

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КИНЕМАТИКИ МАНИПУЛЯТОРА ПАНТОГРАФНОГО ТИПА ДЛЯ АВТОМАТИЗАЦИИ ПРОЦЕССА ИНДЕНТИРОВАНИЯ

*Орлов К.И., Меркурьев И.В., Орлов И.В., Зубрильчев Д.Р.  
Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва*

**Ключевые слова:** манипулятор пантограф, метод Денавита-Хартенберга, прямая задача кинематики, обратная кинематика, рабочая область, индентор.

**Аннотация.** Инструментальное индентирование широко применяется в промышленности на всех этапах производства, как один из методов неразрушающего контроля свойств материала. Много работ посвящено совершенствованию датчиков и методов индентирования, однако с ростом количества измерений возникает потребность в автоматизации данного процесса. В настоящее время в публикациях практически нет исследований механизмов для автоматизации позиционирования индентора, особенно манипуляторов. Поэтому работа по созданию подобного манипулятора представляет как научный, так и прикладной интерес. Для реализации такого проекта необходимо решить целый ряд задач. Решение одной из таких задач и является целью представленной работы – описание кинематики механизма автоматизированного позиционирования индентора, построение рабочей области. В работе рассматривается пятизвенный манипулятор пантографного типа. В качестве приводов используются линейные актуаторы. 3D-модель механизма разработана в программе Компас-3D. Кинематика манипулятора описывается при помощи параметров Денавита-Хартенберга. Решена прямая задача кинематики и на основе полученного решения и конструктивных особенностей манипулятора построена рабочая область. Получено решение обратной задачи кинематики в аналитическом виде для частного случая. Решение содержит трансцендентные функции и, т.к. в дальнейшем предполагается использование полученного решения для управления манипулятором, важным является вопрос анализа точности вычислений на всей рабочей области при использовании полученных выражений. Такой анализ был проведен, и расчеты показали, что при вычислениях с точностью 5 знаков после запятой отклонение расчетных координат от заданных приемлемы для данной задачи на всей рабочей области. Результаты, полученные в работе, позволяют оценить характеристики и возможности практического использования проектируемого механизма. Построенная модель с помощью метода Денавита-Хартенберга позволит в дальнейшем рассмотреть решение обратной задачи кинематики в общем случае и построить управление механизмом.

## MATHEMATICAL MODEL OF PANTOGRAPH-TYPE MANIPULATOR KINEMATICS TO AUTOMATE THE INDENTATION PROCESS

*Orlov K.I., Merkuryev I.V., Orlov I.V., Zubrilchev D.R.  
National Research University “Moscow Power Engineering Institute”, Moscow*

**Keywords:** pantograph manipulator, Denavit-Hartenberg method, direct problem of kinematics, inverse kinematics, working area, indenter.

**Abstract.** Instrumental indentation is widely used in industry at all stages of production, as one of the methods of non-destructive testing of material properties. Many articles are devoted to improving sensors and indentation methods, but with the increasing number of measurements, there is a need to automate this process. Currently, there is almost no research in publications on mechanisms for automating indenter positioning, especially manipulators. Therefore, the development of such a manipulator is of scientific and applied interest. To implement such a project, it is necessary to solve a number of tasks. In this article solves one of these problems – description of the indenter automated positioning mechanism kinematics and research of a working area. This article discusses a pantograph-type five-link manipulator. Linear actuators are used as drives. The 3D-model of the mechanism was developed in the Kompas-3D program. The kinematics of the manipulator is described using Denavit-Hartenberg parameters. The direct kinematics problem has been solved. Based on the solution obtained and the design features of the manipulator, the working area is investigated. The solution of the inverse kinematics problem in an analytical form for a special case is obtained. The solution contains transcendental functions, and since in the future it is assumed that the resulting solution will be used to control the manipulator, it is important to analyze the accuracy of calculations across the entire working area when using the expressions obtained. Such an analysis was carried out and calculations showed that when calculating with 5 decimal places accuracy, the deviation of the calculated coordinates from the specified ones is acceptable for this task on the entire working area. The obtained results make it possible to evaluate the characteristics and possibilities of practical use

of the designed mechanism. The constructed model using the Denavit-Hartenberg method will allow us to further consider the solution of the inverse kinematics problem in the general case and develop mechanism control.

