

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ ЧЕТЫРЁХКОЛЁСНОГО РОБОТА С УЧЕТОМ УПРУГОСТИ ПОДВЕСКИ ШАССИ

Ионина А.Д., Сайпулаев Г.Р., Сайпулаев М.Р., Мешков В.А., Смолькина А.М., Мамаева В.В.
Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва

Ключевые слова: упругая подвеска, четырёхколёсный робот, динамика, кинематика, проскальзывание, безотрывное движение, контактное взаимодействие.

Аннотация. В рамках данной работы ставится задача моделирования динамики четырёхколёсного робота с учётом упругости подвески шасси при пространственном движении робота. Для этого были построены уравнения кинематики и динамики четырехколесного робота с учётом упруго-демпфирующих свойств подвески каждого из колес. В частном случае для движения робота по горизонтальной поверхности с учетом малости углов крена и тангажа получены линеаризованные уравнения динамики. Построенная математическая модель движения робота описывает условия наличия контакта колес с опорной поверхностью (безотрывное движение), динамику поступательных и вращательных движений робота и модель контактного взаимодействия (трение Кулона). Полученная математическая модель движения робота может быть использована для синтеза и апробации законов управления, применяемых в задаче экстренного торможения. По результатам численного моделирования продемонстрирована работоспособность одного из примеров закона управления при торможении робота. Показано, что начальные отклонения в угловых скоростях по крену и тангажу приводят к появлению движений по углу рыскания. Результаты работы могут быть использованы в задачах управления и исследовании динамики колесных аппаратами, в частности четырехколесными роботами.

A MATHEMATICAL MODEL OF THE DYNAMICS OF A FOUR-WHEELED ROBOT TAKING INTO ACCOUNT THE ELASTICITY OF THE CHASSIS SUSPENSION

Ionina A.D., Saypulaev G.R., Saypulaev M.R., Meshkov V.A., Smolkina A.M., Mamaeva V.V.
National Research University "Moscow Power Engineering Institute", Moscow

Keywords: elastic suspension, four-wheeled robot, dynamics, kinematics, slippage, no-overturn motion, contact interaction forces.

Abstract. This paper aims to simulate the dynamics of a four-wheeled robot, taking into account the elasticity of the chassis suspension during the robot's spatial motion. Kinematic and dynamic equations for a four-wheeled robot were constructed, taking into account the elastic-damping properties of the suspension of each wheel. In the specific case of robot motion on a horizontal surface, linearized dynamic equations were obtained, taking into account small roll and pitch angles. The resulting mathematical model of robot motion describes the conditions for wheel contact with the supporting surface (continuous contact), the dynamics of the robot's translational and rotational motions, and a model of contact interaction (Coulomb friction). The resulting mathematical model of robot motion can be used to synthesize and test control laws applied to emergency braking. Numerical simulations demonstrate the operability of one example of a control law for robot braking. It is shown that initial deviations in roll and pitch angular velocities lead to yaw movements. The results of the work can be used in control problems and research of the dynamics of wheeled vehicles, in particular four-wheeled robots.

Введение

На сегодняшний день в мире происходит активная автоматизация процессов, возникающих в процессе человеческой деятельности. Одним из приоритетов является создание автоматизированных систем для решения задач управления сложными техническими транспортными средствами, в число которых входит управление автомобилем или четырехколесным роботом. Особую роль в автомобилях и подобных им роботах играет конструкция шасси, которая зачастую содержит упругие и демпфирующие элементы.

Пример четырёхколёсного робота с упругой подвеской шасси представлен на рисунке 1.

Обзор устройства электромобиля в работе [1] даёт описание путей построения систем управления электродвигателями колес, решающих задачи экстренного торможения.

Для построения таких систем управления возникает необходимость исследования вспомогательных элементов шасси, уменьшающих негативное влияние вибраций корпуса на устойчивость транспортного средства [2, 3]. Зачастую возникают явления заноса колёсного аппарата, которое приводит к нарушению условий непроскальзывания точек контакта автомобиля и изменению структуры математической модели. В работе [4] были описаны неустойчивость по углу рыскания при блокировке или пробуксовке передних и задних колёс, а также случаи нахождения различных колёс автомобиля на поверхностях с разными коэффициентами трения, которые могут возникать при движении по обочине или непредвиденным свойствам подстилающей поверхности.

В этой связи важным аспектом, отмеченным в работах [5, 6], является проектирование тормозных систем. Перспективным направлением в изучении процесса торможения является нахождение новых алгоритмов обнаружения проскальзывания и механизмов торможения в экстренных ситуациях. Разработка качественной антиблокировочной системы (АБС) длительное время остаётся ведущей задачей в области построения автомобилей и колесных роботов.

В публикации [7] представлена динамическая модель робота, включающая продольное и боковое проскальзывание точек контакта колёс, конструкцию подвески и гибкость валов двигателей колёс.

В работах [8, 9] исследуются новые системы управления с использованием нелинейной многомассовой динамической модели и предлагаются новые алгоритмы управления. Исследование основано на смене режимов АБС в зависимости от амплитуды колебаний корпуса робота при торможении.

