

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДАВЛЕНИЯ ПРИ ГИДРАВЛИЧЕСКОМ УДАРЕ В ЗАКЛАДОЧНОМ ТРУБОПРОВОДЕ ПОДЗЕМНОГО РУДНИКА

Смолин С.В., Анушенков А.Н.

Сибирский федеральный университет, Красноярск

Ключевые слова: подземный рудник, закладочный трубопровод, твердеющая смесь, гидравлический удар, время запаздывания гидравлического регулятора.

Аннотация. В работе исследованы распределения давления при гидравлическом ударе в закладочном трубопроводе подземного рудника для твердеющей смеси как вязкой жидкости. Гидравлический удар был всегда областью изучения, которая интересна исследователям вследствие его сложных проявлений. Благодаря развитию численных методов, изучение гидравлического удара и его эффектов может быть представлено, используя программы математического моделирования. Для математического описания гидравлического удара в трубопроводе использована линеаризованная модель в виде уравнения гиперболического типа. Используя эту формулировку, предлагается в первом приближении более простое аналитическое описание в трубопроводе только основных физических характеристик гидравлического удара: например, коэффициента затухания, зависимости амплитуды давления от времени в определенном сечении трубопровода, периода колебаний ударной волны давления. Для конкретной твердеющей смеси в закладочном трубопроводе рудника проведено математическое моделирование и сравнение численного решения гиперболического уравнения методом конечных элементов с первым приближенным («инженерным») аналитическим решением для упрощенного варианта с относительной погрешностью для периода колебаний 0,0488% и с точным совпадением зависимости амплитуды давления от времени. В первом приближении предложена обобщающая формула для прогнозирования времени запаздывания для включения в работу гидравлического регулятора при заданной максимальной величине давления в определенном сечении трубопровода. Результаты исследования могут быть использованы для более простого («инженерного») аналитического описания и прогнозирования в трубопроводе основных физических характеристик гидравлического удара и прогнозирования времени запаздывания гидравлического регулятора для включения в работу.

MODELING OF PRESSURE DISTRIBUTION AT THE WATER HAMMER IN THE BACKFILL PIPELINE OF UNDERGROUND MINE

Smolin S.V., Anushenkov A.N.

Siberian Federal University, Krasnoyarsk

Keywords: underground mine, backfill pipeline, hardening mixture, water hammer, delay time of hydraulic controller.

Abstract. The paper studies the pressure distributions at the water hammer in the backfill pipeline of underground mine for the hardening mixture as a viscous fluid. The water hammer has always been an area of study, which is interesting to researchers due to its complex phenomena. Thanks to the development of numerical methods, the study of water hammer and its effects can be performed using mathematical simulation programs. For the mathematical description of a water hammer in the pipeline the linearized model in the form of the equation of hyperbolic type is used. Using this formulation, as a first approximation the more simple analytical description in the pipeline (only) of the basic physical characteristics of a water hammer: for example, the damping factor, dependence of pressure amplitude from time in certain section of the pipeline, the period of oscillations of a shock wave of pressure is offered. For the concrete hardening mixture in the backfill pipeline of mine the mathematical modeling is conducted and comparison of the numerical solution of the hyperbolic equation by a finite element method with the first approximate ("engineering") analytical solution with the relative error for period of oscillations of 0.0488 % and practically with exact coincidence of dependence of pressure amplitude from time is conducted. As a first approximation the generalising formula for forecasting of a delay time for inclusion in work of a hydraulic controller at the given peak value of pressure in certain section of the pipeline is offered. The results of the study can be used for more simple ("engineering") analytical description and forecasting in the pipeline of the basic physical characteristics of a water hammer and for forecasting of a delay time of a hydraulic controller for inclusion in work.

Введение

Несанкционированное отключение или внештатное включение насосов напорных гидросистем, некорректное маневрирование трубопроводной запорно-регулирующей

арматурой, аварийное срабатывание отсечных клапанов и т.п., т.е. относительно быстрое изменение скорости потока капельной жидкости может приводить к возникновению в таких системах гидравлических ударов – периодическому повышению давления, которое характеризуется прежде всего амплитудой и частотой колебаний. В результате гидравлических ударов наблюдаются порывы трубопроводов и разгерметизация соединений, которые могут вызвать вторичные аварии или травмы обслуживающего персонала. Кроме того, случаются выходы из строя элементов насоса, поломки запорно-регулирующей аппаратуры, изгибы трубопроводов, нарушение элементов крепления [1-11].