**Введение.** В настоящее время предъявляются все более высокие требования к качеству различных деталей, которое во многом зависит от прочностных свойств исходных материалов. Традиционно эти свойства определяются прямыми методами разрушающих испытаний, которые требуют обязательное изготовление образцов-свидетелей. В условиях, когда возрастает необходимость контроля свойств материалов на всех этапах производства – от исходной заготовки до конечного продукта, использование разрушающих методов контроля нецелесообразно, а при некоторых технологиях производства (например, детали произведенные методом 3D-печати) или необходимости контроля на всей поверхности заготовки применение подобных методов невозможно [1]. В связи с этим возрастает актуальность безобразцовых методов контроля свойств материалов, одним из которых является инструментальное индентирование [2], позволяющее без разрушения детали и изготовления образцов определить твердость и модуль упругости материала [3]. В настоящее время выпускается различное оборудование для инструментального индентирования от переносных твердомеров до больших стационарных аппаратно-программных комплексов [4], и данное направление активно развивается – совершенствуются как датчики [5], так и методы испытания и обработки полученных результатов [6]. При этом, с учётом расширения номенклатуры испытываемых материалов и необходимости контроля их механических характеристик на разных этапах производственного цикла, большое прикладное значение имеет вопрос автоматизации процесса позиционирования индентора. На сегодняшний день существуют серийные установки для автоматизированного инструментального индентирования. Это, прежде всего, стационарные приборы для лабораторных испытаний, производимые зарубежными компаниями Rtec Instruments, CSM Instruments, Frontics Inc., а также российскими ФГБНУ "ТИСНУМ", выпускающим твердомеры серии «Наноскан». Существуют также и автоматизированные мобильные установки типа Frontics AIS [7], РИТ-02 [8], МРМ I2S, Тест-5У, SSM-M1000 [9] и др., предназначенные для экспресс-контроля материалов в производственных условиях. Вместе с тем, возможности существующих приборов инструментального индентирования являются ограниченными при контроле крупногабаритных изделий. Так, например, входной контроль поступающего на производство материала в виде листов или плит является затруднительным – из-за больших длины и ширины их зачастую не удаётся правильно расположить под испытательной установкой. Для таких случаев перспективным является использование манипулятора с закреплённым на нём нагружающим устройством для индентирования – применение такого устройства позволит проводить контроль механических характеристик на всей поверхности материала, что существенно расширит область применения метода инструментального индентирования в условиях производства. Цель данной работы – описать кинематическую модель манипулятора для автоматизации позиционирования индентора. Задачи: построить математическую модель и рабочую область механизма автоматизированного позиционирования индентора, а также рассмотреть точность вычислений обратной задачи кинематики для частного случая.

**Материалы и методы исследований.** Рассматриваемый манипулятор представляет собой пятизвенный механизм последовательной структуры с вращательными сочленениями (рис. 1). Первое звено соединено с основанием, на пятом звене расположен индентор. В механизме присутствуют два звена пантографного типа (звено 2 и 4). Звенья 3 и 5 хотя и являются частью кинематической цепи, и рассматриваются как отдельные звенья, не имеют собственных степеней свободы. По сути, это специальные конструктивные элементы, дополняющие геометрию звеньев пантографного типа до параллелограмма. Особенность звеньев пантографного типа в том, что при повороте такого звена в своей плоскости все последующие звенья сохраняют параллельность своим первоначальным положениям. В итоге, за счет конструкции манипулятора индентор всегда остается перпендикулярен поверхности основания.

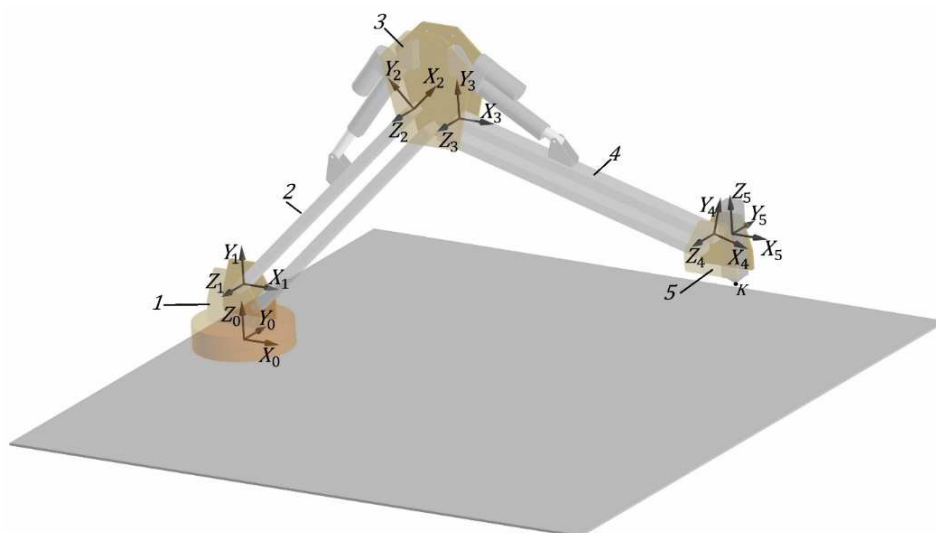


Рис. 1. Общий вид манипулятора, цифрами обозначены номера звеньев

Использование механизма последовательной структуры позволяет получить большую рабочую область. В некоторых источниках отмечается, что жесткость такой системы может быть меньше, чем у механизмов параллельной структуры [10], но применение линейных актуаторов позволяют достаточно жестко зафиксировать положение манипулятора в процессе индентирования.

