

ЧИСЛЕННАЯ ГОМОГЕНИЗАЦИЯ УПРУГИХ СВОЙСТВ ДЛЯ 3D-ПЕЧАТНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Овечкин Ф.С.¹, Попов Н.В.², Куц М.С.¹

¹*Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, Москва;*

²*Независимый исследователь, Иркутск*

Ключевые слова: 3D-печать, аддитивные технологии, гомогенизация, эффективные свойства материала, матрица жесткости, метод конечных элементов.

Аннотация. В работе исследуются два подхода к определению компонент эффективного тензора упругости для пористых материалов, изготовленных методом 3D-печати. В первом подходе эффективный тензор упругости определяется путем решения регрессионной задачи, в то время как во втором подходе значения для каждого компонента определяются путем осреднения энергии деформации для соответствующего случая нагружения. Сравнение методов осуществляется на примере двух типов пористых материалов: изотропного материала с неупорядоченным распределением монодисперсных сферических пор и трансверсально-изотропного структурированного материала с сотовой структурой. Для каждого типа материала рассчитаны эквивалентные свойства в зависимости от его пористости и произведено сравнение со значениями, полученными по модели Фойгта. Результаты анализа показывают, что оба метода дают идентичные результаты в пределах погрешности, не превышающей 0,01%. При этом первый подход обладает более высокой производительностью, что делает его более предпочтительным для решения поисковых инженерных задач в особенности на ранних стадиях проектирования новых изделий.

NUMERICAL HOMOGENIZATION OF ELASTIC PROPERTIES OF 3D-PRINTED MATERIALS

Ovechkin F.S.¹, Popov N.V.², Kuts M.S.¹

¹*Bauman Moscow State Technical University, Moscow;*

²*Independent investigator, Irkutsk*

Keywords: 3D printing, additive manufacturing, homogenization, effective material properties, stiffness matrix, finite element method.

Abstract. The study investigates two approaches for determining the components of the effective elasticity tensor for porous materials fabricated by 3D printing. In the first approach, the effective elasticity tensor is determined by solving a regression problem, while in the second approach, the value for each component is determined by averaging the strain energy for the corresponding loading case. The methods are compared using two types of porous materials: an isotropic material with a random distribution of monodisperse spherical pores and a transversely isotropic structured material with a honeycomb structure. For each material type, the equivalent properties are calculated as a function of its porosity and compared with the values obtained using the Voigt model. The analysis results show that both methods yield identical results within an error margin not exceeding 0.01%. At the same time, the first approach demonstrates higher computational efficiency, making it more preferable for solving exploratory engineering tasks, especially during the early stages of new product design.

Введение

Пористые материалы, позволяющие достичь уникального сочетания малого веса и высоких показателей удельной прочности и жесткости, получили широкое распространение в решении разнообразных инженерных задач. В частности, они широко применяются для изготовления сэндвич-панелей, активно используемых в космической промышленности для изготовления панелей корпусов космических аппаратов и их обшивки. К числу наиболее востребованных материалов данного класса относятся структуры с неупорядоченным распределением монодисперсных сферических пор (например, металлические пенопласты) и структурированные материалы с сотовой структурой (например, алюминиевые или композитные соты). В то же время развитие современных методов аддитивного производства открывает широкие возможности для синтеза таких материалов с точно заданными характеристиками. В этой связи, критически важным является развитие и внедрение

адекватных методов численного моделирования пористых материалов, доступных уже на ранних стадиях проектирования, для прогнозирования свойств и оптимизации структур.

Вычислительная гомогенизация [1, 2] позволяет определять эффективные свойства гетерогенных материалов путем анализа репрезентативных ячеек, что существенно сокращает вычислительные затраты по сравнению с прямым моделированием всей микроструктуры. Ключевым аспектом метода является решение локальных задач на представительном объеме с периодическими граничными условиями.