Работа [10] рассматривает процесс торможения с точки зрения термодинамики. Тепло, создаваемое трением колодок о тормозной диск, приводит к изменению давления и температуры шины, что имеет влияние на силу сцепления и общие динамические характеристики автомобиля, что напрямую влияет на поведение АБС, динамической системы стабилизации и других систем контроля устойчивости. В результате получена модель термодинамики шины, основанная на законе теплопроводности Фурье, с учетом нагрева от трения, теплообмен с дорогой и внешней средой.

Управление жёсткостью многокамерной подвески на основе сигналов инерциального измерительного модуля (IMU) обеспечивает устойчивость при выполнении платформой сложных манёвров. Устойчивость движения может быть улучшена с помощью комбинирования методов активного и пассивного контроля вибраций, как показано в работах [11, 12].

В публикации [13] рассматривается состояние автомобиля в заключительной фазе торможения. Для анализа нелинейных эффектов в момент, когда скорость точек контакта близка к нулю, используется динамическая модель трения ЛуГре (LuGre).

В статье [14] отмечается, что при компьютерном моделировании торможения робота с упругой подвеской система совершает высокочастотные колебания. Для решения этой проблемы система управления роботом реализуется в виде двух контуров, отвечающих за обеспечение устойчивости робота и учет требований к эффективности торможения.

В статье [15] была рассмотрена система с использованием электромеханических тормозов и мотор-колёс в электромобилях с распределённым приводом, что существенно увеличивает неподрессоренную массу. В сочетании с демпфирующими свойствами электродвигателя возникает собственное колебание колеса в окружном направлении.

В данной работе ставится задача построения математической модели динамики четырехколесного робота с учетом упруго-демпфирующих свойств каждого колеса при пространственном движении робота.



Рис. 1. Пример четырёхколёсного робота с упругой подвеской шасси

Материалы и методы исследований. Для описания движения платформы будем использовать кинематическую схему, представленную на рисунке 2.

При описании кинематики робота вводятся неподвижная система координат (НСК) xyz и подвижная система координат (ПСК) $CXYZ$, связанная с платформой и с началом в геометрическом центре C платформы.

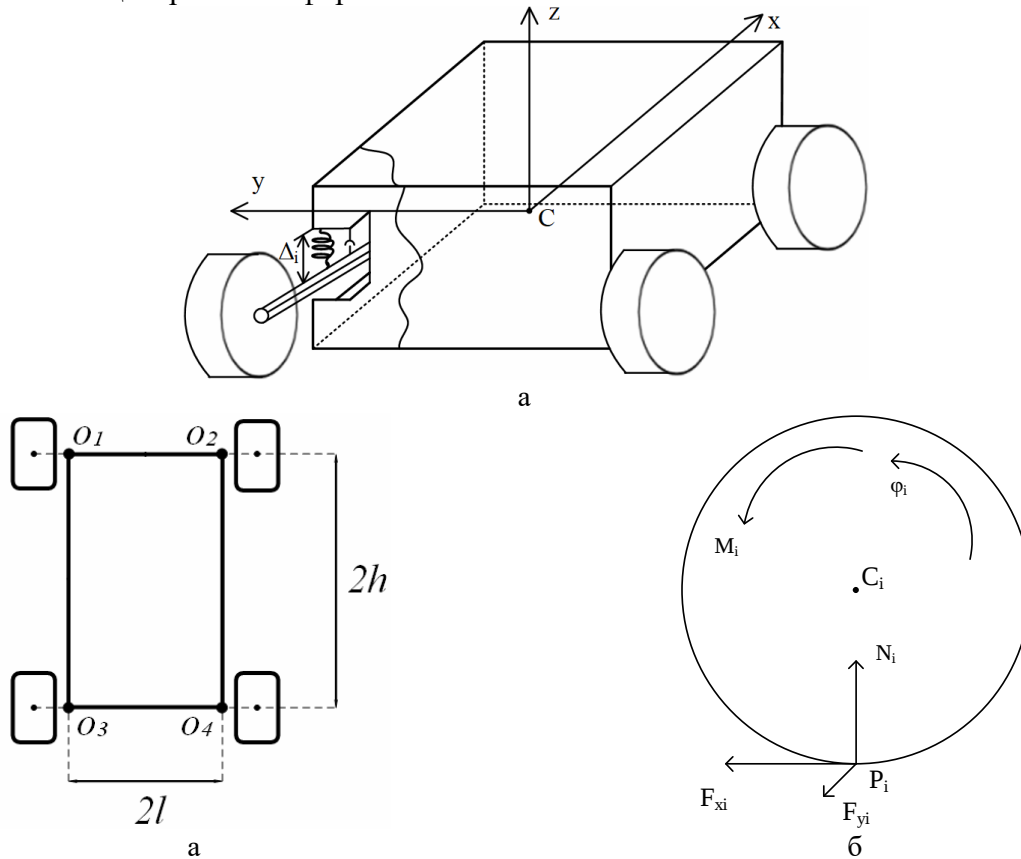


Рис. 2. Кинематическая схема четырёхколёсного робота:

а) общий вид с детализацией упругой подвески одного колеса; б) вид сверху; в) i -ое колесо

На кинематической схеме введены следующие обозначения: O_i – точка крепления подвески колеса к корпусу платформы; C_i – геометрический центр колеса; C – геометрический центр платформы; Δ_i – перемещение геометрического центра колеса относительно платформы; P_i – точка контакта колеса с опорной поверхностью; R – радиус колеса; $2h$ – расстояние между геометрическими центрами передних и задних колес платформы; $2l$ – расстояние между геометрическими центрами левых и правых колес платформы; φ_i – угол поворота i -го колеса относительно корпуса платформы; M_i – момент, создаваемый двигателем i -го колеса; N_i – нормальная реакция опоры, действующая на i -ое колесо; F_{xi} , F_{yi} – проекции сил трения, действующей на i -ое колесо, на НСК.