Для построения рабочей области манипулятора необходимо решить прямую задачу кинематики, которую обычно решают с использованием метода Денавита-Хартенберга [11]. Например, в [12] и в [13] описывается кинематика механизмов последовательной структуры с использованием данного метода

Для построения управления механизмом позиционирования индентора необходимо решить обратную задачу кинематики. Не существует универсального алгоритма для получения аналитического решения ОЗК [14]. В ряде случаев аналитическое решение удастся получить, используя знание кинематической схемы конкретного механизма [15]. В исследованиях [16] и [17] знание геометрии и структуры манипуляторов позволили получить решение ОЗК в аналитическом виде. В [18] ОЗК решена для последовательных положений механизма, реализующих движение рабочего органа по заданной траектории.

Введем базовую систему координат  $X_0Y_0Z_0$ , связанную с основанием манипулятора, в которой плоскость  $OX_0Y_0$  расположена в плоскости крепления основания, а ось  $Z_0$  направим вдоль оси первого сочленения. Все последующие системы координат, связанные со звеньями механизма, вводятся в соответствии с методом Денавита-Хартенберга [19]. Системы координат, определяющие положения звеньев механизма представлены на рисунке 1.

Подход Денавита-Хартенберга к описанию кинематики механизма позволяет уменьшить количество координат, определяющих положение и ориентацию каждого последующего звена в системе координат предыдущего, и вместо шести координат, определяющих положение звена, требуется всего четыре. Эти координаты принято называть параметрами Денавита-Хартенберга (ДХ параметры) и для рассматриваемого манипулятора они приведены в таблице 1.

Табл. 1. ДХ параметры систем координат звеньев манипулятора

| Звено $i$ | $a_i$ | $\alpha_i$ | $d_i$ | $\theta_i$  |
|-----------|-------|------------|-------|-------------|
| 1         | $a_1$ | $\pi/2$    | $d_1$ | $\theta_1$  |
| 2         | $a_2$ | 0          | 0     | $\theta_2$  |
| 3         | $a_3$ | 0          | 0     | $-\theta_2$ |
| 4         | $a_4$ | 0          | 0     | $\theta_4$  |
| 5         | $a_5$ | $-\pi/2$   | 0     | $-\theta_4$ |

Для сочленений рассматриваемого манипулятора параметры  $d_i$ ,  $a_i$ , и  $\alpha_i$  обусловлены конструкцией механизма и являются постоянными, параметры  $\theta_i$  изменяются при вращении  $i$ -го звена относительно  $(i-1)$ -го, т.е. являются обобщенными координатами. Таким образом, положение механизма, однозначно характеризуется тремя угловыми координатами  $(\theta_1, \theta_2, \theta_4)$ . Поэтому несмотря на наличие линейных актуаторов удобно использовать именно угловые обобщенные координаты для описания кинематики манипулятора.

На заключительном этапе построим матрицы однородных преобразований  $A_i$ , которые связывают однородные координаты точки в  $i$ -й системе координат с координатами этой точки относительно  $(i-1)$ -й системы отсчета и являются произведением однородных матриц элементарного поворота-сдвига:

$$A_i = \begin{pmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & 0 \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i & 0 \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \theta_i & -\cos \alpha_i \sin \theta_i & \sin \alpha_i \sin \theta_i & a_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \alpha_i \cos \theta_i & -\sin \alpha_i \cos \theta_i & a_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Подставив в выражение (1) ДХ параметры рассматриваемого механизма из таблицы 1, получим матрицы однородных преобразований для рассматриваемого механизма:

$$A_1 = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & 0 & \sin \theta_1 & a_1 \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 & 0 & -\cos \theta_1 & a_1 \sin \theta_1 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 & a_2 \cos \theta_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 & a_2 \sin \theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & \sin \theta_2 & 0 & a_3 \cos \theta_2 \\ -\sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 & -a_3 \sin \theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} \cos \theta_4 & -\sin \theta_4 & 0 & a_4 \cos \theta_4 \\ \sin \theta_4 & \cos \theta_4 & 0 & a_4 \sin \theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} \cos \theta_4 & 0 & \sin \theta_4 & a_5 \cos \theta_4 \\ -\sin \theta_4 & 0 & \cos \theta_4 & -a_5 \sin \theta_4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Однородная матрица  $T_5$ , определяющая положение системы координат  $X_5Y_5Z_5$ , связанной с точкой крепления корпуса индентора, относительно неподвижной системы координат, представляет собой произведение матриц  $T_5 = A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$  и имеет вид:

$$T_5 = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 & \cos \theta_1 \cdot (a_1 + a_2 \cos \theta_2 + a_3 + a_4 \cos \theta_4 + a_5) \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 & \sin \theta_1 \cdot (a_1 + a_2 \cos \theta_2 + a_3 + a_4 \cos \theta_4 + a_5) \\ 0 & 0 & 1 & a_2 \sin \theta_2 + a_4 \sin \theta_4 + d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Наконечник индентора (точка  $K$  на рис. 1) во время позиционирования остается неподвижным с однородными координатами  $K_5 = (0 \ 0 \ -d_6 \ 1)^T$  относительно системы координат  $X_5Y_5Z_5$ . Используя выражение (3), можем получить однородные координаты точки  $K$  в неподвижной системе координат  $X_0Y_0Z_0$ :

$$K_0 = T_5 K_5 = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 \cdot (a_1 + a_2 \cos \theta_2 + a_3 + a_4 \cos \theta_4 + a_5) \\ \sin \theta_1 \cdot (a_1 + a_2 \cos \theta_2 + a_3 + a_4 \cos \theta_4 + a_5) \\ a_2 \sin \theta_2 + a_4 \sin \theta_4 + d_1 - d_6 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