Поэтому гидравлическим ударом называется резкое (быстрое) изменение давления в трубопроводе вследствие резкого (быстрого) изменения скорости движения капельной жидкости. Когда клапан закрывается быстро в сети труб, это дает толчок гидравлическому переходному процессу – волне давления, известной как гидравлический удар. Распространение этих гидравлических переходных процессов может в экстремальных случаях вызывать аварии систем труб вследствие созданных сверхдавлений.

Гидравлический удар был всегда областью изучения, которая интересна исследователям вследствие его сложных проявлений. Моделирование этого явления в реальных условиях очень трудное. Из-за размеров систем трубопроводов проведение исследования в реальных масштабах невозможно. Однако, благодаря развитию численных методов, изучение гидравлического удара и его эффектов может быть представлено, используя программы математического моделирования.

Очень детальные обзоры теории и практики гидравлического удара представлены, например, в работах [1, 11].

Поэтому рассмотрим краевую задачу о распространении скачка давления в трубопроводе с неподвижной в исходном состоянии жидкостью. Допустим, что в сечении $x = 0$ произошло скачкообразное изменение давления, а сечение $x = l$ перекрыто (скорость равна нулю). Требуется найти распределение давления по длине трубопровода во времени [12].

На практике подобная задача встречается при расчете гидравлических регуляторов или передач, когда в сечении $x = 0$ находится источник давления, а в сечении $x = l$ к трубопроводу присоединен какой-либо прибор (например, регулятор расхода жидкости или давления), включающийся в работу лишь после того, когда давление в данном сечении достигнет определенной (заданной) величины. Практический интерес здесь представляет определение запаздывания импульса и его величины, что зависит от длины трубы, вязкости жидкости и коэффициента гидравлического сопротивления. К тому же определение величины импульса в сечении $x = l$ представляет решение задачи о гидравлическом ударе.

Поэтому цель работы – предложить упрощенный («инженерный») вариант для первого приближенного аналитического описания в трубопроводе основных физических характеристик гидравлического удара: например, коэффициента затухания, зависимости амплитуды давления от времени в определенном сечении трубопровода, периода колебаний ударной волны давления и в первом приближении формулу для прогнозирования времени запаздывания для включения в работу гидравлического регулятора при заданной максимальной величине давления в определенном сечении трубопровода.

Математические модели

Полная математическая постановка задачи (линеаризованная модель) по определению давления в трубопроводе при гидравлическом ударе в виде уравнения гиперболического типа будет [12, 13]

$$c^2 \frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial t^2} + 2a \frac{\partial p(x,t)}{\partial t}; \quad t > 0; \quad 0 < x < l; \quad (1)$$

$$p(x,0) = p_0 = \text{const}; \quad \partial p(x,0)/\partial t = 0; \quad (2)$$

$$p(0,t) = p_1 = \text{const}; \quad \partial p(l,t)/\partial x = 0; \quad (3)$$

где p_0 – начальное давление в трубе; p_1 – давление, приложенное в точке $x = 0$ и действующее в течение всего времени процесса вплоть до установления стационарного состояния ($p_1 > p_0$); l – длина трубопровода.

Здесь $p(x, t)$ – давление; x – продольная координата; t – время; $c = 1 / \sqrt{\frac{\rho}{k} + \frac{\rho d}{\delta E}}$ – скорость звука в капельной упругой жидкости, текущей в трубе с упругими стенками, т.е. скорость распространения ударной волны – волны гидравлического возмущения; $\rho = \text{const}$ – плотность жидкости; k – модуль упругости жидкости; δ – толщина стенки трубы; d – внутренний диаметр трубы; E – модуль упругости материала стенки трубы.

Величина $2a$ для ламинарного режима, учитывая формулу Пуазейля для коэффициента гидравлического сопротивления, приводится к виду [13]

$$2a = \frac{32\mu}{d^2}, \quad (4)$$

где μ – кинематическая вязкость жидкости.

Возможны два варианта для величины $2a$ [13]: первый вариант для ламинарного режима (4), а второй вариант для турбулентного режима (другая формула). В [13] для примера также произведены результаты вычислений конкретной задачи о распределении давления нефти (вязкой жидкости) в стальном трубопроводе для ламинарного режима течения.

Представленная формула для определения скорости звука в капельной упругой жидкости (c) справедлива при v/c и $(p - p_0)/E < 1$, где v – скорость жидкости.

