

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ ДОПУСТИМЫХ ПОЛОЖЕНИЙ ЧЕТВЕРОНОГО РОБОТА С УЧЕТОМ КОНТАКТА ВСЕХ ЕГО НОГ С ПОВЕРХНОСТЬЮ

*Сайпулаев М.Р., Мохамед А.М., Казаринова А.С., Сибирцев Н.А.
Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва*

Ключевые слова: четвероногий робот, кинематика, рабочая область, пространственное движение, шагающий робот, математическая модель.

Аннотация. В рамках данной работы ставится задача определения рабочей области корпуса четвероногого робота при контакте всех его ног с опорной поверхностью. Рассматривается конструкция шагающего робота с четырьмя трехзвенными ногами. Представлены уравнения геометрии движения четвероногого робота при его пространственном движении. Определены диапазоны изменения углов крена и тангажа корпуса робота, а также высот его корпуса над горизонтальной поверхностью при наличии конструктивных ограничений на углы поворота звеньев ног робота. В частных случаях уравнений геометрии движения получены аналитические формулы для зависимостей углов крена и тангажа и высоты корпуса робота от углов поворота звеньев ног. По результатам численных расчетов для частных случаев движений робота можно сделать выводы о возможности позиционирования и ориентации платформы робота при заданных размерах звеньев робота и ограничениях на углы поворота звеньев ног. Полученные аналитические формулы могут быть использованы на этапе проектирования четвероногих роботов и для планирования движений робота.

DETERMINATION OF GEOMETRICALLY PERMISSIBLE POSITIONS OF A QUADRUPED ROBOT TAKING INTO ACCOUNT THE CONTACT OF ALL ITS LEGS WITH THE SURFACE

*Saypulaev M.R., Mohamed A.M., Kazarinova A.S., Sibirtsev N.A.
National Research University "Moscow Power Engineering Institute", Moscow*

Keywords: quadruped robot, kinematics, workspace, spatial motion, walking robot, mathematical model.

Abstract. In this paper, we set the task of determining the working area of the quadruped robot body when all its legs are in contact with the supporting surface. The design of a walking robot with four three-link legs is considered. The equations of the geometry of motion of a four-legged robot during its spatial movement are presented. We determine the ranges of change in the roll and pitch angles of the robot body, as well as the heights of its body above the horizontal surface in the presence of design constraints on the rotation angles of the robot's leg links. In particular cases of the equations of motion geometry, analytical formulas are obtained for the dependencies of the roll and pitch angles and the height of the robot body on the rotation angles of the leg links. Based on the results of numerical calculations for particular cases of robot movements, conclusions can be drawn about the possibility of positioning and orienting the robot platform for given dimensions of the robot links and restrictions on the rotation angles of the leg links. The obtained analytical formulas can be used at the design stage of quadruped robots and for planning robot movements.

Введение

Современная робототехника активно развивается в направлении создания мобильных роботов, способных эффективно передвигаться в сложных и динамично меняющихся условиях. Особый интерес представляют шагающие роботы, которые обладают высокой маневренностью, устойчивостью и адаптивностью по сравнению с колесными и гусеничными платформами. Одной из ключевых задач при проектировании таких роботов (рис. 1) является обеспечение стабильности и управляемости при выполнении сложных движений, включая повороты корпуса.



Рис. 1. Пример четвероногого робота

Одной из задач проектирования четвероногих роботов является выбор оптимальной конструкции и кинематики конечностей робота [1]. Как показано в исследованиях [2, 3], устойчивость шагающих роботов зависит от точности математических моделей, учитывающих взаимодействие конечностей с поверхностью.

Важной проблемой при поворотных движениях робота является потеря равновесия из-за инерционных нагрузок или при попытках выхода за пределы рабочей области. В работе [4] предложены алгоритмы управления роботом BigDog, компенсирующие эти нагрузки за счёт адаптивного перераспределения опорных сил. Для гидравлических систем, таких как HyQ2Max [5], критическое значение имеет точное управление крутящим моментом в суставах, обеспечивающее плавность поворотов.

