

ДИНАМИКА МОБИЛЬНОЙ ОМНИ-ПЛАТФОРМЫ, БАЛАНСИРУЮЩЕЙ НА СФЕРИЧЕСКОМ КОЛЕСЕ, С УЧЕТОМ НЕГОЛОНОМНЫХ СВЯЗЕЙ

*Сайпулаев Г.Р., Демидов А.А., Ионина А.Д., Липатов А.А.
Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва*

Ключевые слова: всенаправленная платформа, динамика, неголономные связи, уравнение Аппеля, омни-колесо, сферическое колесо, омни-платформа.

Аннотация. В рамках данной работы ставится задача разработки модели динамики омни-платформы, балансирующей на сферическом колесе, при условиях отсутствия проскальзывания точек контакта соприкасающихся тел. Рассматривается конструкция мобильной платформы, оснащенной тремя омни-колесами, плоскости которых касаются общей параллели сферического колеса. Представлены нелинейные уравнения динамики мобильного робота и их линейное приближение при малых углах крена и тангажа омни-платформы. В случае расположения омни-платформы в вертикальном положении равновесия на сферическом колесе проведена оценка моментов двигателей колес, необходимых для реализации требуемых движений робота. По результатам численных расчетов для простых движений можно сделать вывод, что для обеспечения платформы робота возможностью перемещаться с линейными ускорениями до 1 м/с^2 и вращаться с угловым ускорением до 1 рад/с^2 достаточно, чтобы выходные валы двигателей каждого омни-колеса развивали моменты до $0,5 \text{ Нм}$. Полученная динамическая модель робота может быть использована при подборе двигателей колес робота и построении управления движением омни-платформы, балансирующей на сферическом колесе, на динамическом уровне.

DYNAMICS OF A MOBILE OMNI-PLATFORM BALANCING ON A SPHERICAL WHEEL, TAKING INTO ACCOUNT NONHOLONOMIC-CONSTRAINTS

*Saypulaev G.R., Demidov A.A., Ionina A.D., Lipatov A.A.
National Research University “Moscow Power Engineering Institute”, Moscow*

Keywords: omnidirectional platform, dynamics, nonholonomic constraints, Appel’s equation, omni-wheel, spherical wheel, omni-platform.

Abstract. In this paper, we set the task of developing a model of the dynamics of an omni-platform balancing on a spherical wheel, under conditions of no slippage of the contact points of the contacting bodies. The design of a mobile platform equipped with three omni-wheels, the planes of which touch the common parallel of a spherical wheel, is considered. Nonlinear equations of the dynamics of a mobile robot and their linear approximation at small roll and pitch angles of the omni-platform are presented. In the case of the omni-platform location in a vertical equilibrium position on a spherical wheel, the torques of the wheel motors necessary to implement the required robot movements are estimated. Based on the results of numerical calculations for simple movements, it can be concluded that to provide the robot platform with the ability to move with linear accelerations of up to 1 m/s^2 and rotate with angular acceleration of up to 1 rad/s^2 , it is sufficient for the output shafts of the motors of each omni-wheel to develop torques of up to 0.5 Nm . The resulting dynamic model of the robot can be used to select the motors of the robot wheels and to construct the control of the motion of the omni-platform balancing on a spherical wheel at a dynamic level.

Введение

Широкое распространение роботов при работе в складских помещениях или в условиях, где требуется высокая маневренность транспортных средств, привело к развитию мобильных роботов всенаправленного движения. Одним из распространенных типов роботов, способных осуществлять всенаправленное движение, являются шароботы – мобильные роботы, представленные платформой, балансирующей на сферическом колесе, которое приводится в движение омни-колесами (см. рис. 1).

В статье [1] предлагается метод навигации шаробота с тремя омни-колесами на основе одного из алгоритмов машинного обучения – обучения с подкреплением. Указывается, что такой метод не требует упрощающих предположений, таких как отсутствие проскальзывания между шаром и полом. Однако при построении модели компьютерной симуляции движения

робота используется модель динамики, учитывающая отсутствие проскальзывания. При этом указанная модель не приводится в явном виде, что затрудняет анализ её детализации.

В работе [2] подробно описано конструирование планетарной передачи для приводов омни-колес и моделирование динамики плоского движения шаробота.

В статье [3] предложен подход к конструированию шаробота, в котором статическая устойчивость поддерживается за счет подходящего выбора положения центра масс робота. Однако ограничения такого подхода приводят к максимальным линейной скорости робота до 5 см/с и угловой скорости робота до 1 рад/с. Устранение угловых отклонений платформы робота от вертикали реализуется при начальных отклонениях до 3 градусов.