С целью упрощения математической постановки задачи, а также для нахождения решения наиболее общего вида введем следующие безразмерные переменные и параметры:

$$\Theta = \frac{p - p_1}{p_0 - p_1}; Fo = \frac{c^2 t}{2al^2}; \xi = 1 - \frac{x}{l}; Fo_r = \frac{c^2}{4a^2 l^2}, \quad (5)$$

где Θ – безразмерное давление; Fo – число Фурье (безразмерное время); ξ – безразмерная координата; $Fo_r = \text{const}$ – параметр, характеризующий гидравлическое сопротивление жидкости, учитывающий ее вязкость, скорость звука в ней, коэффициент гидравлического сопротивления, а также длину трубопровода.

С учетом принятых обозначений (5) задача (1)-(4) приводится к виду

$$\frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} + Fo_r \frac{\partial^2 \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo^2} = \frac{\partial^2 \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^2}; Fo > 0; 0 < \xi < 1; \quad (6)$$

$$\Theta(\xi, 0) = 1; \partial \Theta(\xi, 0) / \partial Fo = 0; \quad (7)$$

$$\Theta(1, Fo) = 0; \partial \Theta(0, Fo) / \partial \xi = 0. \quad (8)$$

Из решения задачи (1)-(4) можно получить полную информацию о распределении давления по длине трубопровода во времени. Последовательность получения точного аналитического решения задачи (1)-(4) путем использования метода разделения переменных Бернулли – Фурье дана в [12]. В качестве другого варианта в [13] рассмотрен метод получения точного аналитического решения (6)-(8) путем совместного использования классического аналитического метода разделения переменных и ортогональных методов взвешенных невязок. Но полученные при таких вариантах аналитические решения будут в виде бесконечных рядов слагаемых, что очень неудобно при инженерных расчетах. Поэтому в дальнейшем в этой работе задача (6)-(8) для конкретного примера будет решена численно, т.е. для математического описания гидравлического удара в трубопроводе будет использована линеаризованная модель в виде уравнения гиперболического типа.

Более того, используя для уравнения (6) классический метод разделения переменных и первое (наименьшее) собственное значение задачи (6)-(8) λ_1 [13], предлагается упрощенный вариант для первого приближенного аналитического описания в трубопроводе основных физических характеристик гидравлического удара в виде следующего уравнения

$$Fo_r \frac{d^2 \Theta_1}{dFo^2} + \frac{d\Theta_1}{dFo} + \lambda_1 \Theta_1 = 0, \quad (9)$$

где $\lambda_1 = \frac{\pi^2}{4}$ – первое собственное значение или собственное число.

Если левую и правую часть уравнения (9) разделить на Fo_r , получаем общепринятую запись уравнения затухающих колебаний [14]

$$\frac{d^2 \Theta_1}{dFo^2} + 2\beta \frac{d\Theta_1}{dFo} + \omega_0^2 \Theta_1 = 0, \quad (10)$$

где $\beta = \frac{1}{2Fo_r}$ – коэффициент затухания колебаний, а $\omega_0 = \sqrt{\frac{\lambda_1}{Fo_r}}$ – собственная частота колебательной системы.

При $\beta < \omega_0$ общее решение уравнения (10) имеет вид [14]

$$\Theta_1(Fo) = A_{10} \exp(-\beta \cdot Fo) \cos(\omega \cdot Fo + \alpha). \quad (11)$$

Величина A_{10} представляет собой амплитуду в начальный момент времени.

Здесь A_{10} и α – произвольные постоянные, ω – вещественная величина, равная

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{\pi^2}{4Fo_r} - \frac{1}{4Fo_r^2}} = \frac{1}{2Fo_r} \sqrt{\pi^2 Fo_r - 1}, \quad (12)$$

которая определяет круговую или циклическую частоту затухающих колебаний.

Тогда согласно формуле $T_1 = 2\pi/\omega$, период затухающих колебаний равен

$$T_1 = \frac{4\pi Fo_r}{\sqrt{\pi^2 Fo_r - 1}}. \quad (13)$$

При необходимости можно определить логарифмический декремент затухания $\chi = \beta T_1$ и добротность колебательной системы $Q = \pi/\chi$ [14].

Для уравнения (10) начальные условия для безразмерного времени $Fo = 0$, представленные первоначально уравнениями (7), записаны в следующем виде:

$$\Theta_1(0) = 1; \quad d\Theta_1(0)/dFo = 0. \quad (14)$$

Начальное безразмерное давление $\Theta_{10}(0)$ для уравнения (11) зависит, кроме A_{10} , также от начальной фазы α :

$$\Theta_{10}(0) = A_{10} \cos \alpha. \quad (15)$$

Поэтому сравнивая (15) и (14), полагаем $A_{10} = 1$, $\alpha = 0$ (когда $\beta \ll 1$) и тогда для этих начальных условий (14) получаем следующее приближенное аналитическое решение уравнения (10)

