

МЕТОДИКА ИДЕНТИФИКАЦИИ ПОГРЕШНОСТЕЙ УСТАНОВКИ МЕКАНУМ-КОЛЕС НА МОБИЛЬНОЙ ПЛАТФОРМЕ

Сайпулаев Г.Р., Калинин Г.Н., Волошко Д.Д., Леонтьев С.В.
Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва

Ключевые слова: всенаправленная платформа, кинематика, неголономные связи, методика идентификации, механум-колесо, механум-платформа.

Аннотация. В рамках данной работы ставится задача разработки методики идентификации погрешностей установки механум-колес на мобильную платформу на основе кинематической модели движения робота. Рассматривается кинематика механум-платформы с учетом неортогональности осей колес и продольной оси платформы. Представлена формула для оценки величин погрешностей установки механум-колес на платформе и указано ограничение на выбор калибровочных движений. Методика идентификации основана на использовании метода наименьших квадратов и линеаризации модели кинематики по малым погрешностям установки механум-колес на платформе. По проведенному численному эксперименту продемонстрирована работоспособность разработанной методики идентификации погрешностей и предложено одно из возможных калибровочных движений робота. Из численного эксперимента определена относительная погрешность оценки углов неортогональности осей колес, составившая 0,04%. Полученная методика идентификации погрешностей платформы с механум-колесами может быть применена в режиме реального времени при движении робота. Для использования методики необходимо обеспечить наличие измерений угловых скоростей механум-колес, полученных с энкодеров, и линейной и угловых скоростей мобильной платформы, полученных с внешней навигационной системы. Результаты работы могут быть использованы для уточнения системы управления движением робота на кинематическом уровне.

METHODOLOGY FOR IDENTIFYING INSTALLATION ERRORS OF MECANUM-WHEELS ON A MOBILE PLATFORM

Saypulaev G.R., Kalinin G.N., Voloshko D.D., Leontyev S.V.
National Research University "Moscow Power Engineering Institute", Moscow

Keywords: omnidirectional platform, kinematics, nonholonomic constraints, identification methodic, mecanum-wheel, mecanum-platform.

Abstract. This paper aims to develop a method for identifying installation errors in mecanum-wheels on a mobile platform based on a kinematic model of robot motion. The kinematics of the mecanum-platform are considered, taking into account the non-orthogonality of the wheel axes and the platform's longitudinal axis. Formula for estimating the installation errors of mecanum-wheels on the platform are presented, and limitations on the choice of calibration movements are indicated. The identification method is based on the use of the least squares method and the linearization of the kinematics model based on small errors in the installation of mecanum-wheels on the platform. A numerical experiment demonstrates the effectiveness of the developed error identification method, and one possible calibration movement for the robot is proposed. From a numerical experiment, the relative error in estimating the angles of non-orthogonality of the wheel axles was determined to be 0.04%. The resulting error identification method for a platform with mecanum-wheels can be applied in real time during robot motion. To use the method, it is necessary to ensure the availability of measurements of the angular velocities of the mecanum-wheels obtained from the encoders, and the linear and angular velocities of the mobile platform obtained from the external navigation system. The results of this study can be used to improve the robot's motion control system at the kinematic level.

Введение

Роботы, способные осуществлять всенаправленное движение, широко применяются при работе на складах в качестве высокоманевренных погрузчиков. Одним из типов роботов всенаправленного движения являются мобильные платформы, оснащенные механум-колесами [1].

В статье [2] предложено робастное оптимальное управление слежением трёхколёсной механум-платформой. Построены уравнений динамики в форме Эйлера–Лагранжа с учетом

проскальзывания точек контакта колес. Для решения задачи оптимального управления слежением применен онлайн-алгоритм синхронного обучения «актер–критик». А в работе [3] проведен сравнительный анализ двух законов управления кинематикой механум-платформы, полученных на основе функций Ляпунова.

В работе [4] описаны сложности при моделировании и управлении движением мобильных колесных роботов при наличии проскальзывания точек контакта колес с опорной поверхностью. А в статье [5] предлагается алгоритм планирования пути, минимизирующий энергозатраты на осуществления движения.