В работе [4] предложен линейно-квадратичный регулятор шароботом на основе модели динамики плоского движения платформы робота.

В исследованиях [5, 6] представлена разработка схем управления шароботом без помощи рук, позволяющих пользователям, в том числе пользователям колясок с ручным управлением, управлять его движением путем наклона и поворота туловища. А в работах [7, 8] того же коллектива автора описываются результаты построения полномасштабного прототипа шаробота MiaPURE и предлагается система управления на основе метода пассивных искусственных потенциальных полей, позволяющая избегать столкновений с препятствиями. Трансмиссия MiaPURE способна перевозить полезную нагрузку 60 кг, развивать максимальную скорость 2,3 м/с и останавливаться с ускорением $0,7 \text{ м/с}^2$ в выбранном направлении движения.

В исследовании [9] представлена система управления для следования шаробота по траектории, предназначенная для работы в сложных условиях со статическими и динамическими препятствиями. Схема управления с нелинейной моделью прогнозирования разработана для предсказания будущих положений шаробота и окружающих препятствий.

В работе [10] представлена модель динамики без учета поворота платформы шаробота на угол курса и предложена схема управления на основе указанной модели динамики.

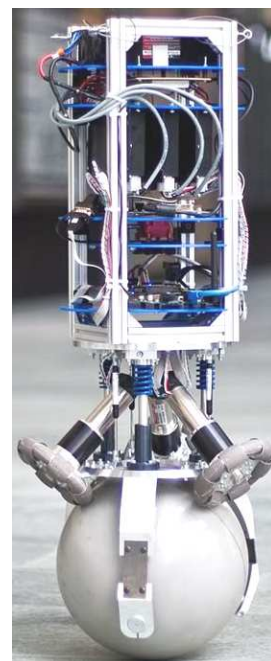
В работе [11] описана методика калибровки блока инерциальных датчиков, определяющих смещения нуля и погрешность масштабного коэффициента гироскопов и акселерометров. Показания откалиброванных датчиков используются для оценивания положения и ориентации платформы шаробота с помощью алгоритма фильтра Калмана.

В статье [12] представлен метод управления на основе нейронной сети для отслеживания траектории и балансировки шаробота в условиях неопределенности. Указанный метод использует математическую модель динамики системы.

Проведенный краткий обзор показывает актуальность разработки модели динамики пространственного движения шаробота.

В рамках данной работы ставится задача разработки математической модели динамики пространственного движения мобильного робота и оценки моментов двигателей омни-колес, требуемых для реализации движений с заданными ускорениями.

Материалы и методы исследований. Для математического описания движения робота вводятся следующие системы координат (СК), представленные на кинематической схеме (рис. 2): xyz – неподвижная СК $SX_S Y_S Z_S$ – СК, связанная со сферическим колесом; $Ox_P Y_P Z_P$ – СК, связанная с омни-платформой.



а



б

Рис. 1. Шаробот:
а) пример робота;
б) омни-колесо

На схеме (рис. 2) введены следующие обозначения: O – точка платформы, в которой пересекаются оси трех омни-колес; S – геометрический центр сферического колеса; C_i – геометрический центр i -го омни-колеса; K_i – точка контакта i -го омни-колеса со сферическим колесом; K – точка контакта сферического колеса с опорной поверхностью.

Конфигурация омни-колес описывается следующими параметрами: $\beta = \angle(OC_i, OS)$ – угол, характеризующий направление оси i -го омни-колеса относительно вертикальной оси симметрии платформы OZ_P ; $\alpha_i = \angle(OC_i, OX_P)$ – угол, характеризующий направление оси i -го омни-колеса относительно горизонтальной оси платформы OX_P .

При выводе уравнений динамики шарбота примем следующие допущения:

- омни-колеса, а также части механических передач колесных приводов невесомы;
- сферическое колесо является однородным, как следствие, центр масс сферического колеса расположен в его геометрическом центре;
- центр масс платформы расположен в точке O ;
- омни-колеса моделируются диском, точка контакта которого может проскальзывать в направлении перпендикулярном оси контактирующего ролика (так называемая упрощенная модель омни-колеса);
- все тела системы являются абсолютно твердыми;
- оси омни-колес перпендикулярны вектору, связывающему геометрический центр сферического колеса с геометрическими центрами омни-колес;
- шарбот безотрывно движется по горизонтальной плоскости;

– контакт сферического колеса с опорной поверхностью описывается моделью качения без проскальзывания, а угловая скорость вращения полагается равной нулю из-за рассмотрения модели резинового шара.