$$\Theta_1(Fo) = \exp(-\beta \cdot Fo) \cos(\omega \cdot Fo). \quad (16)$$

В соответствии с видом функции (16) затухающие колебания можно рассматривать как гармонические колебания частоты ω с амплитудой, изменяющейся по закону

$$\Theta_{1\max}(Fo) = \exp(-\beta \cdot Fo). \quad (17)$$

Таким образом, предлагается более простой (упрощенный, «инженерный») вариант для первого приближенного аналитического описания в трубопроводе основных физических характеристик гидравлического удара: например, коэффициента затухания β , зависимости амплитуды давления от времени в определенном сечении трубопровода (17), периода колебаний ударной волны давления (13).

Для прогнозирования времени запаздывания для включения в работу гидравлического регулятора при заданной максимальной величине давления $\Theta_{1\max}$ в определенном сечении трубопровода прологарифмируем уравнение (17). Далее сначала запишем уравнение для Fo ,

потом используя безразмерные переменные и параметры (5) вместе с определением β и a (4), получаем формулу для времени запаздывания

$$T_z = -\frac{1}{a} \ln \Theta_{1\max} = -\frac{d^2}{16\mu} \ln \frac{p_{\max}(l) - p_1}{p_0 - p_1}, \quad (18)$$

которое зависит от коэффициента гидравлического сопротивления a , внутреннего диаметра трубы d , кинематической вязкости жидкости μ , безразмерного давления $\Theta_{1\max}$ ($\Theta_{1\max} > 0$) и расстояния l , а для $p_{\max}(l)$ должно выполняться условие $p_0 < p_{\max}(l) < p_1$. Таким образом, в первом приближении получена обобщающая формула (18) для прогнозирования времени запаздывания для включения в работу гидравлического регулятора. Формула будет обобщающей, так как содержит безразмерное давление (5), и поэтому включает большое множество сочетаний p_0 , $p_{\max}(l)$, p_1 для одной и той же величины $\Theta_{1\max}$.

Расчеты и результаты

Расчеты по математическому моделированию распределения давления при гидравлическом ударе в закладочном трубопроводе подземного рудника для конкретной твердеющей смеси как вязкой жидкости произведены при следующих условиях [15, 16]: $\rho = 1100 \text{ кг/м}^3$ – плотность жидкости; $k = 1100 \text{ МПа}$ – модуль упругости жидкости; $\delta = 0,006 \text{ м}$ – толщина стенки трубы; $d = 0,207 \text{ м}$ – внутренний диаметр трубы; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ – модуль упругости материала стенки трубы; $\mu = 5,75 \cdot 10^6 \text{ м}^2/\text{с}$ – кинематическая вязкость жидкости; $l = 2000 \text{ м}$ – длина трубопровода (или расстояние, где к трубопроводу присоединен, например, регулятор расхода жидкости или регулятор давления).

При движении в трубопроводе длиной l этой конкретной твердеющей смеси смесь будет приближенно рассматриваться при расчетах как вязкая жидкость. Это приближение практически приемлемо, потому что такие смеси начинают постепенно затвердевать только после вытекания из закладочного трубопровода подземного рудника в пустую полость.

Далее вычисления распределения давления при гидравлическом ударе проведены в трубопроводе для конкретной твердеющей смеси как вязкой жидкости пока только для ламинарного режима (по аналогии вычислений для нефти в [13]).

По представленным данным скорость звука в капельной упругой жидкости, текущей в трубопроводе с упругими стенками будет равна $c = 916,7948 \text{ м/с}$ (задача (1)-(3)), величина $2a$ согласно формуле (4) для ламинарного режима будет равняться $2a = 0,0043 \text{ 1/с}$, а безразмерный параметр For , используя формулу (5), будет равен $For = 11395$.

Для представленной твердеющей смеси в закладочном трубопроводе рудника проведено численное решение гиперболического уравнения (6) с начальными (7) и граничными (8) условиями методом конечных элементов. Поэтому на рисунке 1 представлено распределение безразмерного давления $\Theta(0, For)$ от безразмерного времени For (уравнения (6)-(8)) при $For = 11395$ для $\xi = 0$ (или по-другому в конце трубопровода, когда $x = l$) в виде шаговой, ступенчатой функции. На этом рисунке также видны высокочастотные осцилляции, индуцированные численно около разрывов в давлении, т.е. там, где резкие, крутые изменения. Эти высокочастотные осцилляции, известные как осцилляции Гиббса, не имеют физического смысла и поэтому должны быть проигнорированы при оценивании результатов на этом и следующем рисунках. Осцилляции Гиббса возникают вследствие математических трудностей при разрешении разрывноизменяющейся функции конечным числом элементов сетки. Кроме этого, на рисунке 1 ясно виден процесс затухания (уменьшения) амплитуды давления со временем.