Материалы и методы исследований

В текущей работе проведено сравнение двух подходов к вычислительной гомогенизации. В первом подходе [3], компоненты эффективного тензора упругости определяются непосредственно из усредненного тензора напряжений, определенного при решении 6 виртуальных тестов с кинематическими граничными условиями: 3 на одноосное растяжение и 3 на чистый сдвиг. Граничные условия для каждого из тестов приведены в таблице 1.

Табл. 1. Тесты, проводимые в первом методе гомогенизации

№ теста	Тип нагружения	Граничные условия
1-3	Одноосное растяжение	$\begin{cases} u_i = \frac{x_i}{L_i}, \\ u_k = 0, k \neq i \end{cases}$
4-6	Чистый сдвиг	$\begin{cases} u_i = \frac{x_j}{2L_j}, \\ u_j = \frac{x_i}{2L_i}, \\ u_k = 0, k \neq i, j \end{cases}$
u_i, x_i и L_i – перемещение, координата и длина ячейки периодичности вдоль i -го направления		

По определению, эффективный тензор упругости $\mathbf{C}_{eff}^v$ удовлетворяет уравнению:

$$\boldsymbol{\sigma}^v = \mathbf{C}_{eff}^v \boldsymbol{\varepsilon}^v, \quad (1)$$

где $\boldsymbol{\sigma}^v$ и $\boldsymbol{\varepsilon}^v$ – записанные в нотации Фойгта вектора усредненных компонент тензоров напряжений и деформаций соответственно.

Тогда решение может быть получено путем регрессии по результатам 6 независимых краевых задач

$$\boldsymbol{\Sigma}^v = \mathbf{C}_{eff}^v \mathbf{E}^v, \quad (2)$$

где $\boldsymbol{\Sigma}^v = [\boldsymbol{\sigma}_1^v, \boldsymbol{\sigma}_2^v \dots \boldsymbol{\sigma}_6^v]$ и $\mathbf{E}^v = [\boldsymbol{\varepsilon}_1^v, \boldsymbol{\varepsilon}_2^v \dots \boldsymbol{\varepsilon}_6^v]$ – матрицы, содержащие все найденные решения.

В случае, если $\mathbf{E}^v = \mathbf{I}$, компоненты матрицы $\mathbf{C}_{eff}^v$ будут равны усредненным компонентам напряжений:

$$\mathbf{C}_{eff}^v = \boldsymbol{\Sigma}^v. \quad (3)$$

Во втором методе [4] используется анизотропная модель сплошной среды, в которой предполагается структура матрицы эффективных упругих компонент:

$$\mathbf{C}_{eff}^v = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

в которой компоненты тензора упругости c_{ij} определяются из энергии деформации ячейки U_{cell} , рассчитанной для 9 тестов: 3 на одноосное растяжение, 3 на двухосное растяжение и 3 на чистый сдвиг.

Граничные условия и зависимости для определения компонент матрицы C_{eff}^v представлены в таблице 2. Энергия деформации определяется как

$$U_{cell} = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} dx. \quad (5)$$

В качестве первого типа структур рассматривается изотропный материал с неупорядоченной монодисперсной пористой структурой, элементарная ячейка которого показана на рисунке 1. Пористость структуры задается таким образом, чтобы отражать реальные условия, встречающиеся в изотропных материалах.

Табл. 2. Тесты, проводимые во втором методе гомогенизации

№ теста	Тип нагружения	Граничные условия	Компоненты матрицы C_{eff}^v
1-3	Одноосное растяжение	$\begin{cases} u_i = \frac{x_i}{L_i}, i = 1..3, \\ u_k = 0, k \neq i \end{cases}$	$c_{ii} = \frac{2U_{cell}}{V}$
4-6	Двухосное растяжение	$\begin{cases} u_i = \frac{x_i}{L_i}, i = 1..3, \\ u_j = \frac{x_j}{L_j}, j \neq i, \\ u_k = 0, k \neq i, j \end{cases}$	$c_{ij} = \frac{2U_{cell}}{V} - c_{ii} - c_{jj}$
7-9	Чистый сдвиг	$\begin{cases} u_i = \frac{x_j}{2L_j}, i = 1..3, \\ u_j = \frac{x_i}{2L_i}, j \neq i, \\ u_k = 0, k \neq i, j \end{cases}$	$c_{(i+3)(i+3)} = \frac{2U_{cell}}{V}$