В качестве основы при выводе модели динамики используются уравнения кинематики [13, 14]:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_O &= \dot{x}_S + R_\Sigma [\dot{\theta} c \gamma c \theta c \psi + \dot{\gamma} (c \gamma s \psi - s \gamma s \theta c \psi) + \dot{\psi} (s \gamma c \psi - c \gamma s \theta s \psi)], & \omega_{Sx} &= -\dot{y}_S / R_S, \\
 \dot{y}_O &= \dot{y}_S + R_\Sigma [\dot{\theta} c \gamma c \theta s \psi - \dot{\gamma} (c \gamma c \psi + s \gamma s \theta s \psi) + \dot{\psi} (s \gamma s \psi + c \gamma s \theta c \psi)], & \omega_{Sy} &= \dot{x}_S / R_S, \\
 \omega_{Px} &= \dot{\gamma} - \dot{\psi} s \theta, & \omega_{Py} &= \dot{\theta} c \gamma + \dot{\psi} c \theta s \gamma, & \omega_{Pz} &= \dot{\psi} c \theta c \gamma - \dot{\theta} s \gamma, & \dot{z}_O &= -R_\Sigma (\dot{\theta} c \gamma s \theta + \dot{\gamma} s \gamma c \theta), \\
 R_w \dot{\phi}_i &= (R_S [(s \gamma c \beta + c \gamma s \beta s \alpha_i) \dot{\theta} + (c \theta s \gamma s \beta s \alpha_i - s \theta s \beta c \alpha_i - c \theta c \gamma c \beta) \dot{\psi} + s \beta c \alpha_i \dot{\gamma}] + \\
 &+ [c \beta (s \psi c \gamma s \theta - c \psi s \gamma) - s \psi c \theta s \beta c \alpha_i - s \beta s \alpha_i (c \psi c \gamma + s \psi s \gamma s \theta)] \dot{x}_S + \\
 &+ [c \psi c \theta s \beta c \alpha_i - c \beta (c \psi c \gamma s \theta + s \psi s \gamma) + s \beta s \alpha_i (c \psi s \gamma s \theta - s \psi c \gamma)] \dot{y}_S).
 \end{aligned} \tag{1}$$

где ω_{Px} , ω_{Py} , ω_{Pz} – проекции угловой скорости платформы на оси связанной СК $OX_P Y_P Z_P$; ψ , θ , γ – углы курса, тангажа и крена омни-платформы; x_O , y_O , z_O и x_S , y_S , z_S – координаты точек O и S в осях неподвижной СК; R_S , R_w – радиусы сферического колеса и омни-колеса;

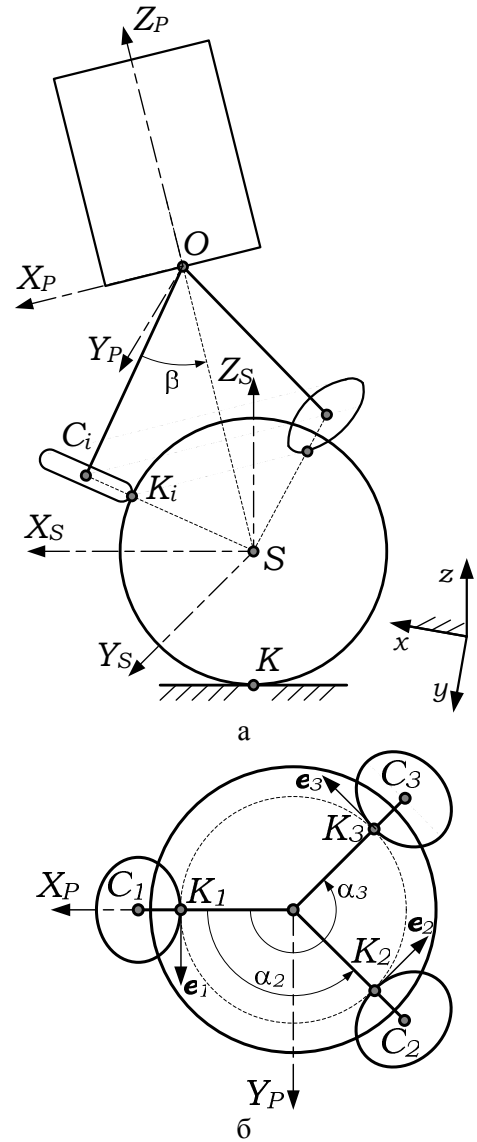


Рис. 2. Схема омни-платформы, балансирующей на сферическом колесе [13]: а) вид сбоку; б) вид сверху

ω_{Sx}, ω_{Sy} – проекции угловой скорости сферического колеса на горизонтальные оси неподвижной СК; $\dot{\phi}_i$ – угол поворота омни-колеса, вокруг собственной оси вращения; $R_{\Sigma} = (R_s + R_w) / s\beta$. Здесь и далее точкой над переменной обозначено дифференцирование по времени и используются сокращения для тригонометрических функций: $s x = \sin x, c x = \cos x$, где x – произвольный угол поворота.