Далее найдем первое приближенное решение для более простого (упрощенного, «инженерного») варианта по уравнению (16) и зависимость только амплитуды давления по уравнению (17) от времени. И произведем сравнение на рисунке 2 зависимости давления $\Theta(0, For)$ от времени For (уравнения (6)-(8)) для $\xi = 0$ при $For = 11395$ (ступенчатая линия),

уравнения $\Theta_1(Fo)$ (16) (затухающая косинусоида) и предсказанной (уравнение (17)) амплитуды давления гидравлического удара $\Theta_{1\max}(Fo)$ (верхняя, нижняя экспоненциальные линии).

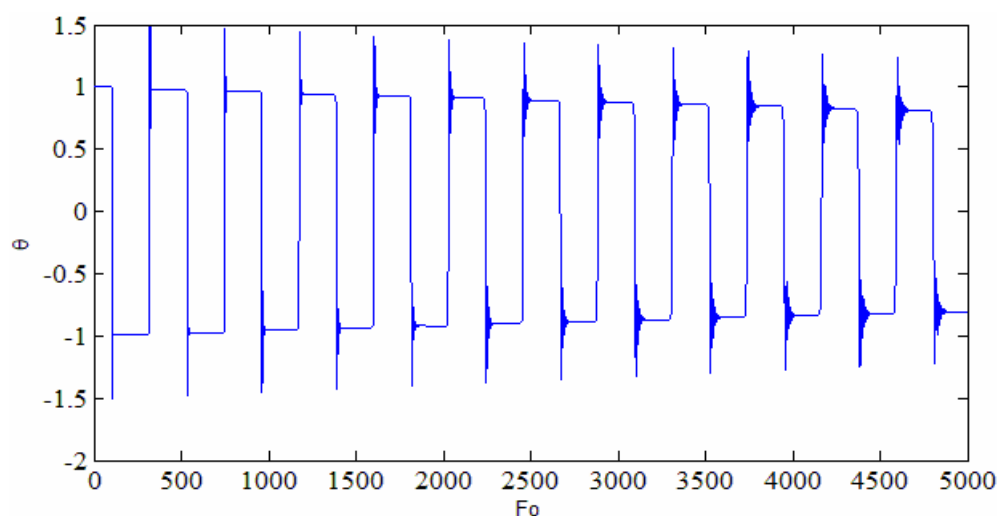


Рис. 1. Распределение давления $\Theta(0, Fo)$ от времени Fo (уравнения (6)-(8)) для $\xi = 0$ при $Fo_r = 11395$

По числовым данным для задачи (6)-(8) (рис. 1) приближенно определен период колебаний $T = 427,2$ с, а для уравнения (16) по формуле (13) при $Fo_r = 11395$ период затухающих колебаний $T_1 = 426,99$ с. В результате, при сравнении на рисунке 2 численного решения гиперболического уравнения (ступенчатая линия) с первым приближенным аналитическим решением более простого (упрощенного, «инженерного») варианта (затухающая косинусоида) для периода колебаний получена относительная погрешность $\varepsilon = (T - T_1)/T = 0,0488\%$, а также получено совпадение с предсказанной (уравнение (17)) амплитудой давления $\Theta_{1\max}(Fo)$ (верхняя, нижняя экспоненциальные линии) от времени. Таким образом, подтверждается справедливость более простого (упрощенного, «инженерного») варианта для первого приближенного аналитического описания в трубопроводе (уравнения (13), (17)) основных физических характеристик гидравлического удара.