Для перевода векторов из НСК xyz в ПСК $CXYZ$ используем матрицу направляющих косинусов, учитывающую последовательное вращение на углы рыскания ψ , тангажа θ и крена γ :

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\gamma & -s\gamma \\ 0 & s\gamma & c\gamma \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c\theta & 0 & s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c\psi & -s\psi & 0 \\ s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta c\psi & -c\theta s\psi & s\theta \\ s\gamma s\theta c\psi + c\gamma s\psi & -s\gamma s\theta s\psi + c\gamma c\psi & -s\gamma c\theta \\ -c\gamma s\theta c\psi + s\gamma s\psi & c\gamma s\theta s\psi + s\gamma c\psi & c\gamma c\theta \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Здесь использовано сокращенное обозначение для тригонометрических функций: $\sin x = s x$, $\cos x = c x$.

Проекции вектора угловой скорости платформы на ПСК $OXYZ$ имеют вид:

$$\Omega_{Px} = \dot{\gamma} - \dot{\psi} s \theta, \Omega_{Py} = \dot{\theta} c \gamma + \dot{\psi} c \theta s \gamma, \Omega_{Pz} = -\dot{\theta} s \gamma + \dot{\psi} c \theta c \gamma, \quad (2)$$

Здесь и далее точкой над переменной обозначается дифференцирование по времени.

Для описания условий безотрывного движения колес робота по опорной поверхности используем выражения координат точек P_i в проекциях на НСК:

$$\begin{aligned} x_{Pi} &= x_C + x_i c \theta c \psi - y_i c \theta s \psi - (R + \Delta_i) s \theta, \\ y_{Pi} &= y_C + x_i (s \gamma s \theta c \psi + c \gamma s \psi) + y_i (c \gamma c \psi - s \gamma s \theta s \psi) + (R + \Delta_i) s \gamma c \theta, \\ z_{Pi} &= z_C + x_i (s \gamma s \psi - c \gamma s \theta c \psi) + y_i (c \gamma s \theta s \psi + s \gamma c \psi) - (R + \Delta_i) c \gamma c \theta, \end{aligned} \quad (3)$$

где x_i, y_i – координаты геометрического центра i -го колеса в ПСК. Далее будем рассматривать симметричную конструкцию робота: $x_1 = x_2 = -x_3 = -x_4 = h, y_1 = -y_2 = y_3 = -y_4 = l$.

Дифференцируя уравнения (3), получим выражения для скорости точки контакта i -го колеса в проекциях на НСК в виде:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{Pi} \\ \dot{y}_{Pi} \\ \dot{z}_{Pi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_C \\ \dot{y}_C \\ \dot{z}_C \end{bmatrix} + \Gamma \begin{bmatrix} -\Omega_{Py} (R + \Delta_i) - \Omega_{Pz} y_i - \dot{\phi}_i R \\ \Omega_{Px} (R + \Delta_i) + \Omega_{Pz} x_i \\ \Omega_{Px} y_i - \Omega_{Py} x_i - \dot{\Delta}_i \end{bmatrix}. \quad (4)$$

В более общей постановке (т.е. без учета условий непроскальзывания точек контакта колес) уравнения динамики робота можно построить с использованием уравнений Лагранжа 2-го рода:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\mathbf{q}}} + \mathbf{Q}_U + \mathbf{Q}_{CF}, \quad (5)$$

где $L = T - \Pi$ – функция Лагранжа, вычисляемая как разница кинетической T и потенциальной Π энергий; $\mathbf{q} = (x_C, y_C, z_C, \psi, \theta, \gamma, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4)^T$ – вектор обобщенных координат; Φ – диссипативная функция Рэлея; $\mathbf{Q}_U, \mathbf{Q}_{CF}$ – вектора обобщенных сил, связанные с моментами управления и сил контактного взаимодействия, соответственно.