**Результаты.** В выражении (4) часть параметров являются постоянными для рассматриваемого механизма, а именно:

$$\begin{aligned} a_1 &= 20 \text{ мм}, a_2 = 600 \text{ мм}, a_3 = 120 \text{ мм}, a_4 = 600 \text{ мм}, a_5 = 20 \text{ мм}, \\ d_1 &= 80 \text{ мм}, d_2 = 80 \text{ мм}. \end{aligned} \quad (5)$$

Подставив численные значения (5) в выражение (4), получим:

$$K_0 = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 \cdot (160 + 600 \cos \theta_2 + 600 \cos \theta_4) \\ \sin \theta_1 \cdot (160 + 600 \cos \theta_2 + 600 \cos \theta_4) \\ 600 \sin \theta_2 + 600 \sin \theta_4 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Конструкция механизма накладывает на углы  $\theta_1, \theta_2, \theta_4$  следующие ограничения:

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta_1 \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \theta_2 \leq \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta_4 \leq 0. \quad (7)$$

Подставив возможные значения углов (7) в выражение (6), построим рабочую область механизма автоматизированного позиционирования индентора в системе координат  $X_0 Y_0 Z_0$  (рис. 2).

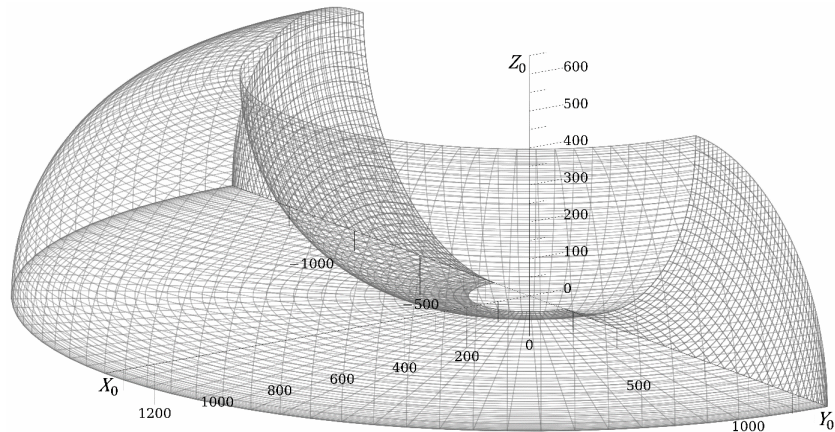


Рис. 2. Рабочая область манипулятора

Рассмотрим решение обратной задачи кинематики для частного, но практически важного случая – необходимо спозиционировать индентор в плоскости  $X_0 O Y_0$ . Т.е. необходимо провести индентирование некой листовой заготовки, лежащей на столе перед манипулятором. Рабочая область манипулятора в плоскости  $X_0 O Y_0$  представлена на рисунке 3.

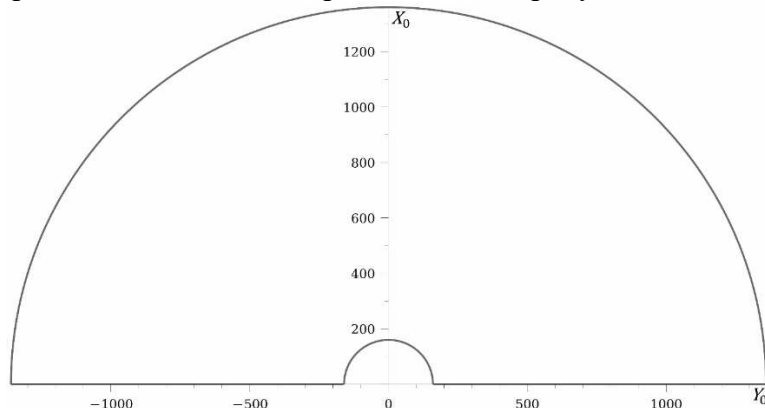


Рис. 3. Рабочая область манипулятора на плоскости  $X_0 O Y_0$

С учетом, что позиционирование индентора производится на плоскости  $X_0OY_0$  из выражения (6) получим:

$$\begin{cases} X_0 = \cos \theta_1 \cdot (160 + 600 \cos \theta_2 + 600 \cos \theta_4), \\ Y_0 = \sin \theta_1 \cdot (160 + 600 \cos \theta_2 + 600 \cos \theta_4), \\ 0 = 600 \sin \theta_2 + 600 \sin \theta_4. \end{cases} \quad (8)$$