Пористая структура ячейки формируется благодаря булевым операциям вычитания сфер, находящихся внутри него. Радиус сферы $r = 0,05$ мм. Полученная элементарная ячейка дискретизируется при помощи неструктурированной сетки элементами TETRA4. Встроенные методы данной библиотеки позволяют настраивать некоторые параметры разбиения модели, например минимальный и максимальный размер конечного элемента, алгоритм разбиения, количество КЭ на дугу окружности и т.д. При моделировании размер конечных элементов был выбран на основе предварительно проведенной оценки сходимости, в результате чего максимальный и минимальный размеры конечных элементов для генератора сетки были установлены как 0,2 мкм и 0,1 мкм соответственно.

В качестве второго варианта геометрии рассматривалась модель структурированного материала со структурой пчелиных сот, элементарная ячейка которой показана на рисунке 2. Данный вид элементарной ячейки был выбран благодаря своему распространенному использованию в области 3D печати, так как она имеет высокую прочность при относительно малом весе.

Структура элементарной 3D ячейки моделировалась в системе автоматизированного проектирования Autodesk Inventor, где задавались характерные параметры ячейки. Периодичный эскиз шестигранников, вычитается булевой операцией из элементарной ячейки прямоугольного параллелепипеда. После подготовки 3D модели элементарной ячейки, она импортируется в виде STEP-файла в программный пакет GMSH, в котором в котором

осуществляется дальнейшее разбиение на конечные элементы. Так же в GMSH осуществляется маркировка граничных поверхностей, что необходимо для дальнейшего наложения граничных условий.

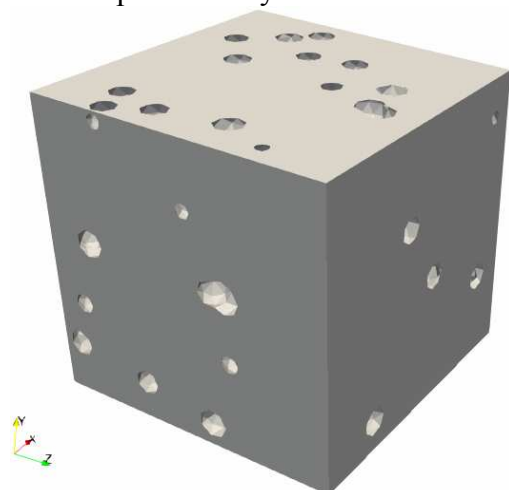


Рис. 1. Элементарная ячейка материала с неупорядоченными монодисперсными порами

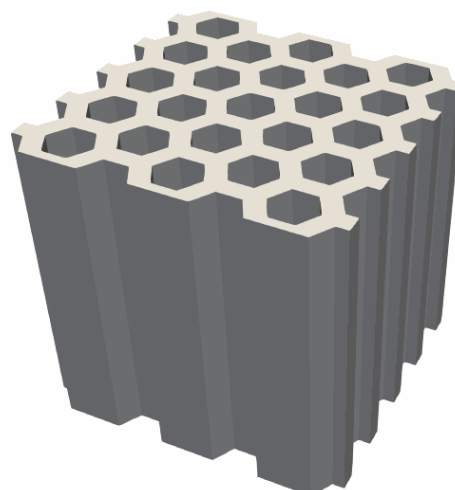


Рис. 2. Элементарная ячейка сотовой структуры

В качестве материала матрицы для обоих рассматриваемых материалов был выбран полипропилен, имеющий широкое распространение благодаря своим прочностным характеристикам. Основные механические свойства полипропилена приведены в таблице 3.