Помимо проскальзывания к отклонениям робота от требуемого движения могут приводить погрешности изготовления робота, включая неточности установки механум-колес на платформу [6]. Определение величин указанных погрешностей ранее не проводилось.

Указанные эффекты могут существенно повлиять на точность одометрической навигации. Так, например, в работе [7] представлено влияние частичного учета конструкции механум-колес на точность навигации мобильной платформы KUKA youBot.

Одним из способов повышения точности управления движением мобильных роботов является идентификация параметров математической модели, на основе которой производится синтез законов управления. Одни из таких методик идентификации параметров математической модели предложены в работах [8, 9].

В рамках данной работы ставится задача разработки методики идентификации погрешностей установки механум-колес на мобильную платформу на основе кинематической модели движения робота.

Материалы и методы исследований. Для идентификации погрешностей установки механум-колес на мобильной платформе необходимо использовать математическую модель движения робота. На рисунке 1 приведена кинематическая схема платформы с 4-мя механум-колесами для пояснения обозначений, используемых в математической модели движения.

Введем неподвижную систему координат XYZ и подвижную систему координат S_{xyz} , связанной с платформой и начало которой расположено в геометрическом центре платформы.

При математическом моделировании используем следующие обозначения: $2h$ – расстояние между передними и задними парами колес; $2l$ – расстояние между левыми и правыми парами колес; R – радиус механум-колес; $\Delta\alpha_i$ – угол, характеризующий неортогональность оси i -го колеса и продольной оси платформы S_x .

Движение платформы опишем в терминах продольной V_x и поперечной V_y линейных скоростей геометрического центра платформы и угловой скорости Ω вращения платформы вокруг вертикальной оси.

Уравнения обратной кинематики робота с механум-колесами с учетом погрешностей $\Delta\alpha_i$ установки колес на платформу имеют вид [6]:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \frac{1}{R} [V_x - V_y - (h+l)\Omega] \cos \Delta\alpha_1 + \frac{1}{R} [V_x + V_y + (h-l)\Omega] \sin \Delta\alpha_1, \\ \omega_2 &= \frac{1}{R} [V_x + V_y + (h+l)\Omega] \cos \Delta\alpha_2 - \frac{1}{R} [V_x - V_y - (h-l)\Omega] \sin \Delta\alpha_2, \\ \omega_3 &= \frac{1}{R} [V_x + V_y - (h+l)\Omega] \cos \Delta\alpha_3 - \frac{1}{R} [V_x - V_y + (h-l)\Omega] \sin \Delta\alpha_3, \\ \omega_4 &= \frac{1}{R} [V_x - V_y + (h+l)\Omega] \cos \Delta\alpha_4 + \frac{1}{R} [V_x + V_y - (h-l)\Omega] \sin \Delta\alpha_4,\end{aligned}\tag{1}$$

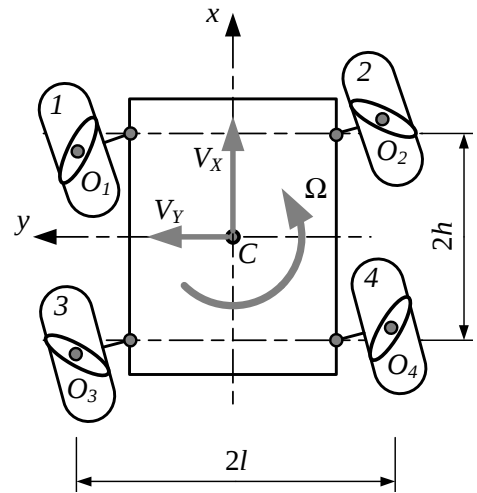


Рис. 1. Кинематическая схема платформы с механум-колесами при наличии погрешностей установки колес

где ω_i – угловая скорость вращения механум-колеса вокруг собственной оси. Здесь и далее используются сокращения для тригонометрических функций: $\cos x = c x$, $\sin x = s x$. Уравнения (1) получены из условия непроскальзывания точек контакта колес с опорной поверхностью.