Из последнего уравнения системы (8), с учетом конструктивных ограничений на углы (7) получим:

$$\theta_2 = -\theta_4 \quad (9)$$

Обозначим за  $r$  – расстояние от начала координат до точки на плоскости, в которой необходимо спозиционировать индентор. С одной стороны,  $r = \sqrt{X_0^2 + Y_0^2}$ , с другой стороны:  $X_0 = r \cos \theta_1$ ,  $Y_0 = r \sin \theta_1$ . Подставим данные соотношения и (9) в (8) получим:

$$\begin{cases} \sqrt{X_0^2 + Y_0^2} = 1200 \cos \theta_2 + 160, \\ Y_0 = \sin \theta_1 \sqrt{X_0^2 + Y_0^2}. \end{cases} \quad (10)$$

Решая (10), с учетом (9) получаем:

$$\begin{cases} \theta_2 = \arccos \left( \frac{\sqrt{X_0^2 + Y_0^2} - 160}{1200} \right), \\ \theta_4 = -\arccos \left( \frac{\sqrt{X_0^2 + Y_0^2} - 160}{1200} \right), \\ \theta_1 = \arcsin \left( \frac{Y_0}{\sqrt{X_0^2 + Y_0^2}} \right). \end{cases} \quad (11)$$

Выражения (11) являются аналитическим решением ОЗК для рассматриваемого частного случая.

Поскольку решение содержит трансцендентные функции, важно проанализировать точность численных вычислений во всей рабочей области. Сначала с шагом в 10 мм. по каждой координате возьмем точки в области  $X_0 = 0...1360$  мм,  $Y_0 = -1360...1360$  мм (прямоугольник, в который вписана рабочая область), затем отбросим те, которые не попадают в рабочую область. В итоге получим 28769 точек для проверки точности численных вычислений, равномерно распределенных по рабочей области.

Для каждой из отобранных точек, были сначала рассчитаны углы  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\theta_4$  используя аналитическое решение (11), затем получившиеся значения углов были подставлены в (8). В итоге, для каждой заданной точки с координатами  $(X_0, Y_0)$ , была получена расчетная точка в рабочей области, ее координаты обозначим  $(X_{0p}, Y_{0p})$ . Далее посчитаем  $\Delta$  – отклонение расчетной точки от заданной, по формуле:

$$\Delta = \sqrt{(X_{0p} - X_0)^2 + (Y_{0p} - Y_0)^2}. \quad (12)$$

Для понимания точности вычислений в различных точках рабочей области были проведены вычисления с различным количеством знаков после запятой. На рисунке 4 визуальным образом представлены результаты расчетов с точностью 3, 4 и 5 знаков после запятой. Для наглядности, каждая исходная точка на графике окрашена в один из трех цветов, в зависимости от  $\Delta$ : зеленый – ошибка менее 2 мм (такая точность удовлетворительна для данной задачи), желтый – 2...10 мм., красный – более 10 мм.

Проведенный анализ показывает, что при вычислениях с точностью 3 знака после запятой, ошибка вычислений будет достаточно большой притом на всей рабочей области. При расчетах с точностью до 4-го знака после запятой, большие ошибки наблюдаются только

на границе рабочей области, повышение точности до 5-го знака, практически полностью убирает ошибки и там. Дальнейшее повышение точности вычислений не приносит заметного улучшения результата.

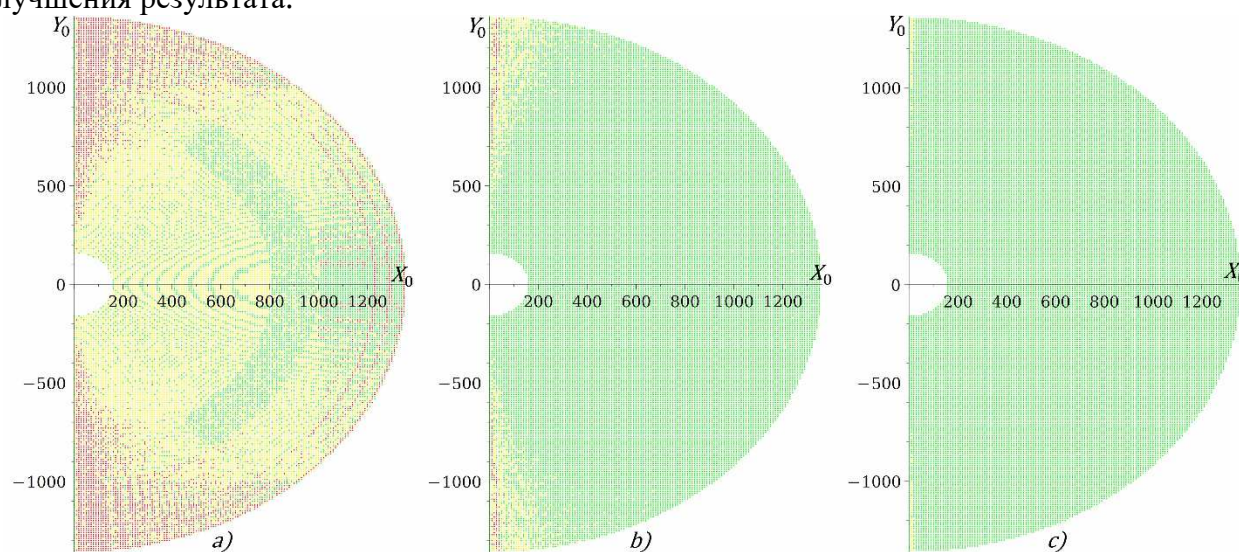


Рис. 4. Отклонение расчетной точки от заданной при расчетах с различной точностью: *a* – 3 знака после запятой; *b* – 4 знака после запятой; *c* – 5 знаков после запятой