Кинетическая энергия системы состоит из кинетических энергий платформы и 4-х колёс:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m_s (\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2 + \dot{z}_C^2) + m_w \sum_{i=1}^4 \dot{\Delta}_i (\Omega_{Px} y_i - \Omega_{Py} x_i) + \frac{J_{wy}}{2} \sum_{i=1}^4 (\dot{\phi}_i^2 + \Omega_{Py} \dot{\phi}_i) + \\ &+ \frac{1}{2} (J_{sx} \Omega_{Px}^2 + J_{sy} \Omega_{Py}^2 + J_{sz} \Omega_{Pz}^2) + m_w \dot{z}_o \Omega_{Px} \sum_{i=1}^4 \Delta_i (s \gamma c \psi - c \gamma s \theta s \psi) + \\ &+ m_w \Omega_{Px} \sum_{i=1}^4 \Delta_i [\dot{y}_C (c \gamma c \psi - s \gamma s \theta s \psi) - \dot{x}_C c \theta s \psi] - \\ &- m_w \Omega_{Py} \sum_{i=1}^4 \Delta_i [\dot{x}_C c \theta c \psi + \dot{y}_C (c \gamma s \psi + s \gamma s \theta c \psi)] - \\ &- m_w \sum_{i=1}^4 \dot{\Delta}_i (\dot{x}_C s \theta - \dot{y}_C c \theta s \gamma + \dot{z}_C c \gamma c \theta) + \frac{m_w}{2} \sum_{i=1}^4 [(\Omega_{Px}^2 + \Omega_{Py}^2) \Delta_i^2 + \dot{\Delta}_i^2] - \\ &- m_w \dot{z}_o \Omega_{Py} \sum_{i=1}^4 \Delta_i (s \gamma s \psi - c \gamma s \theta c \psi) + m_w \Omega_{Pz} \sum_{i=1}^4 \Delta_i (\Omega_{Py} y_i + \Omega_{Px} x_i), \end{aligned} \quad (6)$$

где $m_s = m_p + 4m_w$ – масса робота, состоящая из массы платформы m_p и массы 4-ех колес $4m_w$; $J_{sx} = J_{Px} + 4J_{wx} + m_w \sum_{i=1}^4 y_i^2$, $J_{sy} = J_{Py} + 4J_{wy} + m_w \sum_{i=1}^4 x_i^2$ и $J_{sz} = J_{Pz} + 4J_{wz} + m_w \sum_{i=1}^4 (x_i^2 + y_i^2)$ – моменты инерции робота относительно осей ПСК; J_{Px}, J_{Py}, J_{Pz} и J_{wx}, J_{wy}, J_{wz} – моменты инерции платформы и каждого колеса относительно собственных осей инерции.

Потенциальная энергия системы, обусловленная наличием сил тяжести, действующей на колёса и платформу, а также сил упругости амортизаторов колес, имеет вид.

$$\Pi = m_p g z_C + m_w g \sum_{i=1}^4 z_{Ci} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 c \Delta_i^2, \quad (7)$$

где c – коэффициент упругости подвески каждого из колес; g – ускорение свободного падения; а вертикальная координата z_{Ci} центра масс i -го колеса определяется выражением:

$$z_{Ci} = z_C + x_i (s \gamma s \psi - c \gamma s \theta c \psi) + y_i (c \gamma s \theta s \psi + s \gamma c \psi) - \Delta_i c \gamma c \theta. \quad (8)$$

Диссипативная функция Рэлея, описывающая потери на трение в осях колес и в демпфере подвески шасси, имеет вид:

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 d \dot{\Delta}_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \mu \dot{\phi}_i^2, \quad (9)$$

где d – коэффициент, характеризующий демпфирующие свойства подвески; μ – коэффициент линейного трения в осях колес.

Обобщённые силы Q_M , связанные с моментами управления, и $Q_{\kappa.m.}$, связанные с силами контактного трения, можно определить из уравнений баланса мощностей:

$$\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{Q}_{CF} = \sum_{i=1}^4 (F_{xi} \dot{x}_{Pix} + F_{yi} \dot{y}_{Piy} + N_i \dot{z}_{Piz}), \quad \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{Q}_U = \sum_{i=1}^4 M_i \dot{\phi}_i. \quad (10)$$

С учетом выражений (1)-(4) и (6)-(10), уравнения динамики (5) получим с учетом нелинейностей. Однако для анализа динамики робота, в задаче торможения при движении по горизонтальной поверхности, можно принять следующие допущения:

- колеса робота непрерывно контактируют с опорной поверхностью (т.е. $z_{Pi} = 0$);
- углы крена и тангажа малы, т.е. $|\theta|, |\gamma| = 1$ рад;
- смещения Δ_i малы по сравнению с размерами корпуса платформы.

При указанных допущениях уравнения динамики примут вид:

$$m_S \ddot{x}_C = \sum_{i=1}^4 F_{xi}, \quad m_S \ddot{y}_C = \sum_{i=1}^4 F_{yi}, \quad m_S (\ddot{z}_C + g) - m_w \sum_{i=1}^4 \ddot{\Delta}_i = \sum_{i=1}^4 N_i, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} J_{wy} (\ddot{\phi}_i + \ddot{\theta} + \ddot{\psi} \gamma + \dot{\psi} \dot{\gamma}) &= M_i - \mu \dot{\phi}_i - (F_{xi} - N_i) R c \psi - (F_{yi} + N_i \gamma) R s \psi, \\ m_w \ddot{\Delta}_i - m_w (\ddot{x}_C \theta + \dot{x}_C \dot{\theta} - \ddot{y}_C \gamma - \dot{y}_C \dot{\gamma} + \ddot{z}_C + g) &+ d \dot{\Delta}_i + c \Delta_i + \\ + m_w (\ddot{\gamma} - \ddot{\psi} \theta - 2 \dot{\psi} \dot{\theta} - \dot{\psi}^2 \gamma) y_i - m_w (\ddot{\theta} + \ddot{\psi} \gamma + 2 \dot{\psi} \dot{\gamma} - \dot{\psi}^2 \theta) x_i - \\ - m_w (\ddot{\gamma} - \ddot{\psi} \theta) (-\dot{x}_C s \psi + \dot{y}_C c \psi) + m_w (\dot{\theta} + \dot{\psi} \gamma) (\dot{x}_C c \psi + \dot{y}_C s \psi) &= \\ = F_{yi} \gamma - F_{xi} \theta - N_i. \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} J_{Sz} \ddot{\psi} + J_{wy} \left(\dot{\gamma} \sum_{i=1}^4 \dot{\phi}_i + \gamma \sum_{i=1}^4 \ddot{\phi}_i \right) &= \sum_{i=1}^4 F_{yi} [(y_i - R \gamma) s \psi + (x_i - R \theta) c \psi] - \\ - \sum_{i=1}^4 F_{xi} [(y_i + R \gamma) c \psi + (x_i + R \theta) s \psi] &+ \\ + \sum_{i=1}^4 N_i [(y_i \theta + x_i \gamma) (c \psi - 1) + (x_i \theta - y_i \gamma) s \psi], \\ J_{Sx} (\ddot{\gamma} - \ddot{\psi} \theta - \dot{\psi} \dot{\theta}) - J_{Sy} (\dot{\theta} + \dot{\psi} \gamma) \dot{\psi} + J_{Sz} \dot{\psi} (\dot{\theta} + \dot{\psi} \gamma) - J_{wy} \dot{\psi} \sum_{i=1}^4 \dot{\phi}_i &+ \\ + m_w \left(2 \dot{\psi} \sum_{i=1}^4 \dot{\Delta}_i x_i + \sum_{i=1}^4 \ddot{\Delta}_i y_i - \dot{\psi}^2 \sum_{i=1}^4 \Delta_i y_i \right) &+ \\ + m_w \sum_{i=1}^4 \dot{\Delta}_i [\dot{y}_C (c \psi - 1) - \dot{x}_C s \psi] + m_w (\ddot{y}_C c \psi - \ddot{x}_C s \psi) \sum_{i=1}^4 \Delta_i - \\ - m_w \dot{\psi} [\dot{x}_C (c \psi - 1) + \dot{y}_C (s \psi - 1)] \sum_{i=1}^4 \Delta_i = \sum_{i=1}^4 y_i (F_{xi} \theta + F_{yi} \gamma) &+ \\ + \sum_{i=1}^4 (R + \Delta_i) (F_{xi} s \psi - F_{yi} c \psi) + \sum_{i=1}^4 N_i [-R (\theta s \psi + \gamma c \psi) + y_i], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& J_{Sy} (\ddot{\theta} + \ddot{\psi}\gamma + \dot{\psi}\dot{\gamma}) - J_{Sz} (\ddot{\psi}\gamma + \dot{\gamma}\dot{\psi} - \dot{\psi}^2\theta) + J_{Sx} (\dot{\gamma} - \dot{\psi}\theta)\dot{\psi} - \\
& - m_w (\ddot{x}_c \cos\psi + \ddot{y}_c \sin\psi) \sum_{i=1}^4 \Delta_i - m_w [\dot{y}_c (\cos\psi - 1) - \dot{x}_c (\sin\psi - 1)] \dot{\psi} \sum_{i=1}^4 \Delta_i + \\
& + m_w \left(2\dot{\psi} \sum_{i=1}^4 \dot{\Delta}_i y_i + \ddot{\psi} \sum_{i=1}^4 \Delta_i y_i - \sum_{i=1}^4 \ddot{\Delta}_i x_i + \dot{\psi}^2 \sum_{i=1}^4 \Delta_i x_i \right) + J_{wy} \sum_{i=1}^4 \ddot{\phi}_i - \\
& - m_w [\dot{x}_c (\cos\psi - 1) + \dot{y}_c \sin\psi] \sum_{i=1}^4 \dot{\Delta}_i = \sum_{i=1}^4 x_i [F_{xi} (\gamma \sin\psi - \theta) + F_{yi} \gamma (\cos\psi + 1)] + \\
& + \sum_{i=1}^4 [(y_i \gamma - (R + \Delta_i)) (F_{xi} \cos\psi + F_{yi} \sin\psi) - N_i [(R + \Delta_i) (\gamma \sin\psi - \theta \cos\psi) + x_i]].
\end{aligned} \tag{13}$$

В результате математическая модель робота, движущегося по горизонтальной поверхности, описывается уравнениями динамики (11)-(13), условиями безотрывного движения:

$$\Delta_i = z_c - R + x_i (\gamma \sin\psi - \theta \cos\psi) + y_i (\theta \sin\psi + \gamma \cos\psi) \tag{14}$$

и моделью трения, в качестве которой в большинстве приложений допустимо использовать закон сухого трения Кулона:

$$F_{xi} = -f N_i \frac{\dot{x}_{Pi}}{\sqrt{\dot{x}_{Pi}^2 + \dot{y}_{Pi}^2}}, \quad F_{yi} = -f N_i \frac{\dot{y}_{Pi}}{\sqrt{\dot{x}_{Pi}^2 + \dot{y}_{Pi}^2}}, \tag{15}$$

где f – коэффициент сухого трения.

Полученная математическая модель движения робота может быть использована для синтеза и апробации законов управления, применяемых в задаче экстренного торможения.

