотных характеристик для различных μ . Предложенный метод (кривая 3) обеспечивает более пологий резонансный пик по сравнению с классическим (кривая 2).

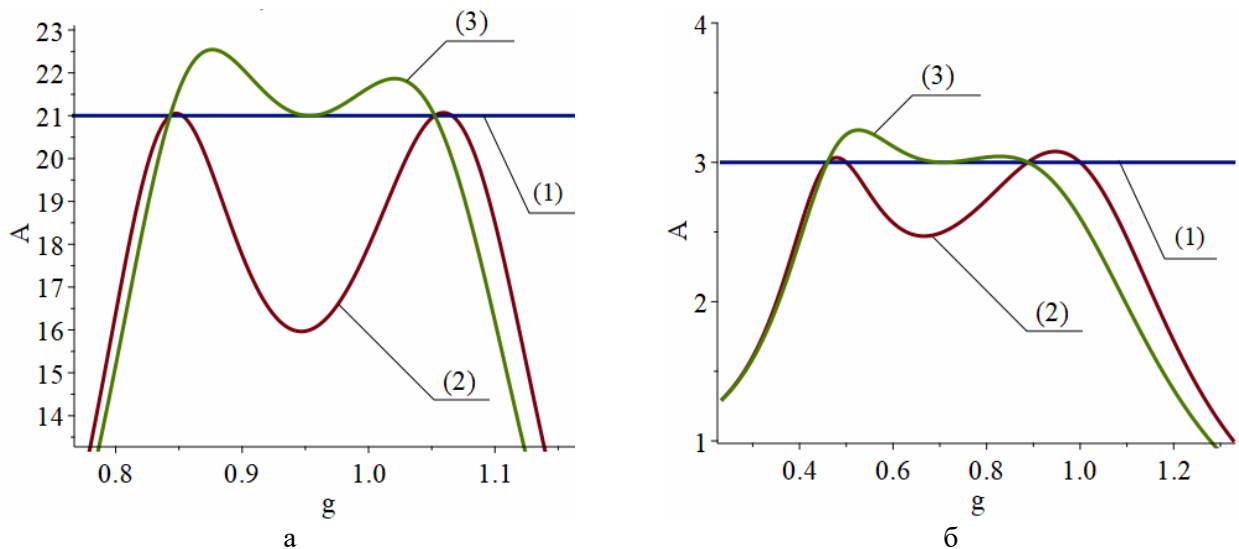


Рис. 3. Сравнение амплитудно-частотных характеристик x_1/x_{1st} для различных значений отношения масс μ для параметра $\varepsilon = 0$: кривая 1 – $(\mu+2)/\mu$; кривая 2 – $\gamma = \gamma_{DG}$ (классический метод); кривая 3 – $\gamma = \gamma_{opt}$ (предложенный метод); а – $\mu = 0,1$; б – $\mu = 1$

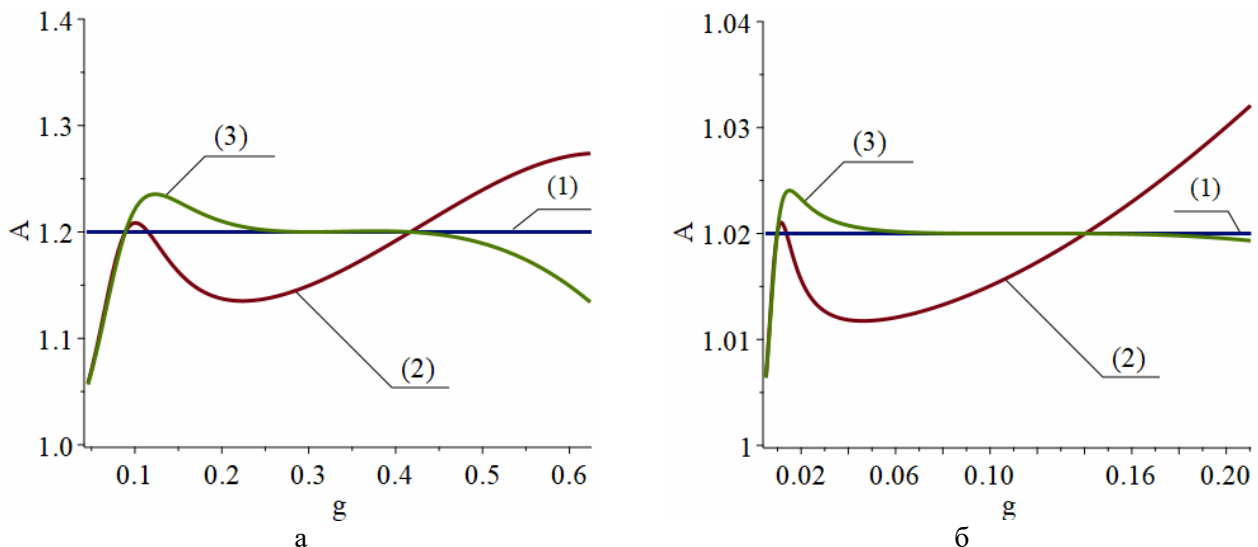


Рис. 4. Сравнение амплитудно-частотных характеристик x_1/x_{1st} для различных значений отношения масс μ для параметра $\varepsilon = 0$: кривая 1 – $(\mu+2)/\mu$; кривая 2 – $\gamma = \gamma_{DG}$ (классический метод); кривая 3 – $\gamma = \gamma_{opt}$ (предложенный метод); а – $\mu = 10$; б – $\mu = 100$; 1 – без демпфирования, 2 – классический параметр демпфирования γ_{opt}