**Выводы.** Результаты, полученные в работе с использованием представлений Денавита-Хартенберга, позволяют оценить размер и конфигурацию рабочей области. С помощью построенного описания кинематики механизма получено решение в аналитическом виде обратной задачи кинематики в частном случае, проведена оценка точности расчетов по отклонению расчетных значений от заданных на всем рассматриваемом участке рабочей области. Результаты численных вычислений, представленные на рисунке 4, показывают приемлемую точность вычислений для данной модели при выборе четырех и более знаков после запятой.

**Заключение.** Полученная кинематическая модель механизма в дальнейшем позволит рассмотреть решение обратной задачи кинематики в общем случае. Продолжение исследований позволит построить динамическую модель механизма, разработать систему управления, обеспечивающую приемлемую точность позиционирования во всей рабочей области, что в свою очередь будет использовано при создании манипулятора для оперативного контроля механических характеристик материала на производстве.

**Благодарности и финансирование.** Данная работа финансировалась за счет средств бюджета в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ № FSWF-2025-0010 «Разработка научно-технических основ создания программных и аппаратных решений для управления объектами энергетики с использованием цифровых двойников и технологий искусственного интеллекта». Никаких дополнительных грантов на проведение или руководство данным конкретным исследованием получено не было. Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

#### Список литературы

1. Протасеня Т.А., Крень А.П., Дьякова Г.Н. Применение метода динамического индентирования для оценки твердости и модуля упругости материала изделий, полученных экструзионным методом аддитивного производства из угленаполненных композитных материалов // Механика композитных материалов. – 2022. – Т. 58, №3. – С. 545-562. – doi.org/10.22364/mkm.58.3.05.
2. Решетов В.Н., Красногоров И.В., Соловьев В.В., Гладких Е.В., Усейнов А.С. Оборудование для инструментального индентирования – принципы работы и особенности конструирования // Наноиндустрия. – 2022. – Т. 15, №7-8. – С. 466-476. – doi.org/10.22184/1993-8578.2022.15.7-8.466.476.
3. Орешко Е.И., Ерасов В.С., Яковлев Н.О., Уткин Д.А. Методы определения механических характеристик материалов с помощью индентирования (обзор) // Авиационные материалы и технологии. – 2021. – №1(62). – С. 104-118. – doi.org/10.18577/2713-0193-2021-0-1-104-118.