Результаты

Проведем численное моделирование движения робота при торможении робота с законом изменения моментов двигателей колес пропорциональным скорости движения центра масс робота:

$$M_i = -k_1 \dot{x}_c, \tag{16}$$

где k_1 – коэффициент обратной связи.

В качестве начальных условий примем:

$$\begin{aligned}
& x_c(0) = y_c(0) = 0 \text{ м}, \quad z_c(0) = R - \frac{1}{2} \frac{m_s g}{4c} \text{ м}, \quad \psi(0) = \gamma(0) = \theta(0) = 0 \text{ рад}, \\
& \dot{x}_c(0) = 1 \text{ м/с}, \quad \dot{y}_c(0) = \dot{z}_c(0) = 0 \text{ м/с}, \quad \dot{\psi}(0) = 0 \text{ рад/с}, \quad \dot{\gamma}(0) = \dot{\theta}(0) = 0,01 \text{ рад/с}, \\
& \phi_i(0) = 0 \text{ рад}, \quad \dot{\phi}_i(0) = \frac{\dot{x}_c(0) - \dot{\psi}(0) y_i}{R} \text{ рад/с} \quad (i = 1, 2, 3, 4),
\end{aligned} \tag{17}$$

а в качестве числовых значений параметра робота используем:

$$\begin{aligned}
& R = 0,1 \text{ м}, \quad h = 0,2 \text{ м}, \quad l = 0,2 \text{ м}, \quad m_s = 20 \text{ кг}, \quad m_w = 0,4 \text{ кг}, \\
& J_{Sx} = J_{Sy} = 0,2 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \quad J_{Sz} = 0,8 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \quad J_{wy} = 0,004 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \\
& \mu = 0,5 \text{ Н} \cdot \text{с/рад}, \quad c = 1 \text{ кН/м}, \quad d = 5 \text{ Н} \cdot \text{с/м}, \quad f = 0,5.
\end{aligned} \tag{18}$$

На рисунках 3 и 4 представлены результаты моделирования процесса торможения робота.

По рисунку 3, а можно отметить, что вертикальная координата центра масс платформы при движении робота по горизонтальной поверхности с возмущениями в начальном положении устанавливается на постоянном значении. Из рисунка 3, в, г углы крена и тангажа сходятся к нулевым значениям. При этом максимальная амплитуда колебаний по тангажу на порядок больше, чем по крену при равных начальных отклонениях по производным углов крена и тангажа. Имеющиеся колебания углов крена и тангаж на начальном интервале времени приводят к появлению колебаний по углу рыскания (рис. 3, б). Указанные колебания могут привести к боковым движениям робота в процессе торможения или к заносу.

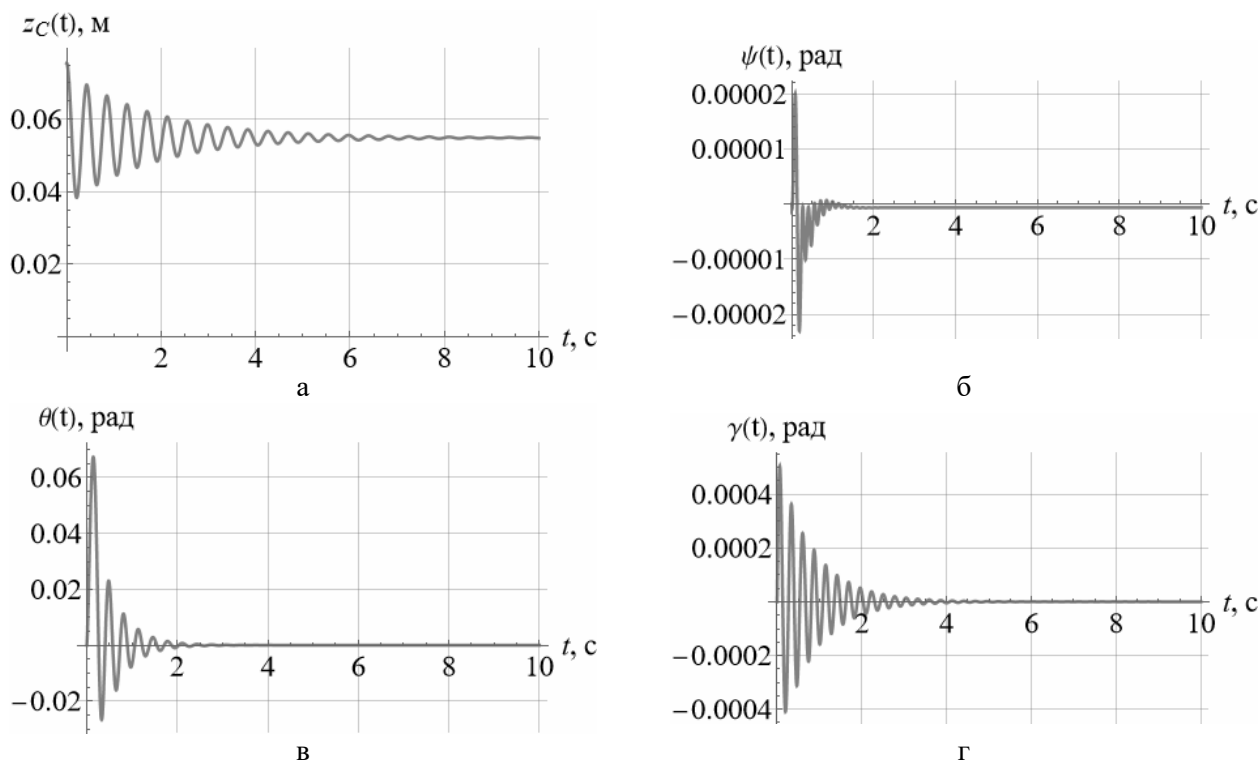


Рис. 3. Зависимости от времени параметров движения робота: а) вертикальная координата z_C ; б) угол рыскания ψ ; в) угол тангажа θ ; г) угол крена γ