Уравнения (1) для дальнейших преобразований удобно представить в матричной форме:

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{H}(\Delta\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{v}, \quad (2)$$

где $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3 \ \omega_4)^T$ – вектор угловых скоростей механум-колес; $\mathbf{v} = (V_x \ V_y \ \Omega)^T$ – вектор скоростей платформы; $\Delta\boldsymbol{\alpha} = (\Delta\alpha_1 \ \Delta\alpha_2 \ \Delta\alpha_3 \ \Delta\alpha_4)^T$ – вектор погрешностей; а матрица $\mathbf{H}(\Delta\boldsymbol{\alpha})$ коэффициентов имеет вид:

$$\mathbf{H}(\Delta\boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{R} \begin{pmatrix} c\Delta\alpha_1 + s\Delta\alpha_1 & s\Delta\alpha_1 - c\Delta\alpha_1 & (h-l)s\Delta\alpha_1 - (h+l)c\Delta\alpha_1 \\ c\Delta\alpha_2 - s\Delta\alpha_2 & s\Delta\alpha_2 + c\Delta\alpha_2 & (h-l)s\Delta\alpha_2 + (h+l)c\Delta\alpha_2 \\ c\Delta\alpha_3 - s\Delta\alpha_3 & s\Delta\alpha_3 + c\Delta\alpha_3 & -(h-l)s\Delta\alpha_3 - (h+l)c\Delta\alpha_3 \\ c\Delta\alpha_4 + s\Delta\alpha_4 & s\Delta\alpha_4 - c\Delta\alpha_4 & -(h-l)s\Delta\alpha_4 + (h+l)c\Delta\alpha_4 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Уравнения прямой кинематики в случае учета погрешностей установки колес можно получить из уравнений (2), используя псевдообратную матрицу [10]:

$$\mathbf{v} = \mathbf{H}^+(\Delta\boldsymbol{\alpha}) \boldsymbol{\omega}. \quad (4)$$

Здесь $\mathbf{H}^+(\Delta\boldsymbol{\alpha}) = [\mathbf{H}^T(\Delta\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{H}(\Delta\boldsymbol{\alpha})]^{-1} \mathbf{H}^T(\Delta\boldsymbol{\alpha})$ – псевдообратная матрица Мура–Пенроуза

С учетом малости погрешностей $\Delta\alpha_i$ проведем линеаризацию уравнений (4) по вектору $\Delta\boldsymbol{\alpha}$:

$$\mathbf{v} = \mathbf{H}^+(0) \boldsymbol{\omega} + \mathbf{A}(\boldsymbol{\omega}) \Delta\boldsymbol{\alpha}, \quad (5)$$

$$\text{где } \mathbf{A}(\boldsymbol{\omega}) = \left(\frac{\partial \mathbf{H}^+(\Delta\boldsymbol{\alpha})}{\partial \Delta\alpha_1} \boldsymbol{\omega} \quad \frac{\partial \mathbf{H}^+(\Delta\boldsymbol{\alpha})}{\partial \Delta\alpha_2} \boldsymbol{\omega} \quad \frac{\partial \mathbf{H}^+(\Delta\boldsymbol{\alpha})}{\partial \Delta\alpha_3} \boldsymbol{\omega} \quad \frac{\partial \mathbf{H}^+(\Delta\boldsymbol{\alpha})}{\partial \Delta\alpha_4} \boldsymbol{\omega} \right) \bigg|_{\Delta\boldsymbol{\alpha}=0}.$$

Полагая, что при движении робота в каждый момент времени $t_j \in [t_0; t_N]$ доступны измерения угловых скоростей механум-колес $\boldsymbol{\omega}_s(t_j)$, полученные с помощью энкодеров, установленных на двигателях колес, и скорости платформы $\mathbf{v}_s(t_j)$, полученные с внешней навигационной системы робота, запишем уравнения модели измерений в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_s(t_0) &= \mathbf{H}^+(0) \boldsymbol{\omega}_s(t_0) + \mathbf{A}(\boldsymbol{\omega}_s(t_0)) \Delta\boldsymbol{\alpha}, \\ &\vdots \\ \mathbf{v}_s(t_N) &= \mathbf{H}^+(0) \boldsymbol{\omega}_s(t_N) + \mathbf{A}(\boldsymbol{\omega}_s(t_N)) \Delta\boldsymbol{\alpha}. \end{aligned} \quad (6)$$