На рисунке 5 показано влияние параметра ε : отрицательные значения усиливают демпфирование, положительные – интенсифицируют резонанс.

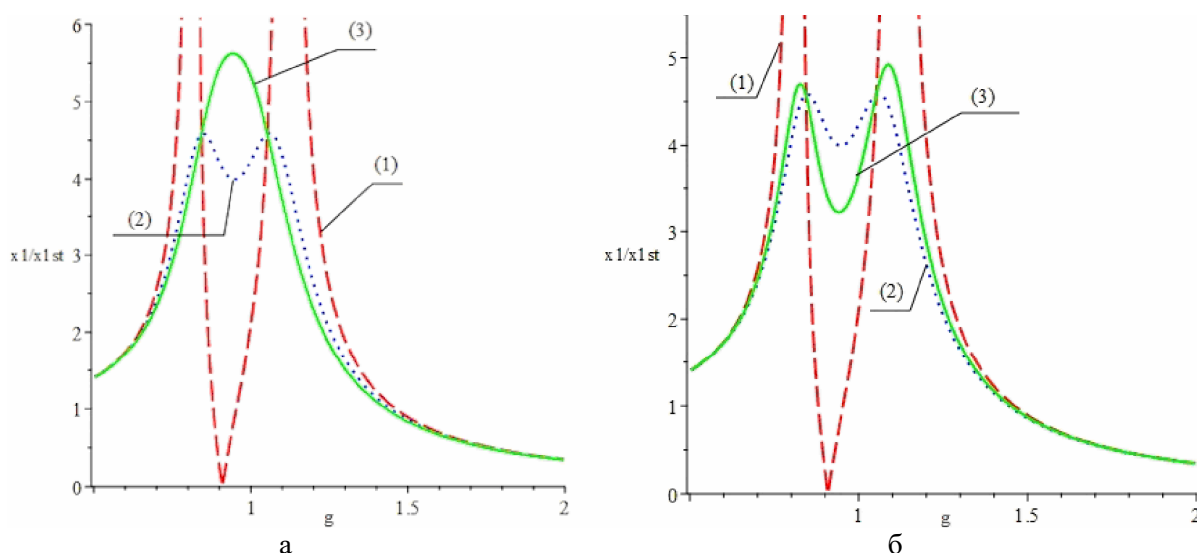


Рис. 5. Сравнение амплитудно-частотных характеристик для различных μ : 1 – $\gamma = 0$, 2 – $\gamma = \gamma_{DG}$, 3 – $\gamma = \gamma_{opt}$ ($\varepsilon = 0$); влияние ε : а – $\varepsilon = 0,5$; б – $\varepsilon = -0,5$; 1 – без демпфирования, 2 – γ_{DG} , 3 – γ_{ε}

Заключение

Разработан подход к построению оптимальной динамической характеристики механической колебательной системы на основе семейства критериев динамического качества. Получена новая формула оптимального демпфирования, обеспечивающая пологий резонансный пик и стабильность режима. Введение вариационного параметра позволяет гибко настраивать систему на требуемый характер динамического качества вибрационных взаимодействий. Предложенный подход служим методологической базой для обобщения на многомерные системы и может быть использован для стабилизации, виброизоляции и интенсификации колебательных процессов.