С учетом принятых допущений система имеет 5 степеней свободы. Для описания динамики системы с неголономными связями удобно записать уравнения динамики в форме уравнений Аппеля:

$$\frac{\partial S}{\partial \dot{x}_S} = \Pi_x, \quad \frac{\partial S}{\partial \dot{y}_S} = \Pi_y, \quad \frac{\partial S}{\partial \dot{\psi}} = \Pi_{\psi}, \quad \frac{\partial S}{\partial \dot{\theta}} = \Pi_{\theta}, \quad \frac{\partial S}{\partial \dot{\gamma}} = \Pi_{\gamma}, \quad (2)$$

где S – энергия ускорения системы; $\Pi_x, \Pi_y, \Pi_{\psi}, \Pi_{\theta}, \Pi_{\gamma}$ – обобщенные силы, связанные с соответствующими псевдоскоростями. Здесь в качестве независимых псевдоскоростей приняты следующие обобщенные скорости $\dot{x}_S, \dot{y}_S, \dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\gamma}$.

В рассматриваемой системе энергия ускорения S системы, может быть вычислена как сумма энергии ускорения сферического колеса S_S и энергии ускорения платформы S_P :

$$\begin{aligned} S = S_P + S_S = & \frac{1}{2} m_S (\dot{x}_S^2 + \dot{y}_S^2 + \dot{z}_S^2) + \frac{1}{2} J_S (\dot{\omega}_{Sx}^2 + \dot{\omega}_{Sy}^2 + \dot{\omega}_{Sz}^2) + \\ & + \frac{1}{2} m_P (\dot{x}_O^2 + \dot{y}_O^2 + \dot{z}_O^2) + \frac{1}{2} (J_{Px} \dot{\omega}_{Px}^2 + J_{Py} \dot{\omega}_{Py}^2 + J_{Pz} \dot{\omega}_{Pz}^2) + \\ & + (J_{Pz} - J_{Py}) \omega_{Py} \omega_{Pz} \dot{\omega}_{Px} + (J_{Px} - J_{Pz}) \omega_{Px} \omega_{Pz} \dot{\omega}_{Py} + (J_{Py} - J_{Px}) \omega_{Px} \omega_{Py} \dot{\omega}_{Pz} \end{aligned} \quad (3)$$

или с учетом осевой симметрии платформы $J_{Py} = J_{Px}$ и качения сферического колеса без проскальзывания:

$$\begin{aligned} S = & \frac{1}{2} \left[\left(m_S + \left(J_S / R_{\Sigma}^2 \right) \right) (\dot{x}_S^2 + \dot{y}_S^2) + m_P (\dot{x}_O^2 + \dot{y}_O^2 + \dot{z}_O^2) + \left(J_{Px} (\dot{\omega}_{Px}^2 + \dot{\omega}_{Py}^2) + J_{Pz} \dot{\omega}_{Pz}^2 \right) \right] + \\ & + (J_{Pz} - J_{Px}) \omega_{Pz} (\omega_{Py} \dot{\omega}_{Px} - \omega_{Px} \dot{\omega}_{Py}), \end{aligned} \quad (4)$$

где m_S, m_P – масса сферы и платформы, соответственно; J_S – момент инерции сферического колеса; J_{Px}, J_{Py}, J_{Pz} – моменты инерции платформы относительно соответствующих осей СК $Ox_P y_P z_P$.

Ускорения, входящие в (4), определяются дифференцированием (1):