Кинематика движений робота тесно связана с выбором аллюра. В исследовании [6] разработаны методы перехода между аллюрами (например, с рыси на галоп), сохраняющие устойчивость при изменении траектории. Для сложного рельефа эффективны алгоритмы, сочетающие предиктивное планирование и реактивную стабилизацию, как у робота ANYmal [7].

Как отмечено в работе [8], современные подходы к управлению движением робота включают глубокое обучение с подкреплением, позволяющее роботам адаптироваться к неожиданным возмущениям. В работе [9] предложен метод выпуклого модельно-предсказательного управления для робота Cheetah 3, обеспечивающий динамические манёвры с учётом ограничений системы.

Для обеспечения энергоэффективности робота критично правильное распределение усилий между конечностями. В статье [10] представлены алгоритмы оптимизации походки на крутых склонах, а в работе [11] – методы параметризации положений конечностей, минимизирующие энергозатраты. В статье [12] разработаны алгоритмы планирования движения и управления с оценкой контакта конечностей с поверхностью, что важно для коррекции траектории в реальном времени. В работах [13, 14] предложен метод обучения различным маневрам, ускоряющий адаптацию к новым условиям.

Проведенный краткий обзор показывает актуальность математического моделирования движений четвероногих роботов и оценки допустимых положений робота при планировании его движений.

В рамках данной работы ставится задача построения диапазонов допустимых положений робота при контакте всех ног робота с поверхностью и оценки максимальных значений углов крена и тангажа при заданных размерах робота и ограничений на углы поворота звеньев его ног.

Материалы и методы исследований. Для описания геометрии движения четвероногого робота используется кинематическая схема робота, представленная на рисунке 2.

На схеме введены следующие обозначения: C – геометрический центр корпуса робота; O_i – точка крепления i -ой ноги к корпусу робота; K_i – конечная точка i -й ноги; β_i – угол поворота звена O_iA_i вокруг продольной оси корпуса робота и характеризует поворот плоскости ноги относительно вертикальной плоскости симметрии CXZ ; α_i, β_i – углы поворота звеньев A_iB_i и B_iK_i в плоскости ноги. Вводится неподвижная система координат (СК) XYZ и подвижная система координат S_{xyz} .

Расстояния вдоль продольной и поперечной осей платформы робота от геометрического центра C и точками крепления ног к платформе робота O_i в подвижных осях $x_iy_iz_i$ обозначены, как ρ_{xi} и ρ_{yi} . В соответствии с обозначениями на рисунке 2 имеем $\rho_{x1} = \rho_{x2} = -\rho_{x3} = -\rho_{x4} = l$, $\rho_{y1} = -\rho_{y2} = -\rho_{y3} = \rho_{y4} = w$, где w, l – половины ширины и длины корпуса робота. Длины звеньев обозначены, как $l_0 = O_iA_i$, $l_1 = A_iB_i$, $l_2 = B_iK_i$ ($i = \overline{1,4}$).

В качестве основы при анализе рабочей области корпуса четвероногого робота используем уравнение геометрии движения i -ой ноги [16]:

$$\begin{pmatrix} x_{Ki} \\ y_{Ki} \\ z_{Ki} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \end{pmatrix} + \Gamma \left[\begin{pmatrix} \rho_{xi} - l_0 s\beta_i \\ \rho_{yi} \\ -l_0 c\beta_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\beta_i & -s\beta_i \\ 0 & s\beta_i & c\beta_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -l_1 c\alpha_i - l_2 c\phi_i \\ 0 \\ -l_1 s\alpha_i - l_2 s\phi_i \end{pmatrix} \right], \quad (1)$$