Табл. 3. Основные характеристики полипропилена

Характеристика	Единицы измерения	Значение
Модуль упругости	ГПа	1,8
Коэффициент Пуассона	—	0,43

Решение задачи механики сплошной среды осуществляется с помощью библиотеки Gridap [5, 6]. Разрешающая система уравнений для задач линейной теории упругости имеет вид:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T), \\ \boldsymbol{\sigma} = {}^4\mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}, \\ \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0, \end{cases} \quad (6)$$

где $\mathbf{u}$ – вектор перемещений, $\boldsymbol{\varepsilon}$ и $\boldsymbol{\sigma}$ – тензоры деформаций и напряжений, а ${}^4\mathbf{C}$ – тензор упругости. Кроме того, добавляются уравнения граничных условий для границы $\partial\Omega_T$ с распределенными поверхностными силами $\mathbf{T}$, и поверхности $\partial\Omega_u$ с известными перемещениями $\mathbf{u}_e$:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{T}, & \mathbf{x} \in \partial\Omega_T \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_e, & \mathbf{x} \in \partial\Omega_u \end{cases} \quad (7)$$

где $\mathbf{n}$ – нормаль к границе.

Особенностью Gridap является задание разрешающих уравнений в *слабой форме*, которая позволяет учесть уравнения (6) и (7) в виде функционала в интегральной виде:

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega_T} \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x}, \quad (8)$$

где $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ – тестовые и пробные функции [5].

После определения матрицы жесткостей, были определены модули Юнга и коэффициенты Пуассона материала по средству метода наименьших квадратов.

Анализ полученных результатов

Анализ результатов моделирования неструктурированного материала для пористости $\varphi=0,1$.

Полученная при помощи первого метода матрица упругости представлена на рисунке 3, а. На рисунке цвет использован для обозначения уникальных числовых значений и не имеет прямой связи с их величиной. И хотя компоненты, соответствующие нулевым значениям в форме (4), не равны нулю, их абсолютные значения не превышают 10^5 , что на 4 порядка меньше значащих компонент. Остальные значения соответствуют структуре характерной для изотропного материала.

Полученная при помощи второго метода [6] матрица упругости представлена на рисунке 3, б. Данная матрица жесткости, аналогично полученной первым методом, также обладает изотропным характером.

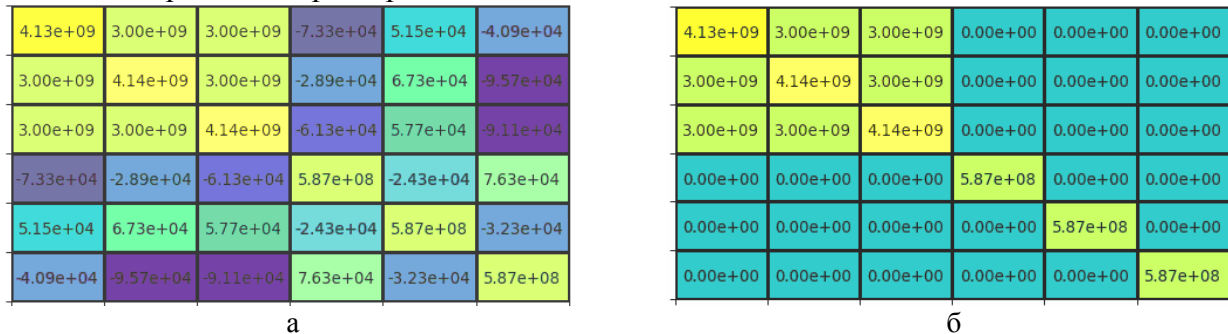


Рис. 3. Матрицы упругости материала с неупорядоченными монодисперсными порами, полученные методом матрицы напряжений (а) и методом энергии деформаций (б)

Полученные компоненты матрицы упругости позволяют определить механические свойства элементарной ячейки, в зависимости от ее пористости. Механические характеристики материала, полученные при использовании обоих методов для пористости $\varphi=0,1$, представлены в таблице 4.