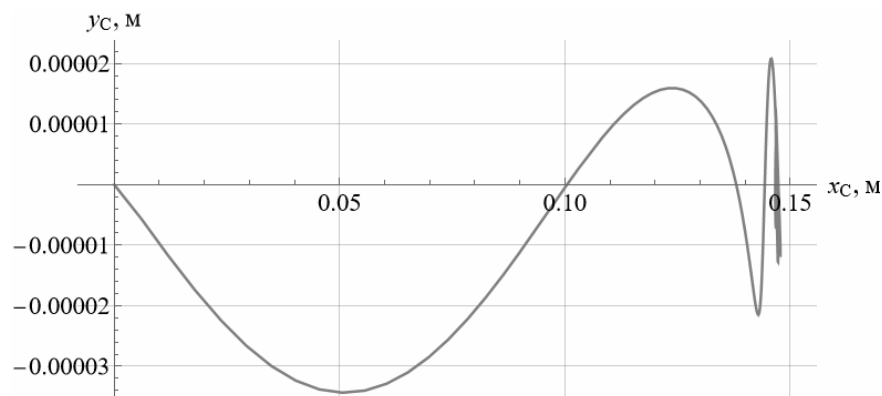


Рис. 4. Траектория движения геометрического центра платформы робота

По рисунку 4 можно отметить, что при торможении с использованием моментов двигателей колес, формируемых в виде (16), отметим, что отклонения в боковом направлении малы, а робот останавливается за 15 см тормозного пути.

Результаты моделирования показали, что основные эффекты динамики мобильных роботов, наблюдаемые в процессе торможения, могут быть спрогнозированы с помощью построенной математической модели.

Выводы. По построенной математической модели динамики четырехколесного робота при его пространственном движении подтверждена возможность детального описания переходных процессов в задачах экстренного торможения или при оценке предлагаемых законов изменения управляющих сигналов (в частности моментов двигателей колес). По результатам численного моделирования продемонстрирована работоспособность одного из примеров закона управления при торможении робота. Показано, что начальные отклонения в угловых скоростях по крену и тангажу приводят к появлению движений по углу рыскания.

По результатам работы получена математическая модель движения робота, использующая условия наличия контакта колес с опорной поверхностью (безотрывного движения), динамику поступательных и вращательных движений робота и модель контактного взаимодействия (трения Кулона).

Закключение

В данной работе с использованием уравнений Лагранжа 2-го рода построена математическая модель пространственного движения четырехколесного робота. Представлено численное моделирование процесса торможения четырехколесного робота, движущегося по горизонтальной поверхности, при наличии возмущений в начальных условиях. По результатам численного моделирования продемонстрирована работоспособность одного из примеров закона управления при торможении робота.

Полученная математическая модель движения может быть использована при построении законов управления колесными аппаратами, в частности четырехколесными роботами.

Список литературы

1. Калиев Е.Б., Бурьян М.Б., Турсымбекова З., Мырзагельдиев Р.А., Козбагаров Р.А. Общее устройство электромобилей и темпы их развития в мире // Научный журнал «Вестник КазАТК». – 2024. – Т. 131, №2. – С. 44-54. – doi.org/10.52167/1609-1817-2024-131-2-44-54.
2. Самойленко А.И., Новоженин Н.А., Тюкин К.А. Развитие тормозного управления автомобилей // Международный научный журнал «Вестник науки». – 2025. – Т. 4, №6(87). – С. 1334-1338.
3. Yang L., Yang Y., Wu G., Zhao X., Fang S., Liao X., Wang R., Zhang M. A Systematic Review of Autonomous Emergency Braking System: Impact Factor, Technology, and Performance Evaluation // Journal of Advanced Transportation. 2022, vol. 1, pp. 1-13. doi.org/10.1155/2022/1188089.
4. Новодерова А.П. Моделирование заноса колесного аппарата: Автореф. дисс. ... канд. физ.-мат. наук. – Москва, 2020. – 22 с.
5. Иноземцев В.Е., Евсеев Д.Г., Куликов М.Ю., Барышников А.В. Концепция альтернативной тормозной системы для подвижного состава // Транспортное машиностроение. – 2022. – Т. 2022, №10. – С. 42-48. – doi.org/10.30987/2782-5957-2022-10-42-48.
- 6-15. См. References.