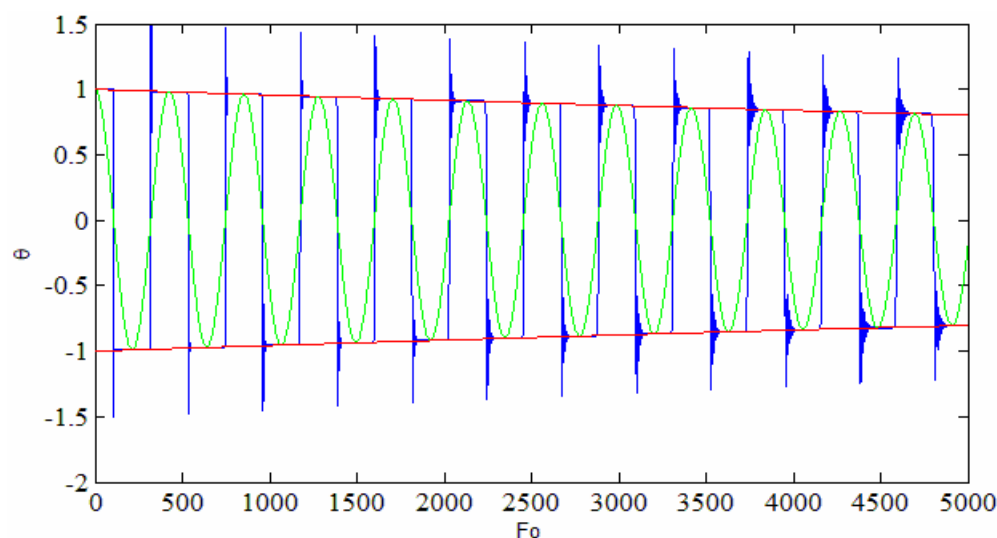


Рис. 2. Сравнение распределения давления $\Theta(0, Fo)$ от времени Fo (уравнения (6)-(8)) для $\xi = 0$ при $Fo_r = 11395$ (ступенчатая линия), уравнения $\Theta_1(Fo)$ (16) (затухающая косинусоида) и предсказанной (уравнение (17)) амплитуды давления гидравлического удара $\Theta_{1\max}(Fo)$ (верхняя, нижняя экспоненциальные линии)

Далее используем обобщающую формулу (18) для прогнозирования времени запаздывания для включения в работу гидравлического регулятора в зависимости от безразмерного давления (17) и поэтому она включает (5) большое множество сочетаний p_0 , $p_{\max}(l)$, p_1 для одной и той же величины $\Theta_{1\max}$. Результаты представлены на рисунке 3. Для понимания полученной нелинейной зависимости надо учитывать следующее. В начальный момент времени ($Fo = 0$) в трубопроводе с неподвижной в исходном состоянии жидкостью в сечении $x = l$ ($\xi = 0$) давление $p_{\max}(l) = p_0$, поэтому (5) $\Theta_{1\max} = 1$, а (18) $T_Z = 0$ с. И затем ($Fo > 0$) с ростом давления $p_{\max}(l) > p_0$ получается такая нелинейная зависимость T_Z от $\Theta_{1\max}$ на рисунке 3.

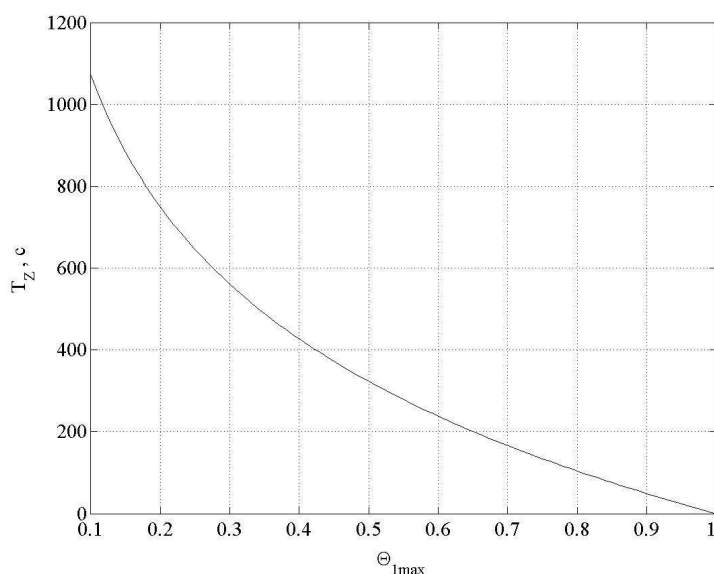


Рис. 3. Зависимость времени запаздывания T_Z для включения в работу гидравлического регулятора (уравнение (18)) от максимальной величины давления $\Theta_{1\max}$ для $\xi = 0$ при $Fo_r = 11395$

Выводы

Для математического описания гидравлического удара в трубопроводе использована линеаризованная модель в виде уравнения гиперболического типа (5)-(8).

Предлагается более простой (упрощенный, «инженерный») вариант (10), (14) для первого приближенного аналитического описания (16) в трубопроводе основных физических характеристик гидравлического удара: например, коэффициента затухания β , зависимости амплитуды давления от времени в определенном сечении трубопровода $\Theta_{1\max}(Fo)$ (17), периода колебаний ударной волны давления T_1 (13).

Для конкретной твердеющей смеси в закладочном трубопроводе подземного рудника проведено математическое моделирование гидравлического удара и сравнение численного решения гиперболического уравнения (6)-(8) методом конечных элементов с первым приближенным аналитическим решением (16) для более простого (упрощенного, «инженерного») варианта.