где x_{Ki} , y_{Ki} , z_{Ki} – координаты конечной точки i -ой ноги в осях неподвижной СК XYZ ; x_C , y_C , z_C – координаты геометрического центра корпуса робота в осях неподвижной СК XYZ ; а матрица направляющих косинусов Γ , связывающая проекции векторов в подвижной и неподвижной СК, определяется выражением:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} c\gamma c\psi - s\gamma s\theta s\psi & -c\theta s\psi & s\gamma c\psi + c\gamma s\theta s\psi \\ c\gamma s\psi + s\gamma s\theta c\psi & c\theta c\psi & s\gamma s\psi - c\gamma s\theta c\psi \\ -c\theta s\gamma & s\theta & c\theta c\gamma \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Здесь и далее для краткости используются следующие сокращения для тригонометрических функций: $sx = \sin x$, $cx = \cos x$. Для задания ориентации корпуса робота используются углы курса ψ , крена γ и тангажа θ .

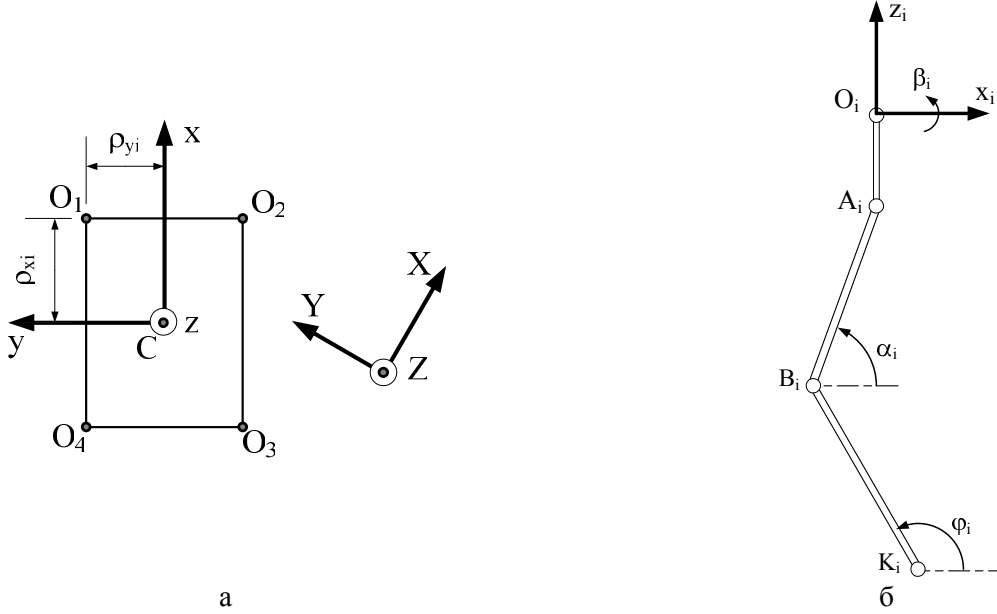


Рис. 2. Кинематическая схема робота [15]: а) вид сверху на корпус робота; б) вид сбоку на ногу робота

Отметим, что поскольку движение корпуса робота вдоль горизонтальных осей CX , CY и вращение вокруг вертикальной оси CZ обеспечивается за счет переноса ног робота, то для анализа рабочей области робота указанные движения не представляют интерес. Поэтому далее подробнее остановимся на исследовании диапазонов изменения углов крена θ и тангажа γ , а также вертикальной координаты z_C геометрического центра робота при изменениях углов поворота звеньев ног в пределах конструктивных ограничений. Не нарушая общности, положим, что конечные точки ног опираются на горизонтальную плоскость, т.е. $z_{Ki} = 0$.