Табл. 4. Значения эффективных механических параметров материала с неупорядоченными монодисперсными порами

Характеристика	Единицы измерения	Метод 1	Метод 2
Модуль упругости	ГПа	1,613	1,613
Коэффициент Пуассона	—	0,421	0,421

Для пространственного анализа тензора упругости, определены пространственные зависимости модуля Юнга и коэффициента Пуассона [7, 8]. Графики полученных пространственных представлений модуля Юнга представлены на рисунке 4, а коэффициентов Пуассона – на рисунке 5. Полученные пространственные зависимости показывают, что исследуемый материал обладает изотропными свойствами.

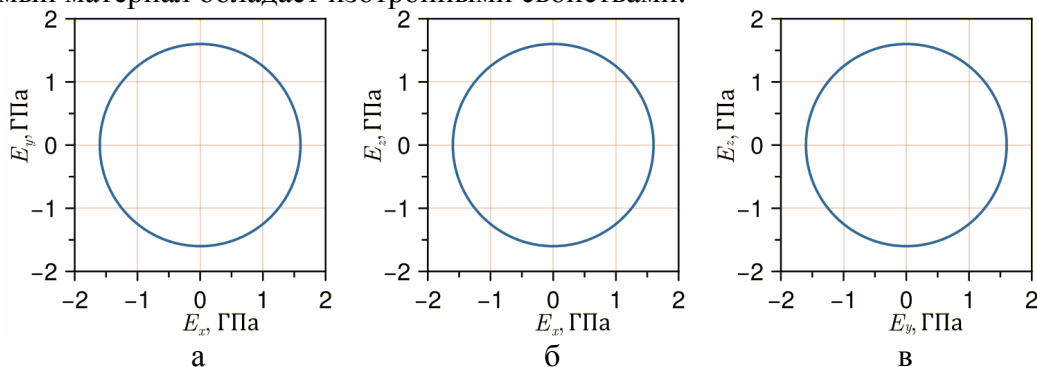


Рис. 4. Пространственная зависимость модуля Юнга в плоскости XY (а), YZ (б) и XZ (в)

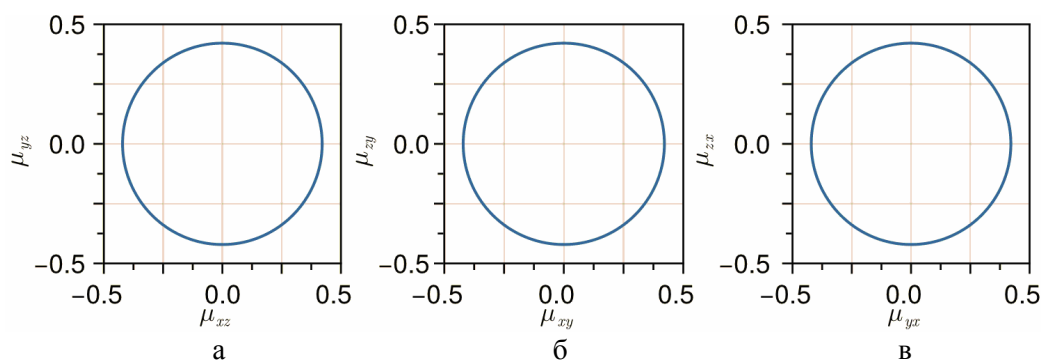


Рис. 5. Пространственная зависимость коэффициента Пуассона в плоскости XY (а), YZ (б) и XZ (в)

Анализ результатов моделирования структурированного материала для пористости $\phi=0,4$.

Полученная при помощи первого метода матрица упругости представлена на рисунке 6, а. Как и матрица упругости, изображенная на рисунке 3, а, данная матрица на месте нулевых компонент в (4) содержит компоненты, абсолютные значения которых на несколько порядков меньше значащих компонент. Однако выделяется направление оси Y, вдоль которой заметно большие значения модуля Юнга и коэффициентов Пуассона. Аналогичные свойства были получены и при помощи второго метода (см. рис. 6, б).