Для двух решений по полному (6)-(8) и более простому (упрощенному, «инженерному») (10), (14) вариантам проведено сравнение двух периодов колебаний T и T_1 с относительной погрешностью 0,0488%.

Получено совпадение максимальной величины давления полного решения $\Theta(0, Fo)$ (6)-(8) с предсказанной амплитудой давления $\Theta_{1\max}(Fo)$ (17) от времени.

В первом приближении предложена формула для прогнозирования времени запаздывания T_Z (18) для включения в работу гидравлического регулятора при заданной максимальной величине давления в определенном сечении трубопровода.

Закключение

Предложен упрощенный («инженерный») вариант (формулы) для первого приближенного аналитического описания в трубопроводе основных физических характеристик гидравлического удара: коэффициента затухания, зависимости амплитуды давления от времени в определенном сечении трубопровода, периода колебаний ударной волны давления и в первом приближении формула для прогнозирования времени запаздывания для включения в работу гидравлического регулятора при заданной максимальной величине давления в определенном сечении трубопровода. Результаты исследования могут быть полезны при проектировании и количественном прогнозировании гидравлического удара для трубопроводов и гидравлических регуляторов.

Список литературы

1. Ghidaoui M.S., Zhao M., McInnis D.A., Axworthy D.H. A review of water hammer theory and practice // *Applied mechanics reviews*. ASME. 2005, vol. 58(1), pp. 49-76. DOI: 10.1115/1.1828050.
2. Urbanowicz K., Bergant A., Karadzić U., Jing H., Kodura A. Numerical investigation of the cavitating flow for constant water hammer number // *Journal of Physics Conference Series*. 2021, vol. 1736, p. 012040. DOI: 10.1088/1742-6596/1736/1/012040.
3. Abdeldayem O.M., Ferràs D., van der Zwan S., Kennedy M. Analysis of Unsteady Friction Models Used in Engineering Software for Water Hammer Analysis: Implementation Case in WANDA // *Water*. 2021, vol. 13(4), p. 495. doi.org/10.3390/w13040495.
4. Zhou L., Li Y., Zhao Y., Ou C., Zhao Y. An accurate and efficient scheme involving unsteady friction for transient pipe flow // *Journal of Hydroinformatics*. 2021, vol. 23, pp. 879-896. DOI: 10.2166/hydro.2021.160.
5. Han Y., Shi W., Xu H., Wang J., Zhou L. Effects of Closing Times and Laws on Water Hammer in a Ball Valve Pipeline // *Water*. 2022, 14, 1497. doi.org/10.3390/w14091497.
6. Urbanowicz K., Bergant A., Stosiak M. Water Hammer Simulation Using Simplified Convolution-Based Unsteady Friction Model // *Water*. 2022, vol. 14(9), p. 3151. doi.org/10.3390/w14193151.
7. Wu K., Feng Y., Xu Y., Liang H., Liu G. Energy Analysis of a Quasi-Two-Dimensional Friction Model for Simulation of Transient Flows in Viscoelastic Pipes // *Water*. 2022, vol. 14(20), p. 3258. doi.org/10.3390/w14203258.
8. Pan T., Zhou L., Ou C., Wang P., Liu D. Smoothed particle hydrodynamics with unsteady friction model for water hammer pipe flow // *Journal of Hydraulic Engineering*. 2022, vol. 148(2), p. 04021057. DOI: 10.1061/(ASCE)HY.1943-7900.0001966
9. Vardy A.E. On Sources of Damping in Water Hammer // *Water*. 2023, vol. 15(3), p. 385. doi.org/10.3390/w15030385.
10. Neyestanaki M.K., Dunca G., Jonsson P., Cervantes M.J. A Comparison of Different Methods for Modeling Water Hammer Valve Closure with CFD // *Water*. 2023, vol. 15(8), p. 1510. doi.org/10.3390/w15081510.
11. Urbanowicz K., Ramos H.M. New advances in water hammer problems (review) // *Water*. 2023, 15(22), p. 4004. doi.org/10.3390/w15224004.
12. Чарный И.А. Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах. – М.: Недра, 1975. – 296 с.
13. Гидравлика / Под ред. В.А. Кудинова. – М.: Изд-во «Юрайт», 2018. – 386 с.
14. Савельев И.В. Курс общей физики. Т. 1. – М.: Наука, 1982. – 432 с.
15. Гузанов П.С., Лытнева А.Э., Анушенков А.Н., Волков Е.П. Закладочные смеси на основе отходов обогащения руд в системах подземной разработки месторождений Норильского промышленного района // *Горный журнал*. – 2015. – №6. – С. 85-88.
16. Volkov E.P., Anushenkov A.N. Developing the technology of mine stowing with processing tailings based hardening blends // *News of the Higher Institutions. Mining Journal*. 2019, vol. 7, pp. 5-13. doi.org/10.21440/0536-1028-2019-7-5-13.