Список литературы

1. Ден-Хартог Дж.П. Механические колебания / Пер. с англ.; Под ред. С.А. Мейланда. – М.: Физматгиз, 1960. – 436 с.
2. Вибрации в технике: справочник: в 6 т. Т. 4: Вибрационные процессы и машины / Под ред. Э.Э. Лавендела. – М.: Машиностроение, 1981. – 509 с.
3. Крюков Б.И. Динамика вибрационных машин резонансного типа. – Киев: Наукова думка, 1967. – 208 с.
4. Альтшуль Г.М., Гуськов А.М., Пановко Г.Я. Динамика резонансной вибромашины с равночастотной подвеской рабочего органа и дебалансным возбудителем колебаний // Обогащение руд. – 2022. – №1. – С. 51-55. – DOI: 10.17580/or.2022.01.09.
5. Panovko G., Shokhin A. Resonant adjustment of vibrating machines with unbalance vibroexciter. Problems and solutions // Smart Innovation, Systems and Technologies. 2020, vol. 154, pp. 51-62.
6. Svyshch T., Lanets O., Maistruk P., Derevenko I., Nazar I., Khomych I. Modeling the operation of an eccentric-pendulum resonant vibration stand for testing aviation industry products // Vibroengineering Procedia. 2025, no. 59, pp. 34-40. DOI: 10.21595/vp.2025.25064.
7. Kapalo R., Lanets O., Maistruk P., Voitovich A., Nazar I., Khomych I. Mathematical modeling of the operation of a resonant vibration stand with an inertial exciter and hydraulic coupling for testing aviation industry products // Vibroengineering Procedia. 2025, vol. 59, pp. 28-33. DOI: 10.21595/vp.2025.25059.
8. Eliseev S.V., Eliseev A.V. Theory of Oscillations. Structural Mathematical Modeling in Problems of Dynamics of Technical Objects. – Cham: Springer International Publishing, 2020. – 521 p.
9. Eliseev A.V. Structural Mathematical Modeling Applications in Technological Machines and Transportation Vehicles. – Hershey, PA: IGI Global, 2023. – 288 p. – DOI: 10.4018/978-1-6684-7237-8.
10. Елисеев С.В., Кашуба В.Б., Кинаш Н.Ж., Елисеев А.В. Динамическое гашение колебаний: введение дополнительных связей, рычажные взаимодействия и физические эффекты // Вестник Иркутского государственного технического университета. – 2017. – Т. 21, №1. – С. 10-23. – DOI: 10.21285/1814-3520-2017-1-10-23.

References

1. Den Hartog J.P. Mechanical Vibrations / Transl. from English; Ed. by S.A. Meiland. – M.: Fizmatgiz, 1960. – 436 p.

2. Vibrations in Engineering: Reference Book: in 6 vol. Vol. 4: Vibrational Processes and Machines / Ed. by E.E. Lavendel. – M.: Mechanical Engineering, 1981. – 509 p.:
3. Kryukov B.I. Dynamics of resonant-type vibration machines. – Kiev: Naukova dumka, 1967. – 208 p.
4. Altshul G.M., Guskov A.M., Panovko G.Ya. Dynamics of a resonant vibration machine with equal-frequency suspension of the working body and unbalance vibration exciter // Obogashchenie Rud. 2022, no. 1, pp. 51-55. DOI: 10.17580/or.2022.01.09.
5. Panovko G., Shokhin A. Resonant adjustment of vibrating machines with unbalance vibroexciter. Problems and solutions // Smart Innovation, Systems and Technologies. 2020, vol. 154, pp. 51-62.
6. Svyshch T., Lanets O., Mastruk P., Derevenko I., Nazar I., Khomych I. Modeling the operation of an eccentric-pendulum resonant vibration stand for testing aviation industry products // Vibroengineering Procedia. 2025, no. 59, pp. 34-40. DOI: 10.21595/vp.2025.25064.
7. Kapalo R., Lanets O., Mastruk P., Voitovich A., Nazar I., Khomych I. Mathematical modeling of the operation of a resonant vibration stand with an inertial exciter and hydraulic coupling for testing aviation industry products // Vibroengineering Procedia. 2025, vol. 59, pp. 28-33. DOI: 10.21595/vp.2025.25059.
8. Eliseev S.V., Eliseev A.V. Theory of Oscillations. Structural Mathematical Modeling in Problems of Dynamics of Technical Objects. – Cham: Springer International Publishing, 2020. – 521 p.
9. Eliseev A.V. Structural Mathematical Modeling Applications in Technological Machines and Transportation Vehicles. – Hershey, PA: IGI Global, 2023. – 288 p. – DOI: 10.4018/978-1-6684-7237-8.
10. Eliseev S.V., Kashuba V.B., Kinash N.Zh., Eliseev A.V. Dynamic vibration damping: introduction of additional constraints, lever interactions and physical effects // Bulletin of Irkutsk State Technical University. 2017, vol. 21, no. 1, pp. 10-23. DOI: 10.21285/1814-3520-2017-1-10-23.

Сведения об авторах:

Information about authors:

Елисеев Андрей Владимирович – кандидат технических наук, доцент кафедры математики; доцент кафедры конструирования и стандартизации в машиностроении	Eliseev Andrey Vladimirovich - Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of Mathematics; Associate Professor of Department of Design and Standardization in Mechanical Engineering
Кузнецов Николай Константинович – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой конструирования и стандартизации в машиностроении	Kuznetsov Nikolai Konstantinovich – doctor of technical sciences, professor, head of the Department of engineering and standardization in mechanical engineering
Миронов Артем Сергеевич – соискатель, НОЦ современных технологий, системного анализа и моделирования	Mironov Artem Sergeevich – applicant, REC of modern technologies, system analysis and modeling
eavsh@ya.ru	

Получена 11.04.2026