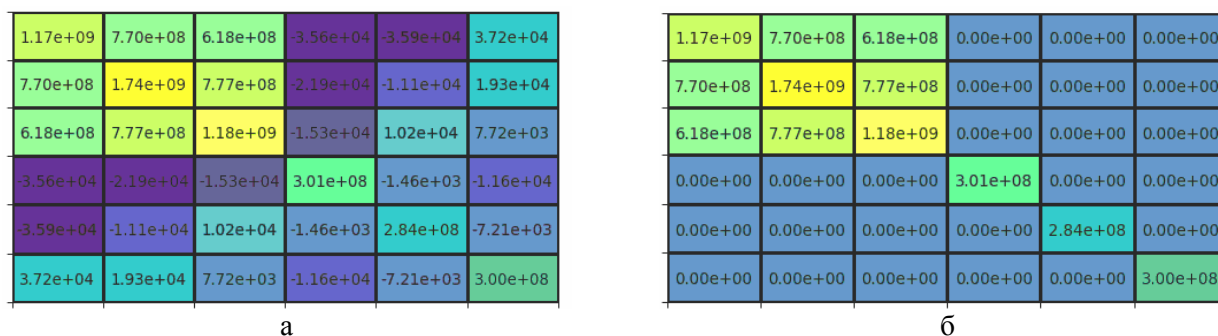


Рис. 6. Матрицы упругости материала со структурой пчелиных сот, полученные из методом матрицы напряжений (а) и методом энергии деформаций (б)

Более характерно анизотропия материала видна на пространственных графиках модуля Юнга и коэффициента Пуассона, изображенных на рисунках 7 и 8. При этом в плоскости XY компоненты обладают симметрией, что отражается на пространственных изображениях упругих параметров в виде окружности, характеризующей модуль Юнга и коэффициент Пуассона в плоскости XY. Такая картина характерна для трансверсально изотропного материала. Механические характеристики материала, полученные с помощью метода матрицы напряжений и метода энергии деформаций, представлены в таблице 5.