С учетом отмеченного замечания рассмотрим проекции уравнения (1) на ось CZ :

$$z_{Ki} = z_C - c\theta s\gamma(\rho_{xi} - l_0 s\beta_i - l_1 c\alpha_i - l_2 c\phi_i) + s\theta[\rho_{yi} + s\beta_i(l_1 s\alpha_i + l_2 s\phi_i)] - c\theta c\gamma[l_0 c\beta_i + c\beta_i(l_1 s\alpha_i + l_2 s\phi_i)]. \quad i=1, \dots, 4 \quad (3)$$

Проанализируем систему уравнений (3) для всех четырех ног для частных случаев:

Случай I: поступательные движения геометрического центра робота вдоль вертикальной оси, при котором углы крена и тангажа равны нулю ($\theta = 0$), $\gamma = 0$), а углы поворота всех звеньев ног робота равны между собой:

$$\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = \phi_4 = \phi, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \pi - \phi, \quad \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \beta. \quad (4)$$

Случай II: повороты по углу крена θ , при котором угол тангажа равен нулю ($\gamma = 0$), вертикальная координата геометрического центра корпуса робота постоянна ($z_C = \text{const}$), а углы поворота всех звеньев ног изменяются симметрично относительно продольной оси симметрии корпуса робота:

$$\phi_1 = \phi_4 = \phi_L, \quad \alpha_1 = \alpha_4 = \pi - \phi_L, \\ \phi_2 = \phi_3 = \phi_R, \quad \alpha_2 = \alpha_3 = \pi - \phi_R, \quad \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0. \quad (5)$$

где нижние индексы «L», «R» указывают на ноги робота, расположенные с левой и правой сторон робота относительно продольной оси симметрии.

Случай III: повороты по углу тангажа γ , при котором угол крена равен нулю ($\theta = 0$), вертикальная координата геометрического центра корпуса робота постоянна ($z_C = \text{const}$), а углы поворота всех звеньев ног изменяются симметрично относительно поперечной оси симметрии корпуса робота:

$$\begin{aligned}\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_F, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \pi - \varphi_F, \\ \varphi_3 = \varphi_4 = \varphi_B, \quad \alpha_3 = \alpha_4 = \pi - \varphi_B, \quad \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0.\end{aligned}\quad (6)$$

где нижние индексы «F», «B» указывают на ноги робота, расположенные спереди и сзади относительно поперечной оси симметрии.

В случае I с учетом (4) система уравнений (3) примет вид:

$$z_C = [l_0 + (l_1 + l_2) s \varphi] c \beta. \quad (7)$$

В случае II с учетом (5) система уравнений (3) примет вид:

$$\begin{aligned}z_{Ki} = z_C + w s \theta - c \theta [l_0 + (l_1 + l_2) s \varphi_L], \quad (i=1,4) \\ z_{Ki} = z_C - w s \theta - c \theta [l_0 + (l_1 + l_2) s \varphi_R], \quad (i=2,3)\end{aligned}\quad (8)$$

и, решая систему уравнений (8) относительно угла крена θ , получим:

$$\theta = \arctan \left[\frac{(l_1 + l_2)(s \varphi_L - s \varphi_R)}{2w} \right]. \quad (9)$$

В случае III с учетом (6) система уравнений (3) примет вид:

$$\begin{aligned}z_{Ki} = z_C - s \gamma [l - (l_2 - l_1) c \varphi_F] - c \gamma [l_0 + (l_1 + l_2) s \varphi_F], \quad i=1,2 \\ z_{Ki} = z_C - s \gamma [-l - (l_2 - l_1) c \varphi_B] - c \gamma [l_0 + (l_1 + l_2) s \varphi_B], \quad i=3,4\end{aligned}\quad (10)$$

и, решая систему уравнений (10) относительно угла тангажа γ , получим:

$$\gamma = \arctan \left[\frac{-(l_1 + l_2)(s \varphi_F - s \varphi_B)}{2l - (l_2 - l_1)(c \varphi_F - c \varphi_B)} \right]. \quad (11)$$

Выражения (7), (9), (11) могут быть использованы для построения системы управления движением четвероногого робота при независимых поворотах по углам крена, тангажа или поступательном движении вдоль вертикальной оси. Указанные выражения могут быть применены для анализа диапазона допустимых значений вертикальной координаты z_C , углов крена и тангажа при заданных размерах робота и ограничениях на углы поворота звеньев ног.