Объединяя уравнения (6) для каждого момента времени в единую систему, получим:

$$\mathbf{A}_\Sigma \Delta\boldsymbol{\alpha} = \Delta\mathbf{v}, \quad (7)$$

где матрица $\mathbf{A}_\Sigma$ и вектор $\Delta\mathbf{v}$ представляются в виде:

$$\mathbf{A}_\Sigma = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(\boldsymbol{\omega}_s(t_0)) \\ \vdots \\ \mathbf{A}(\boldsymbol{\omega}_s(t_N)) \end{bmatrix}, \quad \Delta\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_s(t_0) - \mathbf{H}^+(0) \boldsymbol{\omega}_s(t_0) \\ \vdots \\ \mathbf{v}_s(t_N) - \mathbf{H}^+(0) \boldsymbol{\omega}_s(t_N) \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Используя формулу метода наименьших квадратов, получим оценку вектора погрешностей $\Delta\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ в виде:

$$\Delta\hat{\boldsymbol{\alpha}} = (\mathbf{A}_\Sigma^T \mathbf{A}_\Sigma)^{-1} \mathbf{A}_\Sigma^T \Delta\mathbf{v}. \quad (9)$$

В результате методика идентификации погрешностей сводится к определению оценки вектора погрешностей $\Delta\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ по измерениям угловых скоростей механум-колес и скоростей платформы, полученных при движении робота по калибровочным движениям. В качестве

критерия для выбора калибровочных движений робота используется условие невырожденности матрицы $A_{\Sigma}^T A_{\Sigma}$, т.е. $\det(A_{\Sigma}^T A_{\Sigma}) \neq 0$.

Результаты. Проведем численный эксперимент по оценке пригодности методики идентификации погрешностей установки колес на платформе. В качестве примера численных параметров робота примем $h = 0,2$ м; $l = 0,3$ м; $R = 0,05$ м. В качестве калибровочного движения (рис. 2) выберем последовательность из поступательных движений платформы вдоль продольной и поперечной оси робота и вращения вокруг вертикальной оси платформы.

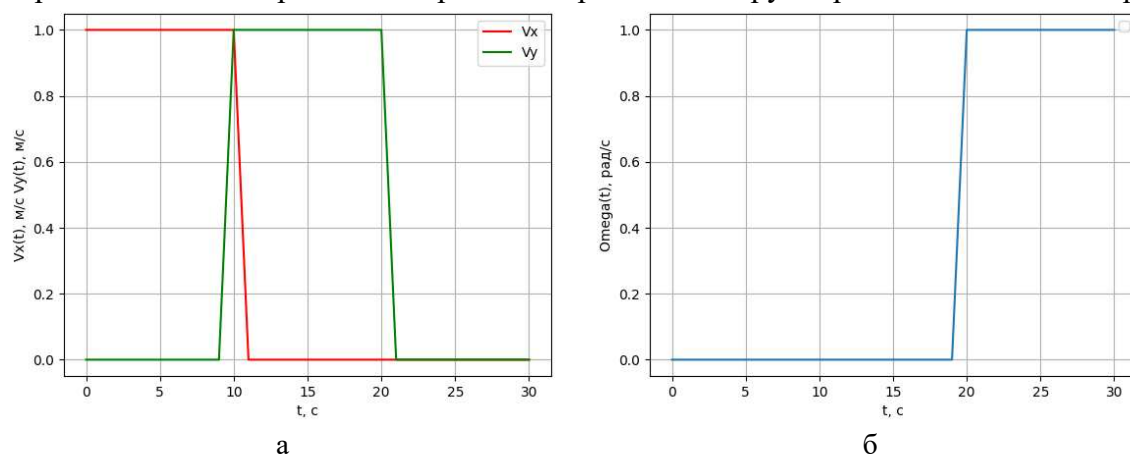


Рис. 2. Зависимости скоростей платформы для калибровочного движения

Сгенерируем по формулам (2) зависимости угловых скоростей вращения колес (рис. 3), соответствующие погрешностям установки колес $\Delta\alpha_1 = 0,01$ рад; $\Delta\alpha_2 = \Delta\alpha_3 = \Delta\alpha_4 = 0$.