4. Орешко Е.И., Ерасов В.С., Уткин Д.А., Автаева Я.В. Оборудование для определения физико-механических характеристик материалов методом вдавливания (обзор) // *Авиационные материалы и технологии*. – 2021. – №4(65). – С. 107-124. – doi.org/10.18577/2713-0193-2021-0-4-107-124.
5. Колганов О.А., Хошев А.Е., Егоров Р.А., Федоров А.В., Лукьянов Г.Н., Коняшов В.В. Разработка макета датчика для прибора динамического индентирования // *Дефектоскопия*. – 2023. – №9. – С. 64-66. – doi.org/10.31857/S0130308223090099.
6. Федоткин А.П., Гладких Е.В., Русаков А.А., Усеинов А.С. Анализ деформационного поведения материалов при индентировании с использованием методов цифровой обработки изображений // *Известия вузов. Химия и химическая технология*. – 2023. – Т. 66, №10. – С. 102-108. – doi.org/10.6060/ivkkt.20236610.11y.
7. Lee J.S., Lee K.G., Lee S., Kwon O.M., Kang W.K., Lim J.I., Lee H.K., Kim S.M., Kwon D. Application of Macro-Instrumented Indentation Test for Superficial Residual Stress and Mechanical Properties Measurement for HY Steel Welded T-Joints // *Materials*. 2021, vol. 14, no. 8, – p. 2061. doi.org/10.3390/ma14082061.
8. Katok O.A., Kravchuk R.V., Sereda A.V., Kharchenko V.V., Rudnytski M.P. Updating of a Portable Installation for Determining the Strength Characteristics of Structural Elements by Instrumented Indentation // *Strength of Materials*. 2023, vol. 55, no. 5, pp. 954-959. doi.org/10.1007/s11223-023-00586-5.
9. Haggag F.M. Innovative SSM technology determines structural integrity of metallic structures: example applications for pressure vessels and oil and gas pipelines // *International Journal of Pure Applied Physics*. 2007, vol. 3, no. 1, pp. 91-108.
10. Эрастова К.Г. Влияние особых положений на жесткость механизмов параллельной структуры // *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*. 2020. – №8(725). – С. 21-28. – doi.org/10.18698/0536-1044-2020-8-21-28.
11. Dikmenli S. Forward & Inverse Kinematics Solution of 6-Dof Robots Those Have Offset & Spherical Wrists // *Eurasian Journal of Science Engineering and Technology*. 2022, vol. 3, no. 1, pp. 14-28. doi.org/10.55696/ejset.1082648.
12. Круглов С.П., Иванченко С.А., Ковыршин С.В. Решение прямой расширенной задачи кинематики для манипулятора инвалидного кресла // *Вестник ПНИПУ. Электротехника, информационные технологии, системы управления*. – 2022. – №41. – С. 146-167. – doi.org/10.15593/2224-9397/2022.1.07.
13. Меркурьев И.В., Чунг Ч.Т., Сайпулаев Г.Р., Сайпулаев М.Р., Диб Д. Разработка модели кинематики пальцев человеческой руки, применяемых в роботизированных перчатках // *Механика машин, механизмов и материалов*. – 2023. – №4(65). – С. 106-113. – doi.org/10.46864/1995-0470-2023-4-65-106-113.
14. Колтыгин Д.С., Седельников И.А. Метод и программа решения прямой и обратной задачи кинематики для управления роботом-манипулятором // *Системы. Методы. Технологии*. – 2020. – №4(48). – С. 65-74. – doi.org/10.18324/2077-5415-2020-4-65-74.
15. Братчиков С.А., Абрамова Е.А., Федосов Ю.В. Решение обратной задачи кинематики манипулятора // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. – 2021. – №56. – С. 4-11. – doi.org/10.17223/19988605/56/1.
16. Xu Y., Yang F., Mei Y., Zhang D., Zhou Y., Zhao Y. Kinematic, Workspace and Force Analysis of A Five-DOF Hybrid Manipulator R(2RPR)R/SP+RR // *Chinese Journal of Mechanical Engineering*. 2022, no. 35, p. 123. doi.org/10.1186/s10033-022-00792-3.
17. López-Custodio P.C., Fu R., Dai J.S., Jin Y. Compliance model of Exechon manipulators with an offset wrist // *Mechanism and Machine Theory*. 2022, vol. 167, p. 104558. doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2021.104558.
18. Круглов С.П., Иванченко С.А. Решение обратной задачи кинематики для автомобильного манипулятора инвалидного кресла с оптимизацией скорости раскладки // *Вестник ПНИПУ. Электротехника, информационные технологии, системы управления*. – 2023. – №47. – С. 151-172. – doi.org/10.15593/2224-9397/2023.3.08.
19. Lynch K.M., Park F.C., *Modern Robotics: Mechanics, Planning, and Control*. – Cambridge University Press, 2017. – 624 p.

## References

1. Pratasenya T.A., Kren A.P., Dyakova G.N. Application of the Dynamic Indentation Method for Evaluation of the Hardness and Elastic Modulus of the Material of Products Obtained by Extrusion Method of Additive Production from Carbon-Filled Composite Materials // *Mechanics of Composite Materials*. 2022, vol. 58, no. 3, pp. 545-562. doi.org/10.22364/mkm.58.3.05.
2. Reshetov V.N., Krasnogorov I.V., Solovyov V.V., Gladkikh E.V., Useinov A.S. Equipment for Instrumented Nanoindentation – Principles of Operation and Design Features // *Nanoindustry*. 2022, vol. 15, no. 7-8, pp. 466-476. doi.org/10.22184/1993-8578.2022.15.7-8.466.476.
3. Orshko E.I., Erasov V.S., Yakovlev N.O., Utkin D.A. Methods for Determining the Mechanical Characteristics of Materials Using Indentation (review) // *Aviation Materials and Technologies*. 2021, no. 1(62), pp. 104-118. doi.org/10.18577/2713-0193-2021-0-1-104-118.
4. Orshko E.I., Erasov V.S., Utkin D.A., Avtayeva Ya.V. The Equipment for Definition of Physicomechanical Characteristics of Materials by Press-In Method (review) // *Aviation Materials and Technologies*. 2021, no. 4(65), pp. 107-124. doi.org/10.18577/2713-0193-2021-0-4-107-124.