Проведем оценку диапазона допустимых значений вертикальной координаты z_C , углов крена и тангажа. В качестве числовых значений размеров робота примем равными [16]:

$$w = 0.15 \text{ м}, \quad l = 0.25 \text{ м}, \quad l_1 = l_2 = 0.25 \text{ м}, \quad l_0 = 0, \quad (12)$$

а в качестве ограничений на углы поворота звеньев ног используем:

$$|\beta| \leq 30^\circ, \quad 0^\circ \leq \varphi_i \leq 180^\circ. \quad (13)$$

График зависимости вертикальной координаты z_C , построенной по формуле (7) при числовых значениях (12) ограничениях (13), представлен на рисунке 3.

График зависимости угла крена θ , построенной по формуле (9) при числовых значениях (12) и ограничениях (13), представлен на рисунке 4.

График зависимости угла тангажа γ , построенной по формуле (11) при числовых значениях (12) и ограничениях (13), представлен на рисунке 5.

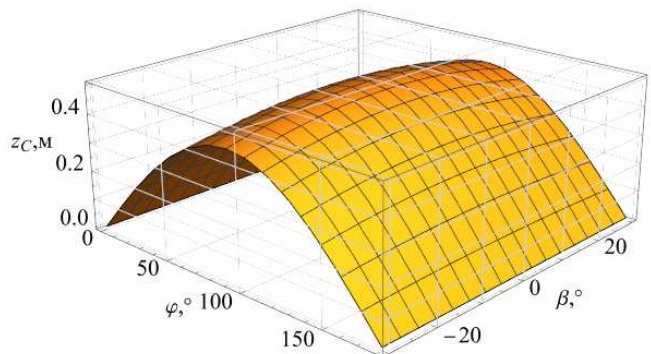


Рис. 3. Возможные значения вертикальной координаты z_C

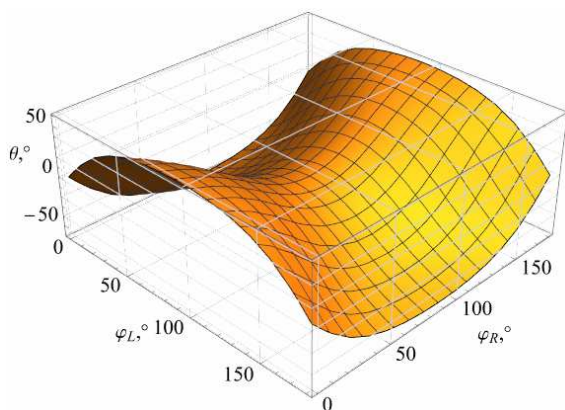


Рис. 4. Возможные значения угла крена θ

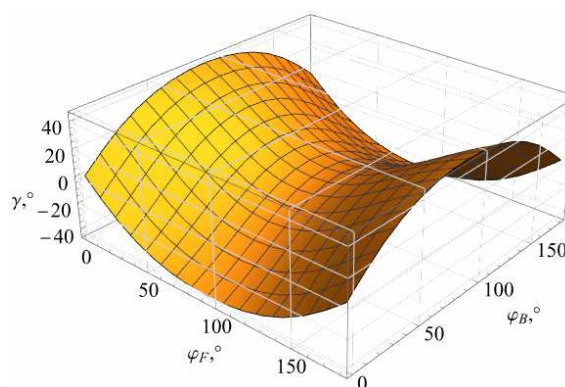


Рис. 5. Возможные значения угла тангажа γ

По результатам построения графиков получены максимальные и минимальные значения углов крена, тангажа и вертикальной координаты при заданных размерах и ограничениях:

$$z_C \leq l_1 + l_2 = 0.5 \text{ м}, \quad |\theta| \leq \arctan\left(\frac{l_1 + l_2}{2w}\right) \approx 59^\circ, \quad |\gamma| \leq \arctan\left(\frac{l_1 + l_2}{2l + l_2 - l_1}\right) = 45^\circ. \quad (14)$$

Результаты работы можно использовать для оценки возможных движений четвероногого робота и планирования походки робота.