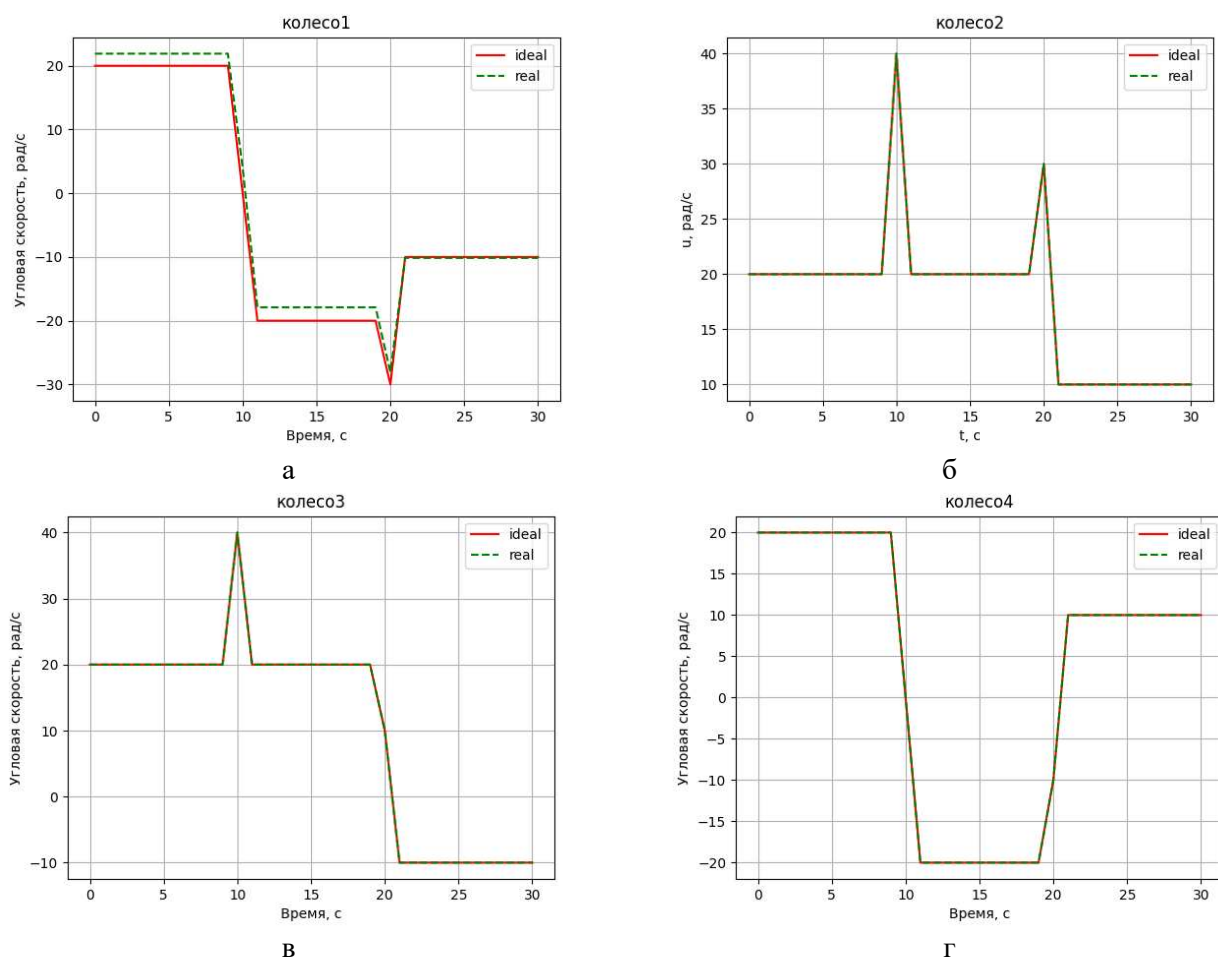


Рис. 3. Зависимости угловых скоростей механум-колес: «real» – при учете погрешностей; «ideal» – без учета погрешностей

Вычисляя оценку вектора погрешностей по формуле (9), получаем:

$$\Delta\alpha_1 = 0,009996 \text{ рад}, \Delta\alpha_2 = \Delta\alpha_3 = \Delta\alpha_4 = 0. \quad (10)$$

Полученные оценки погрешностей установки механум-колес на платформы подтвердили работоспособность предложенной методики идентификации параметров. Относительная погрешность определения углов, характеризующих неортогональность осей колес продольной оси платформы, составила около 0,04%.