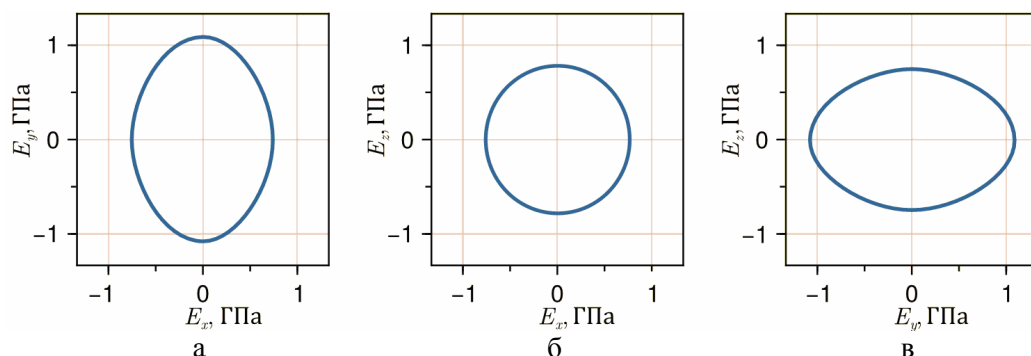


Рис. 7. Пространственная зависимость модуля Юнга

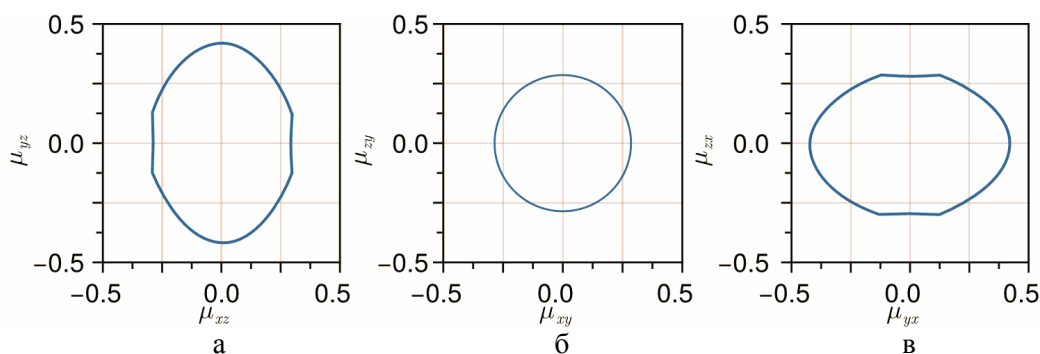


Рис. 8. Пространственная зависимость коэффициента Пуассона

Табл. 5. Значения эффективных свойств сотовой структуры

Характеристика		Единицы измерения	Метод 1	Метод 2
Модуль упругости	E_x, E_z	ГПа	0,742	0,741
	E_y		1,076	1,076
Коэффициент Пуассона	μ_{xy}, μ_{zy}	—	0,327	0,327
	μ_{xz}		0,296	0,296

Анализ зависимости механических свойств материалов от пористости

Для анализа зависимости механических характеристик от пористости был проведен ряд вычислительных экспериментов для репрезентативных ячеек с различными значениями пористости. Полученные результаты сравнивались с классической эмпирической моделью Фойгта [9]:

$$E_{Voight} = v_m E_m + v_p E_p, \quad (9)$$

где E_m – модуль Юнга материала, $E_p = 0$, $v_p = \phi$ и $v_m = (1 - \phi)$ – объемные доли пор и материала соответственно.

Данная модель хорошо предсказывает модуль упругости только для плотных материалов и некоторых пористых структур в связи с ограничениями модели, не учитывающими геометрию микропор и их распределение на микроуровне [10], в то время как подход на основе вычислительной гомогенизации не обладает такими недостатками.

На рисунке 9 показано сравнение результатов гомогенизации свойств материала с неупорядоченными монодисперсными порами с эмпирической моделью Фойгта. По графику видно, что результаты хорошо коррелируют с моделью при значениях пористости $\phi < 0,12$. При увеличении наблюдается расхождение с моделью Фойгта, которая дает несколько завышенные свойства, что объясняется характером деформаций вблизи пор: при увеличении пористости, возникают изгибные деформации, которая играет существенную роль при увеличении их количества пор в объеме ячейки.

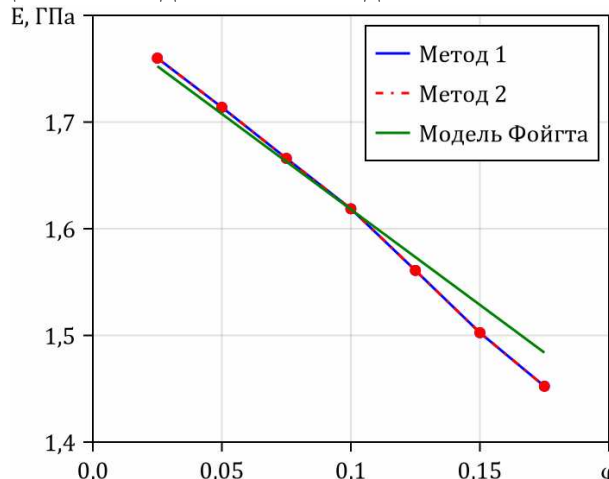


Рис. 9. Зависимость модуля Юнга E материала с неупорядоченными монодисперсными порами от пористости ϕ материала

На рисунке 10 показано сравнение результатов гомогенизации с эмпирическими моделями. Для плоскости изотропии наблюдается существенное расхождение с моделью Фойгта, которая дает завышенные на 20-35% в диапазоне исследуемой пористости. Это опять же объясняется наличием изгибных деформаций в плоскости XZ. В то же время, в направлении оси Y локальные изгибы отсутствуют, т.к. материал работает лишь на растяжение-сжатие, из-за чего поведение довольно точно описывается моделью Фойгта.