References

1. Ghidaoui M.S., Zhao M., McInnis D.A., Axworthy D.H. A review of water hammer theory and practice // *Applied mechanics reviews*. ASME. 2005, vol. 58(1), pp. 49-76. DOI: 10.1115/1.1828050.
2. Urbanowicz K., Bergant A., Karadzić U., Jing H., Kodura A. Numerical investigation of the cavitating flow for constant water hammer number // *Journal of Physics Conference Series*. 2021, vol. 1736, p. 012040. DOI: 10.1088/1742-6596/1736/1/012040.
3. Abdeldayem O.M., Ferràs D., van der Zwan S., Kennedy M. Analysis of Unsteady Friction Models Used in Engineering Software for Water Hammer Analysis: Implementation Case in WANDA // *Water*. 2021, vol. 13(4), p. 495. doi.org/10.3390/w13040495.
4. Zhou L., Li Y., Zhao Y., Ou C., Zhao Y. An accurate and efficient scheme involving unsteady friction for transient pipe flow // *Journal of Hydroinformatics*. 2021, vol. 23, pp. 879-896. DOI: 10.2166/hydro.2021.160.

5. Han Y., Shi W., Xu H., Wang J., Zhou L. Effects of Closing Times and Laws on Water Hammer in a Ball Valve Pipeline // Water. 2022, 14, 1497. doi.org/10.3390/w14091497.
6. Urbanowicz K., Bergant A., Stosiak M. Water Hammer Simulation Using Simplified Convolution-Based Unsteady Friction Model // Water. 2022, vol. 14(9), p. 3151. doi.org/10.3390/w14193151.
7. Wu K., Feng Y., Xu Y., Liang H., Liu G. Energy Analysis of a Quasi-Two-Dimensional Friction Model for Simulation of Transient Flows in Viscoelastic Pipes // Water. 2022, vol. 14(20), p. 3258. doi.org/10.3390/w14203258.
8. Pan T., Zhou L., Ou C., Wang P., Liu D. Smoothed particle hydrodynamics with unsteady friction model for water hammer pipe flow // Journal of Hydraulic Engineering. 2022, vol. 148(2), p. 04021057. DOI: 10.1061/(ASCE)HY.1943-7900.0001966.
9. Vardy A.E. On Sources of Damping in Water Hammer // Water. 2023, vol. 15(3), p. 385. doi.org/10.3390/w15030385.
10. Neyestanaki M.K., Dunca G., Jonsson P., Cervantes M.J. A Comparison of Different Methods for Modeling Water Hammer Valve Closure with CFD // Water. 2023, vol. 15(8), p. 1510. doi.org/10.3390/w15081510.
11. Urbanowicz K., Ramos H.M. New advances in water hammer problems (review) // Water. 2023, 15(22), p. 4004. doi.org/10.3390/w15224004.
12. Charniy I.A. The unsteady movement of a real liquid in pipes. – M.: Nedra, 1975. – 296 p.
13. Hydraulics / Edited by V.A. Kudinova. – M.: Yurait, 2018. – 386 p.
14. Savelyev I.V. Course of the general physics. Vol. 1. – M.: Science, 1982. – 432 p.
15. Guzanov P.S., Lytneva A.E., Anushenkov A.N., Volkov E.P. Backfill based on ore mill tailings in underground mines in the Norilsk Industrial Area // Mining Journal. 2015, no. 6, pp. 85-88.
16. Volkov E.P., Anushenkov A.N. Developing the technology of mine stowing with processing tailings based hardening blends // News of the Higher Institutions. Mining Journal. 2019, no. 7, pp. 5-13. doi.org/ 10.21440/0536-1028-2019-7-5-13.

Сведения об авторах:

Смолин Сергей Викторович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры Фундаментального естественнонаучного образования	Smolin Sergei Viktorovich – candidate of physico-mathematical sciences, associate professor, associate professor of the Department of fundamental natural-science education
Анушенков Александр Николаевич – доктор технических наук, заведующий кафедрой Подземной разработки месторождений	Anushenkov Aleksandr Nikolaevich – doctor of technical sciences, professor, head of the Department of underground mining
smolinsv@inbox.ru	

Получена 04.12.2025