References

1. Kaliev E.B., Burian M.B., Tursumbekova Z., Myrzageldiyev R.A., Kozbagarov R.A. The general structure of electric vehicles and the pace of their development in the world // KazATC Bulletin. 2024, vol. 131, no. 2, pp. 44-54. doi.org/10.52167/1609-1817-2024-131-2-44-54.
2. Samoylenko A.I., Novozhenin N.A., Tyukin K.A. Brake development vehicle controls // International scientific journal «Bulletin of Science». 2025, vol. 4, no. 6(87), pp. 1334-1338.
3. Yang L., Yang Y., Wu G., Zhao X., Fang S., Liao X., Wang R., Zhang M. A Systematic Review of Autonomous Emergency Braking System: Impact Factor, Technology, and Performance Evaluation // Journal of Advanced Transportation. 2022, vol. 1, pp. 1-13. doi.org/10.1155/2022/1188089.
4. Novoderova A.P. Modeling of wheeled vehicle skidding: Abstract of the diss. ... cand. of phys.-math. sc. – Moscow, 2020. – 22 p.
5. Inozemtsev V.E., Evseev D.G., Kulikov M.Yu., Baryshnikov A.V. The concept of an alternative rolling stock braking system // Transport engineering. 2022, vol. 2022, no. 10, pp. 42-48. doi.org/10.30987/2782-5957-2022-10-42-48.
6. Li J., Xie Y., Huo Y. An Independent Suspension and Trafficability Analysis for an Unmanned Ground Platform // Symmetry. 2025, vol. 17, no. 1, p. 128. – doi.org/10.3390/sym17010128.
7. Korayem M.H., Dehkordi S.F., Aghajari M. Dynamic modeling of the extended mobile robot: Composed N parallel axles, suspension system, and wheels slippage // Scientia Iranica B. 2023, vol. 30, no. 5, pp. 1595-1611. doi.org/10.24200/SCI.2023.56722.4874.
8. Khadr A., Houidi A., Romdhane L. Anti-lock braking system control design using a non-linear multibody dynamic model for a two wheeled vehicle // Engineering Research Express. 2024, vol. 6, p. 015527. doi.org/10.1088/2631-8695/ad337f.
9. Klimov A.V., Ospanbekov B.K., Antonyan A.V., Anisimov V.R., Dvoeglazov E.A., Novogorodov D.A., Keller A.V., Shadrin S.S., Makarova D.A., Ershov V.S., Furlotov Y.M. Detecting Wheel Slip to Suppress Self-Excited Oscillations in Braking Mode // World Electric Vehicle Journal. 2024, vol. 15, no. 8, pp. 1-30. doi.org/10.3390/wevj15080340.
10. Stefanelli A., Aprea M., Carbone F., Romagnuolo F., Caresia P., Suero R. Integrated Thermomechanical Analysis of Tires and Brakes for Vehicle Dynamics and Safety // Vehicles. 2024, vol. 6, no. 3, pp. 1637-1647. doi.org/10.3390/vehicles6030077.
11. Dai W., He L., Pan Y., Zhang S.P., Hou L. Improved Vehicle Vibration Control through Optimization of Suspension Parameters Using the Response Surface Method and a Non-Linear Programming with a Quadratic Lagrangian Algorithm // Actuators. 2023, vol. 12, no. 7, p. 297. doi.org/10.3390/act12070297.
12. Marini G., Panzani G., Corno M., Sermisoni S., Savaresi S.M. Handling-Oriented Stiffness Control of a Multichamber Suspension // IEEE Conference on Control Technology and Applications (CCTA). 2023, pp. 301-306. doi.org/10.1109/CCTA54093.2023.10252499.

13. Hou X., Gan M., Zhang J., Zhao S., Ji Y. Vehicle ride comfort optimization in the post-braking phase using residual reinforcement learning // Advanced Engineering Informatics. 2023, vol. 58, no. 1, p. 102198. doi.org/10.1016/j.aei.2023.102198.
14. Cao T.N.T., Pham B.T., Nguyen N.T., Vu D.-L., Truong N.-V. Second-Order Terminal Sliding Mode Control for Trajectory Tracking of a Differential Drive Robot // Mathematics. 2024, vol. 12, p. 2657. doi.org/10.3390/math12172657.
15. Xu Y., Zhu Z., Li Z., Wang X., Li L., Wei H. Vibration Control of Wheels in Distributed Drive Electric Vehicle Based on Electro-Mechanical Braking // IEEE Access. 2020, vol. 8, pp. 7205-7216. doi.org/10.1109/ACCESS.2020.2964582.

Сведения об авторах:

Information about authors:

Ионина Алина Денисовна – студентка	Ionina Alina Denisovna – student
Сайпулаев Гасан Русланович – кандидат технических наук, доцент кафедры Робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин	Saypulaev Gasan Ruslanovich – candidate of technical sciences, docent of the Department of robotics, mechatronics, dynamics and machine strength
Сайпулаев Муса Русланович – кандидат технических наук, старший преподаватель кафедры Робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин	Saypulaev Musa Ruslanovich – candidate of technical sciences, senior lecturer of the Department of robotics, mechatronics, dynamics and machine strength
Мешков Вячеслав Александрович – студент	Meshkov Vyacheslav Aleksandrovich – student
Смолькина Алина Максимовна – студентка	Smolkina Alina Maksimovna – student
Мамаева Виктория Витальевна – аспирантка	Mamaeva Victoria Vitalievna – postgraduate student
saypulaevgr@mail.ru	

Получена 15.03.2026