$$\begin{aligned} \ddot{x}_O = & \ddot{x}_S + R_{\Sigma} \left[\ddot{\theta} c \gamma c \theta c \psi + \ddot{\gamma} (c \gamma s \psi - s \gamma s \theta c \psi) + \ddot{\psi} (s \gamma c \psi - c \gamma s \theta s \psi) - \dot{\theta}^2 c \gamma s \theta c \psi - \right. \\ & - \dot{\gamma}^2 (c \gamma s \theta c \psi + s \gamma s \psi) - \dot{\psi}^2 (c \gamma s \theta c \psi + s \gamma s \psi) - 2 (\dot{\theta} \dot{\gamma} s \gamma c \theta c \psi + \dot{\theta} \dot{\psi} c \gamma c \theta s \psi - \dot{\gamma} \dot{\psi} (s \gamma s \theta s \psi + c \gamma c \psi)) \left. \right], \\ \ddot{y}_O = & \ddot{y}_S + R_{\Sigma} \left[\ddot{\theta} c \gamma c \theta s \psi - \ddot{\gamma} (c \gamma c \psi + s \gamma s \theta s \psi) + \ddot{\psi} (s \gamma s \psi + c \gamma s \theta c \psi) - \dot{\theta}^2 c \gamma s \theta s \psi + \right. \\ & + \dot{\gamma}^2 (s \gamma c \psi - c \gamma s \theta s \psi) + \dot{\psi}^2 (s \gamma c \psi - c \gamma s \theta s \psi) - 2 (\dot{\theta} \dot{\gamma} s \gamma c \theta s \psi - \dot{\theta} \dot{\psi} c \gamma c \theta c \psi - \dot{\gamma} \dot{\psi} (c \gamma s \psi - s \gamma s \theta c \psi)) \left. \right], \\ \ddot{z}_O = & -R_{\Sigma} \left[\ddot{\theta} c \gamma s \theta + \ddot{\gamma} s \gamma c \theta + (\dot{\theta}^2 + \dot{\gamma}^2) c \gamma c \theta - 2 \dot{\theta} \dot{\gamma} s \gamma s \theta \right], \quad \dot{\omega}_{Px} = \ddot{\gamma} - \dot{\theta} \dot{\psi} c \theta - \dot{\psi} s \theta, \\ \dot{\omega}_{Py} = & \ddot{\theta} c \gamma + \ddot{\psi} s \gamma c \theta - \dot{\theta} \dot{\gamma} s \gamma - \dot{\theta} \dot{\psi} s \gamma s \theta + \dot{\gamma} \dot{\psi} c \gamma c \theta, \quad \dot{\omega}_{Pz} = -\ddot{\theta} s \gamma + \ddot{\psi} c \gamma c \theta - \dot{\theta} \dot{\gamma} c \gamma - \dot{\theta} \dot{\psi} c \gamma s \theta - \dot{\gamma} \dot{\psi} s \gamma c \theta. \end{aligned} \quad (5)$$

Определим обобщенные силы, используя условие равенства мощностей сил, действующих на систему:

$$\sum_{i=1}^3 M_i \dot{\phi}_i - m_P g \dot{z}_O = \Pi_x \dot{x}_S + \Pi_y \dot{y}_S + \Pi_{\psi} \dot{\psi} + \Pi_{\theta} \dot{\theta} + \Pi_{\gamma} \dot{\gamma}, \quad (6)$$

где M_i – момент, создаваемый приводом i -ого омни-колеса.

Подставив выражения (1) в условие равенства мощностей (6), получим выражения для обобщенных сил в виде:

$$\begin{aligned}
\Pi_x &= \frac{1}{R_w} \sum_{i=1}^3 \left[c\beta (s\psi c\gamma s\theta - c\psi s\gamma) - s\psi c\theta s\beta c\alpha_i - s\beta s\alpha_i (c\psi c\gamma + s\psi s\gamma s\theta) \right] M_i, \\
\Pi_y &= \frac{1}{R_w} \sum_{i=1}^3 \left[c\psi c\theta s\beta c\alpha_i - c\beta (c\psi c\gamma s\theta + s\psi s\gamma) + s\beta s\alpha_i (c\psi s\gamma s\theta - s\psi c\gamma) \right] M_i, \\
\Pi_\psi &= \frac{R_S}{R_w} \sum_{i=1}^3 (c\theta s\gamma s\beta s\alpha_i - s\theta s\beta c\alpha_i - c\theta c\gamma c\beta) M_i, \\
\Pi_\theta &= \frac{R_S}{R_w} \sum_{i=1}^3 (s\gamma c\beta + c\gamma s\beta s\alpha_i) M_i + m_P g R_\Sigma c\gamma s\theta, \quad \Pi_\gamma = \frac{R_S}{R_w} \sum_{i=1}^3 M_i s\beta c\alpha_i + m_P g R_\Sigma s\gamma c\theta.
\end{aligned} \tag{7}$$

С учетом (4), (5) и (7) уравнения Аппеля (2) получим в виде:

$$\begin{aligned}
&\left(m_S + \left(J_S / R_S^2 \right) \right) \ddot{x}_S + m_P \ddot{x}_O = \Pi_x, \quad \left(m_S + \left(J_S / R_S^2 \right) \right) \ddot{y}_S + m_P \ddot{y}_O = \Pi_y, \\
&m_P R_\Sigma \left[\ddot{x}_O (s\gamma c\psi - c\gamma s\theta s\psi) + \ddot{y}_O (s\gamma s\psi + c\gamma s\theta c\psi) \right] + J_{Pz} \dot{\omega}_{Pz} c\gamma c\theta + \\
&\quad + J_{Px} (\dot{\omega}_{Py} s\gamma c\theta - \dot{\omega}_{Px} s\theta) - (J_{Pz} - J_{Px}) \omega_{Pz} (\omega_{Py} s\theta + \omega_{Px} s\gamma c\theta) = \Pi_\psi, \\
&m_P R_\Sigma (\ddot{x}_O c\theta c\psi + \ddot{y}_O c\theta s\psi - \ddot{z}_O s\theta) c\gamma + J_{Px} \dot{\omega}_{Py} c\gamma - J_{Pz} \dot{\omega}_{Pz} s\gamma - \\
&\quad - (J_{Pz} - J_{Px}) \omega_{Pz} \omega_{Px} c\gamma = \Pi_\theta, \\
&m_P R_\Sigma \left[\ddot{x}_O (c\gamma s\psi - s\gamma s\theta c\psi) - \ddot{y}_O (c\gamma c\psi + s\gamma s\theta s\psi) - \ddot{z}_O s\gamma c\theta \right] + \\
&\quad + J_{Px} \dot{\omega}_{Px} + (J_{Pz} - J_{Px}) \omega_{Pz} \omega_{Py} = \Pi_\gamma,
\end{aligned} \tag{8}$$

Полученная модель динамики (8) является нелинейной и может быть линеаризована для синтеза законов управления.

С учетом малости углов тангажа и крена ($\gamma, \theta < 1$ рад) при функционировании робота линеаризованные уравнения динамики можно представить в виде:

$$\begin{aligned}
m_\Sigma (\dot{V}_L - \dot{\psi} V_T) + m_P R_\Sigma (\ddot{\theta} + \ddot{\psi} \gamma - \dot{\psi}^2 \theta + 2\dot{\psi} \dot{\gamma}) &= -\frac{1}{R_w} \sum_{i=1}^3 (s\beta s\alpha_i + \gamma c\beta) M_i, \\
m_\Sigma (\dot{V}_T + \dot{\psi} V_L) + m_P R_\Sigma (-\ddot{\gamma} + \ddot{\psi} \theta + \dot{\psi}^2 \gamma + 2\dot{\psi} \dot{\theta}) &= \frac{1}{R_w} \sum_{i=1}^3 (s\beta c\alpha_i - \theta c\beta) M_i, \\
J_{Pz} \ddot{\psi} + m_P R_\Sigma [\gamma (\dot{V}_L - \dot{\psi} V_T) + \theta (\dot{V}_T + \dot{\psi} V_L)] &= -\frac{R_S}{R_w} \sum_{i=1}^3 (c\beta - \gamma s\beta s\alpha_i + \theta s\beta c\alpha_i) M_i, \\
m_P R_\Sigma (\dot{V}_L - \dot{\psi} V_T) + J_X \ddot{\theta} + (J_X - J_{Pz}) (\ddot{\psi} \gamma - \dot{\psi}^2 \theta) + (2J_X - J_{Pz}) \dot{\gamma} \dot{\psi} &= \\
= \frac{R_S}{R_w} \sum_{i=1}^3 (s\beta s\alpha_i + \gamma c\beta) M_i + m_P g R_\Sigma \theta, \\
-m_P R_\Sigma (\dot{V}_T + \dot{\psi} V_L) + J_X (\ddot{\gamma} - \ddot{\psi} \theta) + (J_{Pz} - 2J_X) \dot{\psi} \dot{\theta} + (J_{Pz} - J_X) \dot{\psi}^2 \gamma &= \\
= \frac{R_S}{R_w} \sum_{i=1}^3 M_i s\beta c\alpha_i + m_P g R_\Sigma \gamma,
\end{aligned} \tag{9}$$

где для краткости введены обозначения $m_\Sigma = m_S + (J_S / R_S^2) + m_P$, $J_X = J_{Px} + m_P R_\Sigma^2$ и осуществлен переход к переменным $V_L = \dot{x}_S c\psi + \dot{y}_S s\psi$, $V_T = -\dot{x}_S s\psi + \dot{y}_S c\psi$, характеризующим проекции скорости геометрического центра сферического колеса на СК, повернутую на угол курса омни-платформы относительно СК $SX_S Y_S Z_S$.

Полученную линеаризованную модель динамики можно использовать в задачах синтеза управления и для оценки тяговых характеристик приводов омни-колес, необходимых для осуществления заданных движений робота.