5. Kolganov O.A., Khoshev A.E., Egorov R.A., Fedorov A.V., Lukyanov G.N., Konyashov V.V. Development of a Sensor Layout for a Dynamic Indentation Device // Defectoscopy. 2023, no. 9, pp. 64-66. doi.org/10.31857/S0130308223090099.
6. Fedotkin A.P., Gladkikh E.V., Rusakov A.A., Useinov A.S. Digital Processing of Surface Images After Indentation to Analyze the Deformation Behavior of the Material // ChemChemTech. 2023, vol. 66, no. 10, pp. 102-108. doi.org/10.6060/ivkkt.20236610.11y.
7. Lee J.S., Lee K.G., Lee S., Kwon O.M., Kang W.K., Lim J.I., Lee H.K., Kim S.M., Kwon D. Application of Macro-Instrumented Indentation Test for Superficial Residual Stress and Mechanical Properties Measurement for HY Steel Welded T-Joints // Materials. 2021, vol. 14, no. 8, – p. 2061. doi.org/10.3390/ma14082061.
8. Katok O.A., Kravchuk R.V., Sereda A.V., Kharchenko V.V., Rudnytski M.P. Updating of a Portable Installation for Determining the Strength Characteristics of Structural Elements by Instrumented Indentation // Strength of Materials. 2023, vol. 55, no. 5, pp. 954-959. doi.org/10.1007/s11223-023-00586-5.
9. Haggag F.M. Innovative SSM technology determines structural integrity of metallic structures: example applications for pressure vessels and oil and gas pipelines // International Journal of Pure Applied Physics. 2007, vol. 3, no. 1, pp. 91-108.
10. Erastova K.G. The Influence of Special Positions on the Rigidity of Parallel Structure Mechanisms // BMSTU Journal of Mechanical Engineering. 2020, no. 8(725), pp. 21-28. doi.org/10.18698/0536-1044-2020-8-21-28.
11. Dikmenli S. Forward & Inverse Kinematics Solution of 6-Dof Robots Those Have Offset & Spherical Wrists // Eurasian Journal of Science Engineering and Technology. 2022, vol. 3, no. 1, pp. 14-28. doi.org/10.55696/ejset.1082648.
12. Kruglov S.P., Ivanchenko S.A., Kovyrshin S.V. Solution of Direct Extended Problem of Kinematics for Wheelchair Manipulator // Bulletin of Perm national research polytechnic university. Electrical engineering, information technology, control systems. 2022, no. 41, pp. 146-167. doi.org/10.15593/2224-9397/2022.1.07.
13. Merkuryev I.V., Chung C.T., Saypulaev G.R., Saypulaev M.R., Deeb D. Development of a Kinematics Model of Human Fingers for Application in Robotic Gloves // Mechanics of Machines, Mechanisms and Materials. 2023, no. 4(65), pp. 106-113. doi.org/10.46864/1995-0470-2023-4-65-106-113.
14. Kolytgin D.S., Sedelnikov I.A. Method and Program for Solving Direct and Inverse Kinematics Problems for Controlling a Robot Manipulator // Systems. Methods. Technologies. 2020, no. 4(48), pp. 65-74. doi.org/10.18324/2077-5415-2020-4-65-74.
15. Bratchikov S.A., Abramova E.A., Fedosov U.V. Solution of the Inverse Kinematics Problem of the Manipulator // Tomsk State University Journal of Control and Computer Science. 2021, no. 56, pp. 4-11. doi.org/10.17223/19988605/56/1.
16. Xu Y., Yang F., Mei Y., Zhang D., Zhou Y., Zhao Y. Kinematic, Workspace and Force Analysis of A Five-DOF Hybrid Manipulator R(2RPR)R/SP+RR // Chinese Journal of Mechanical Engineering. 2022, no. 35, p. 123. doi.org/10.1186/s10033-022-00792-3.
17. López-Custodio P.C., Fu R., Dai J.S., Jin Y. Compliance model of Exechon manipulators with an offset wrist // Mechanism and Machine Theory. 2022, vol. 167, p. 104558. doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2021.104558.
18. Kruglov S.P., Ivanchenko S.A. Solution of Inverse Kinematics Problem for Car Robotics Wheelchair Loader With Speed Extension Optimization // Bulletin of Perm national research polytechnic university. Electrical engineering, information technology, control systems. 2023, no. 47, pp. 151-172. doi.org/10.15593/2224-9397/2023.3.08.
19. Lynch K.M., Park F.C., Modern Robotics: Mechanics, Planning, and Control. – Cambridge University Press, 2017. – 624 p.

*Сведения об авторах:*

*Information about authors:*

|                                                                                                                                                           |                                                                                                                                                                                    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Орлов Константин Игоревич</b> – ассистент кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин                                               | <b>Orlov Konstantin Igorevich</b> – assistant of the Department of robotics, mechatronics, dynamics and strength of machines                                                       |
| <b>Меркурьев Игорь Владимирович</b> – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин      | <b>Merkuryev Igor Vladimirovich</b> – doctor of technical sciences, professor, head of the Department of robotics, mechatronics, dynamics and strength of machines                 |
| <b>Орлов Игорь Викторович</b> – кандидат технических наук, заведующий учебной лабораторией кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин | <b>Orlov Igor Victorovich</b> – candidate of technical sciences, head of the educational laboratory of the Department of robotics, mechatronics, dynamics and strength of machines |
| <b>Зубрильчев Даниил Русланович</b> – аспирант                                                                                                            | <b>Zubrilchev Daniil Ruslanovich</b> – postgraduate student                                                                                                                        |
| OrlovKI@mpei.ru                                                                                                                                           |                                                                                                                                                                                    |

Получена 09.04.2026