Выводы. По результатам численного эксперимента для примера заданных погрешностей установки колес была продемонстрирована работоспособность методики идентификации погрешностей с высокой точностью. Относительная погрешность оценки составила 0,04%.

По результатам работы получены формулы для оценки погрешностей установки механум-колес на мобильной платформе, характеризующих неортогональность осей колес и продольной оси симметрии платформы. Полученная методика идентификации погрешностей платформы с механум-колесами может быть применена в режиме реального времени при движении робота. Результаты работы могут быть использованы для уточнения системы управления движением робота на кинематическом уровне.

Заключение

В данной работе на основе уравнений кинематики робота с механум-колесами построена методика идентификации погрешностей установки колес на платформе. Оценка вектора погрешностей получена на основе метода наименьших квадратов. Указано ограничение, накладываемое на калибровочные движения робота.

По проведенному численному эксперименту продемонстрирована работоспособность разработанной методики идентификации погрешностей и предложено одно из возможных калибровочных движений робота.

Полученная методика идентификации погрешностей платформы с механум-колесами может быть применена в режиме реального времени при движении робота. Результаты работы могут быть использованы для уточнения системы управления движением робота на кинематическом уровне.

Список литературы

1. Li Y., Ge S., Dai S., Zhao L., Yan X., Zheng Y., Shi Y. Kinematic Modeling of a Combined System of Multiple Mecanum-Wheeled Robots with Velocity Compensation // *Sensors*. 2019, vol. 20, no. 1, p. 75. doi.org/10.3390/s20010075.
2. Zhang D., Wang G., Wu Z. Reinforcement Learning-Based Tracking Control for a Three Mecanum Wheeled Robot // *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*. 2022, vol. 35, no. 1, pp. 1445-1452. doi.org/10.1109/TNNLS.2022.3185055.
3. Сайпулаев Г.Р., Калинин Г.Н. Кинематическое управление механум-платформой на основе функций Ляпунова // *Транспортное, горное и строительное машиностроение: наука и производство*. – 2025. – №32. – С. 9-15. – DOI: 10.26160/2658-3305-2025-32-9-15.
4. Wang D., Low C.B. Modeling and Analysis of Skidding and Slipping in Wheeled Mobile Robots: Control Design Perspective // *IEEE Transactions on Robotics and Automation*. 2008, vol. 24, no. 3, pp. 676-687. doi.org/10.1109/TRO.2008.921563.
5. Xie L., Henkel C., Stol K., Xu W. Power-Minimization and Energy-Reduction Autonomous Navigation of an Omnidirectional Mecanum Robot via the Dynamic Window Approach Local Trajectory Planning // *International Journal of Advanced Robotics Systems*. 2018, vol. 15, no. 1, pp. 1-12. doi.org/10.1177/1729881418754563.
6. Панкратьева Г.В., Мордин А.Е., Сайпулаев Г.Р. Анализ точности позиционирования при конструкционных погрешностях в установке механум-колёс мобильной платформы // *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don)*. – 2023. – Т. 23, № 4. – С. 356-364. – DOI: 10.23947/2687-1653-2023-23-4-356-364.
7. Adamov B.I. Influence of mecanum wheels construction on accuracy of the omnidirectional platform navigation (on example of KUKA youBot robot) // 2018 25th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems (ICINS). 2018, pp. 1-4. DOI: 10.23919/ICINS.2018.8405889.
8. Adamov B.I., Kobrin A.I. Methods of analytical mechanics in the constrained adaptive identification problems // *Moscow University Mechanics Bulletin*. 2016, vol. 71, pp. 118-121. doi.org/10.3103/S0027133016050046.
9. Адамов Б.И. Идентификация параметров динамического объекта при наличии параметрических связей // *Материалы XVII конференции молодых учёных «Навигация и управление движением»*. – СПб.: Концерн "Центральный научно-исследовательский институт "Электронприбор", 2015. – С. 497-508.