Проведем оценку требуемых моментов приводов омни-колес при вертикальном положении омни-платформы, т.е. когда углы крена и тангажа равны нулю. В этом случае уравнения динамики робота примут вид:

$$m_{\Sigma} (\dot{V}_L - \psi V_T) = -\frac{s\beta}{R_w} \sum_{i=1}^3 M_i s \alpha_i, \quad m_{\Sigma} (\dot{V}_T + \psi V_L) = \frac{s\beta}{R_w} \sum_{i=1}^3 M_i c \alpha_i, \quad J_{Pz} \ddot{\psi} = -\frac{R_S c \beta}{R_w} \sum_{i=1}^3 M_i. \quad (10)$$

Отметим, что в случае использования простейшей математической модели динамики двигателя постоянного двигателя для описания моментов, создаваемых двигателями омни-колес, уравнения (10) аналогичны по структуре уравнениям динамики симметричного омни-экипажа [15] и могут быть проинтегрированы в квадратурах при постоянных напряжениях питания двигателей.

Результаты численных расчетов моментов приводов омни-колес для простых движений сведены в таблице 1. При численных расчетах были использованы значения массо-габаритных параметров шаробота [13]: $R_S = 0,2$ м; $R_w = 0,0664$ м; $\beta = 45^\circ$; $\alpha_1 = 0^\circ$; $\alpha_2 = 120^\circ$; $\alpha_3 = 240^\circ$; $m_s = 3,2$ кг; $m_p = 2,6$ кг; $J_S = 0,085135$ кг·м²; $J_{Pz} = 0,001587$ кг·м².

Табл. 1. Результаты расчетов моментов приводов омни-колес

$\dot{V}_L, \text{ м/с}^2$	$\dot{V}_T, \text{ м/с}^2$	$\ddot{\psi}, \text{ рад/с}^2$	$M_1, \text{ Н·м}$	$M_2, \text{ Н·м}$	$M_3, \text{ Н·м}$
1	0	0	0	-0,4298	0,4298
0	1	0	0,4963	-0,2482	-0,2482
0	0	1	-0,248·10 ⁻³	-0,248·10 ⁻³	-0,248·10 ⁻³

Полученная модель динамики позволяет оценить необходимые тяговые характеристики двигателей омни-колес, необходимые для реализации требуемого движения. Указанные результаты в совокупности с необходимыми скоростными характеристиками двигателей омни-колес [13, 14] дают необходимые минимальные паспортные значения двигателей колес, приводящих в движение рассматриваемый робот.

Выводы. По результатам численных расчетов для простых движений можно сделать вывод, что для обеспечения платформы робота возможностью перемещаться с линейными ускорениями до 1 м/с² и вращаться с угловым ускорением до 1 рад/с² достаточно, чтобы выходные валы двигателей каждого омни-колеса развивали моменты до 0,5 Н·м.

По результатам работы получены линеаризованные уравнения динамики мобильного робота при его пространственном движении с учетом уравнений неголономных связей, характеризующих отсутствие проскальзывание точек контакта соприкасающихся тел. Полученные уравнения позволили оценить тяговые характеристики двигателей омни-колес, необходимые для реализации простых движений робота. Результаты работы могут быть использованы при подборе двигателей колес робота и построении управления движением омни-платформой, балансирующей на сферическом колесе, на динамическом уровне.

Заключение

В данной работе с помощью формализма Аппеля построена математическая модель динамики трехколесной омни-платформы, балансирующей на сферическом колесе, при её пространственном движении и отсутствии проскальзывания точек соприкосновения взаимодействующих тел.

Для случая движения мобильного робота по горизонтальной поверхности получены линеаризованные уравнения динамики, учитывающие малые изменения углов крена и тангажа омни-платформы. Отмечено, что при расположении платформы в верхнем положении равновесия линеаризованные уравнения динамики могут быть проинтегрированы в квадратурах в частном случае.

Полученная динамическая модель робота может быть использована при подборе двигателей колес робота и построении управления движением омни-платформы, балансирующей на сферическом колесе, на динамическом уровне.

Финансовая поддержка. Работа выполнена в рамках проекта «Разработка программного обеспечения и систем управления движением новых мобильных роботов, оснащенных сферическими колесами и омни-колесами» при поддержке гранта НИУ «МЭИ» на реализацию программы научных исследований «Приоритет 2030: Технологии будущего» в 2024-2026 гг.