Выводы. По результатам численных расчетов для частных случаев движений робота можно сделать выводы о возможности позиционирования и ориентации платформы робота при заданных размерах звеньев робота и ограничениях на углы поворота звеньев ног. Для рассмотренного примера числовых значений параметров робота получены ограничения на величину угла крена в 59 градусов и ограничение на угол тангажа в 45 градусов.

По результатам работы получены аналитические формулы для зависимостей углов крена и тангажа и высоты корпуса робота от углов поворота звеньев ног. Полученные уравнения позволили оценить диапазоны изменения углов крена и тангажа корпуса робота, а также высот его корпуса над горизонтальной поверхностью при наличии конструктивных ограничений на углы поворота звеньев ног робота. Результаты работы могут быть использованы на этапе проектирования четвероногих роботов и в задаче планирования движений робота.

Заключение

В данной работе с помощью уравнений геометрии движения четвероногого робота получены аналитические формулы для определения диапазонов возможных углов крена и тангажа корпуса робота при его пространственном движении и контакте всех его ног с горизонтальной опорной поверхностью.

Проведен анализ диапазонов допустимых высот корпуса робота над горизонтальной поверхностью, углов крена и тангажа при заданных размерах робота и ограничениях на углы поворота звеньев ног. Совокупность полученных диапазонов характеризует рабочую область корпуса четвероногого робота при опоре его конечностей на неподвижную поверхность.

Полученные аналитические формулы могут быть использованы на этапе проектирования четвероногих роботов, а также в задачах планирования движений и управления движением указанного класса роботов.

Финансирование. Работа выполнена в рамках проекта «Разработка программного обеспечения и систем управления движением четвероногих шагающих роботов» при поддержке гранта НИУ «МЭИ» на реализацию программы научных исследований «Приоритет 2030: Технологии будущего» в 2024-2026 гг.

Список литературы / References

1. Павловский В.Е. О разработке шагающих машин // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. – 2013. – №101. – С. 1-32.
1. Pavlovsky V.E. For elaboration of walking machines // Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS. 2013, no. 101, pp. 1-32.