10. Barata J.C.A., Hussein M.S. The Moore–Penrose pseudoinverse: a tutorial review of the theory // Brazilian Journal of Physics. 2012, vol. 42, pp. 146-165. doi.org/10.1007/s13538-011-0052-z.

References

1. Li Y., Ge S., Dai S., Zhao L., Yan X., Zheng Y., Shi Y. Kinematic Modeling of a Combined System of Multiple Mecanum-Wheeled Robots with Velocity Compensation // Sensors. 2019, vol. 20, no. 1, p. 75. doi.org/10.3390/s20010075.
2. Zhang D., Wang G., Wu Z. Reinforcement Learning-Based Tracking Control for a Three Mecanum Wheeled Robot // IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems. 2022, vol. 35, no. 1, pp. 1445-1452. doi.org/10.1109/TNNLS.2022.3185055.
3. Saypulaev G.R., Kalinin G.N. Kinematic control of the mecanum-platform based on Lyapunov functions // Transport, mining and construction engineering: science and production. 2025, no. 32, pp. 9-15. DOI: 10.26160/2658-3305-2025-32-9-15.
4. Wang D., Low C.B. Modeling and Analysis of Skidding and Slipping in Wheeled Mobile Robots: Control Design Perspective // IEEE Transactions on Robotics and Automation. 2008, vol. 24, no. 3, pp. 676-687. doi.org/10.1109/TRO.2008.921563.
5. Xie L., Henkel C., Stol K., Xu W. Power-Minimization and Energy-Reduction Autonomous Navigation of an Omnidirectional Mecanum Robot via the Dynamic Window Approach Local Trajectory Planning // International Journal of Advanced Robotics Systems. 2018, vol. 15, no. 1, pp. 1-12. doi.org/10.1177/1729881418754563.
6. Pankrateva G.V., Mordin A.E., Saypulaev G.R. Analysis of Positioning Accuracy in Case of Design Errors in the Installation of Mecanum Wheels of the Mobile Platform // Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don). 2023, vol. 23, no. 4, pp. 356-364. DOI: 10.23947/2687-1653-2023-23-4-356-364.
7. Adamov B.I. Influence of mecanum wheels construction on accuracy of the omnidirectional platform navigation (on example of KUKA youBot robot) // 2018 25th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems (ICINS). 2018, pp. 1-4. DOI: 10.23919/ICINS.2018.8405889.
8. Adamov B.I., Kobrin A.I. Methods of analytical mechanics in the constrained adaptive identification problems // Moscow University Mechanics Bulletin. 2016, vol. 71, pp. 118-121. doi.org/10.3103/S0027133016050046.
9. Adamov B.I. Identification of parameters of a dynamic object in the presence of parametric connections // Proceedings of the XVII Conference of young scientists "Navigation and motion Control". – SPb.: Concern Central Scientific Research Institute Electropribor, 2015. – P. 497-508.
10. Barata J.C.A., Hussein M.S. The Moore–Penrose pseudoinverse: a tutorial review of the theory // Brazilian Journal of Physics. 2012, vol. 42, pp. 146-165. doi.org/10.1007/s13538-011-0052-z.

Сведения об авторах:

Information about authors:

Сайпулаев Гасан Русланович – кандидат технических наук, доцент кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин	Saypulaev Gasan Ruslanovich – candidate of technical sciences, associate professor of the Department of robotics, mechatronics, dynamics and machine strength
Калинин Григорий Николаевич – студент	Kalinin Grigory Nikolaevich – student
Волошко Данил Дмитриевич – студент	Voloshko Danil Dmitrievich – student
Леонтьев Степан Витальевич – студент	Leontyev Stepan Vitalyevich – student
saypulaevgr@mail.ru	

Получена 12.12.2025