Список литературы / References

1. Salehi A. Reinforcement learning for Ballbot navigation in uneven terrain // arXiv. 2025. DOI: 10.48550/arXiv.2505.18417.
2. Park S. Design, implementation, and control of a Ball-balancing robot // IEEE Access. 2024, vol. 12, pp. 127380-127389. DOI: 10.1109/ACCESS.2024.3456238.
3. Fornarelli L., Young J., McKenna T., Koya E., Hedley J. Stastaball: design and control of a statically stable ball robot // Robotics. 2023, vol. 12, p. 34. DOI: 10.3390/robotics12020034.
4. Pham A.-D., Thai B.H., Dang P.V., Vo N.T. Analysis of the parametric configuration impact on BallBot control performance // International Journal of Mechanical System Dynamics. 2024, vol. 4, pp. 446-460. DOI: 10.1002/msd2.12133.
5. Xiao C., Song S.Y., Chen Y., Mansouri M., Ramos J., Bleakney A.W., Norris W.R., Hsiao-Wecksler E.T. Exploiting physical human-robot interaction to provide a unique rolling experience with a riding Ballbot // arXiv. 2024. DOI: 10.48550/arXiv.2409.18452.
6. Xiao C., Song S.Y., Chen Y., Mansouri M., Ramos J., Bleakney A.W., Norris W.R., Hsiao-Wecksler E.T. An interactive hands-free controller for a riding Ballbot to enable simple shared control tasks // arXiv. 2024. DOI: 10.48550/arXiv.2409.19170.
7. Chen Y., Mansouri M., Lam D., Ramos J., Hsiao-Wecksler E.T. Design and control of a Ballbot drivetrain with high agility, minimal footprint, and high payload // arXiv. 2023. DOI: 10.48550/arXiv.2304.02887.
8. Chen Y., Mansouri M., Xiao C., Wang Z., Hsiao-Wecksler E.T., Norris W.R. Enabling shared-control for a riding Ballbot system // arXiv. 2024. DOI: 10.48550/arXiv.2409.07013.
9. Duc P.M., Cuong V.D., Hang N.T.T., Huy N.D., Anh N.T.V., Lam N.T. Dynamic obstacle avoidance using nonlinear model predictive control and control barrier function for Ballbot systems // JST: Smart Systems and Devices. 2024, vol. 34, iss. 3, pp. 035-042, DOI: 10.51316/jst.176.ssad.2024.34.3.5.
10. Lee S.-M., Park B.S. Robust Control for Trajectory Tracking and Balancing of a Ballbot // IEEE Access. 2020, vol. 8, pp. 159324-159330. DOI: 10.1109/ACCESS.2020.3020091.
11. Kheibari H.Z., Akbari M., Nejad A.S.M. Constructing IMU based on ADC and sensors calibration for Ballbot // 2013 First RSI/ISM International Conference on Robotics and Mechatronics (ICRoM), Tehran, Iran, 2013, pp. 449-454. DOI: 10.1109/ICRoM.2013.6510149.
12. Jang H.-G., Hyun C.-H., Park B.S. Neural network control for trajectory tracking and balancing of a Ball-balancing robot with uncertainty // Applied Sciences. 2021, vol. 11, p. 4739. DOI: 10.3390/app11114739.
13. Сайпулаев Г.Р., Сайпулаев М.Р., Семенякина Е.С., Снегирев И.С., Демидов А.А. Неголономная кинематика мобильной омни-платформы, балансирующей на сферическом колесе // Транспортное, горное и строительное машиностроение: наука и производство. – 2024. – № 28. – С. 9-17. – doi.org/10.26160/2658-3305-2024-28-9-17.
13. Saypulaev G.R., Saypulaev M.R., Semenyakina E.S., Snegirev I.S., Demidov A.A. Nonholonomic kinematics of a mobile omni-platform balancing on a spherical wheel // Transport, mining and construction engineering: science and production. 2024, no. 28, pp. 9-17. //doi.org/10.26160/2658-3305-2024-28-9-17.
14. Saypulaev G.R., Saypulaev M.R., Demidov A.A., Sokiranskaya E.K., Semenyakina E.S., Lipatov A.A. Mathematical modeling of the spatial kinematics of an omni-platform balancing on a spherical wheel // 2025 7th International Youth Conference on Radio Electronics, Electrical and Power Engineering (REEPE), Moscow, Russian Federation, 2025, pp. 1-6. DOI: 10.1109/REEPE63962.2025.10971113.
15. Moiseev G.N., Zobova A.A. Dynamics-based piecewise constant control of an omnivehicle // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2022, vol. 18, no. 4, pp. 661-680. DOI: 10.20537/nd221102.

Сведения об авторах:

Сайпулаев Гасан Русланович – кандидат технических наук, доцент кафедры Робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин
Демидов Александр Андреевич – студент
Ионина Алина Денисовна – студент
Липатов Александр Алексеевич – студент
saypulaevgr@mail.ru

Information about authors:

Saypulaev Gasan Ruslanovich – candidate of technical sciences, associate professor of the Department of robotics, mechatronics, dynamics and machine strength
Demidov Aleksandr Andreevich – student
Ionina Alina Denisovna – student
Lipatov Alexander Alekseevich – student

Получена 12.08.2025