2. Taheri H., Mozayani N. A study on quadruped mobile robot // Mechanism and Machine Theory. 2023, vol. 190, p. 105448. DOI: 10.1016/j.mechmachtheory.2023.105448.
3. Chai H., Li Y., Song R., Zhang G., Zhang Q., Liu S., Hou J., Xin Y., Yuan M., Zhang G., Yang Z. A survey of the development of quadruped robots: joint configuration, dynamic locomotion control method and mobile manipulation approach // Biomimetic Intelligence and Robotics. 2021, vol. 2, iss. 1, p. 100029. DOI: 10.1016/j.birob.2021.100029.
4. Raibert M., Blankespoor K., Nelson G., Playter R. BigDog, the rough-terrain quadruped robot // Proceedings of the 17th World Congress The International Federation of Automatic Control. 2008, vol. 41, iss. 2, pp. 10822-10825. DOI: 10.3182/20080706-5-KR-1001.01833.
5. Semini C. Design of the hydraulically actuated, torque-controlled quadruped robot HyQ2Max // IEEE/ASME Transactions on Mechatronics. 2017, vol. 22, no. 2, pp. 635-646. DOI: 10.1109/TMECH.2016.2616284.
6. Hyun D.J., Lee J., Park S., Kim S. Implementation of trot-to-gallop transition and subsequent gallop on the MIT Cheetah I // The International Journal of Robotics Research. 2016, vol. 35, iss. 13, pp. 1627-1650. DOI: 10.1177/0278364916640102.
7. Hutter M., Gehring C., Jud D., Lauber A., Bellicoso C.D., Tsounis V., Hwangbo J., Bodie K., Fankhauser P., Bloesch M., Diethelm R., Bachmann S., Melzer A., Hoepflinger M. ANYmal – a highly mobile and dynamic quadrupedal robot // IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS). 2016, pp. 38-44. DOI: 10.1109/IROS.2016.7758092.
8. Kovalev V., Shkromada A., Ouerdane H., Osinenko P. Combining model-predictive control and predictive reinforcement learning for stable quadrupedal robot locomotion // arXiv. 2023. DOI: 10.48550/arXiv.2307.07752.
9. Bledt G., Powell M.J., Katz B., Di Carlo J., Wensing P.M., Kim S. MIT Cheetah 3: Design and control of a robust, dynamic quadruped robot // IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS). 2018, pp. 2245-2252. DOI: 10.1109/IROS.2018.8593885.
10. Focchi M., Barasuol V., Havoutis I., Buchli J., Semini C., Caldwell D.G. Local reflex generation for obstacle negotiation in quadrupedal locomotion // Nature-Inspired Mobile Robotics. 2013, pp. 443-450. DOI: 10.1142/9789814525534_0056.
11. Winkler A.W., Bellicoso C.D., Hutter M., Buchli J. Gait and trajectory optimization for legged systems through phase-based end-effector parameterization // IEEE Robotics and Automation Letters. 2018, vol. 3, no. 3, pp. 1560-1567. DOI: 10.1109/LRA.2018.2798285.
12. Bellicoso C.D., Jenelten F., Gehring C., Hutter M. Dynamic locomotion through online nonlinear motion optimization for quadrupedal robots // IEEE Robotics and Automation Letters. 2018, vol. 3, no. 3, pp. 2261-2268. DOI: 10.1109/LRA.2018.2794620.
13. Kolter J.Z., Rodgers M.P., Ng A.Y. A control architecture for quadruped locomotion over rough terrain // IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA). 2008, pp. 811-818. DOI: 10.1109/ROBOT.2008.4543305.
14. Gehring C., Coros S., Hutter M., Bloesch M., Hoepflinger M.A., Siegwart R. Control of dynamic gaits for a quadrupedal robot // IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA). 2013, pp. 3287-3292. DOI: 10.1109/ICRA.2013.6631035.
15. Фернандо М.Ж., Сайпулаев Г.Р., Сайпулаев М.Р. Анализ кинематики четвероногого робота при поворотных движениях его корпуса // Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don). – 2025. – Т. 25, № 1. – С. 14-22. DOI: 10.23947/2687-1653-2025-25-1-14-22.
15. Fernando M.J., Saypulaev G.R., Saypulaev M.R. Analysis of a four-legged robot kinematics during rotational movements of its body // Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don). 2025, vol. 25, no. 1, pp. 14-22. DOI: 10.23947/2687-1653-2025-25-1-14-22.
16. Saypulaev G.R., Saypulaev M.R., Sokiranskaya E.K., Fernando M.J., Mohamed A.M., Kazarinova A.S. Dynamic analysis of a quadruped robot // 2025 7th International Youth Conference on Radio Electronics, Electrical and Power Engineering (REEPE). 2025, pp. 1-6. DOI: 10.1109/REEPE63962.2025.10970839.

Сведения об авторах:

Сайпулаев Муса Русланович – кандидат технических наук, старший преподаватель кафедры Робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин	Saypulaev Musa Ruslanovich – candidate of technical sciences, senior lecturer of the Department of robotics, mechatronics, dynamics and machine strength
Мохамед Али Магди – студент	Mohamed Ali Magdi – student
Казаринова Анастасия Сергеевна – студентка	Kazarinova Anastasia Sergeevna – student
Сибирцев Никита Андреевич – студент	Sibirtsev Nikita Andreevich – student
saypulaevmr@mail.ru	

Получена 12.08.2025