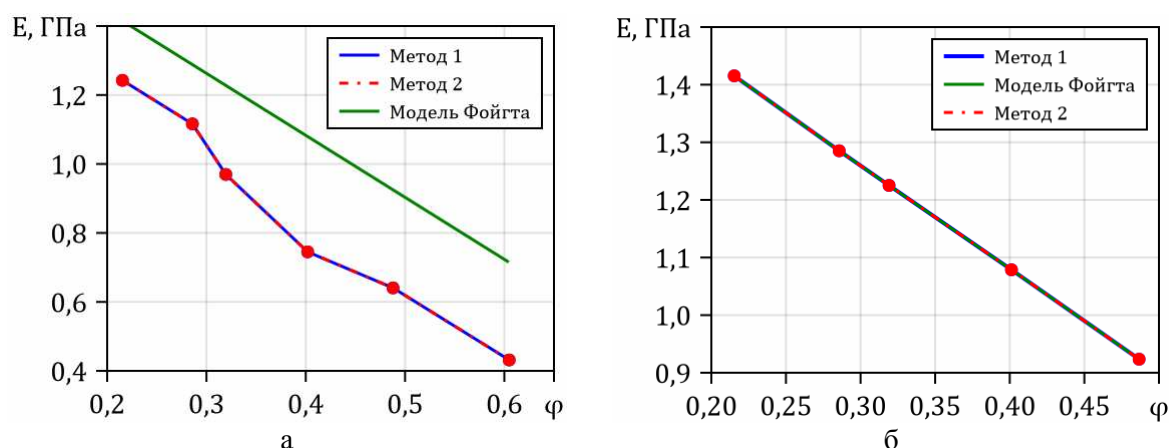


Рис. 10. Зависимость модуля Юнга E от пористости ϕ в плоскости изотропии (а) и ортогональном направлении (б)

Заключение

В ходе проведённого исследования сравнивались два подхода к определению компонент эффективного тензора упругости 3D-печатных материалов. Сравнение осуществлялось на примере двух различных материалов: изотропного с неупорядоченным распределением монодисперсных сферических пор и трансверсально-изотропного структурированного материала с сотовой структурой. Оба результата показали идентичные результаты в пределах погрешности, не превышающей 0,01%.

Кроме того, были проведены сравнения результатов с моделью Фойгта. Для неупорядоченного материала оба метода показали хорошую сходимость с моделью, что объясняется относительно малым количеством пор в объеме материала, что приводит практическому отсутствию изгибных деформаций, вследствие чего модуль Юнга линейно снижается с увеличением пористости материала.

В случае сотовой структуры методы также показали видимое сходство результатов, проявилась анизотропия механических свойств. Полученные значения модулей упругости и убедительно подтвердили эффективность метода гомогенизации для сложных микроструктур. Модуль Юнга согласовался с эмпирической моделью только в плоскости анизотропии элементарной ячейки, в то время как в плоскости изотропии ячейки значение модуля упругости оказалось заниженным относительно классической эмпирической модели Фойгта вследствие преобладания изгибных деформации из-за большой пористости исследуемого материала.

Практическая ценность работы заключается в возможности прогнозирования механических свойств композитов без дорогостоящих экспериментов, что особенно актуально для аэрокосмической, биомедицинской и других отраслей промышленности.

Список литературы / References

1. Bakhvalov N.S., Panasenko G.P. Homogenisation: averaging processes in periodic media: mathematical problems in the mechanics of composite materials. – Springer Science & Business Media, 2012. – 364 p.
2. Загордан Н.Л., Мочалова Ю.Д., Абгарян К.К. Современные подходы к моделированию упруго-прочностных характеристик полимерных композиционных материалов // Моделирование и анализ данных. – 2025. – Т. 15, №2. – С. 127-138. – doi.org/10.17759/mda.2025150207.
2. Zardogan N.L., Mochalova Yu.D., Abgaryan K.K. Modern Approaches to Modeling Elastic-Strength Characteristics of Polymer Composite Materials // Modelling and Data Analysis. 2025, vol.15, no. 2, pp.127-138. doi.org/10.17759/mda.2025150207.
3. Kuts M., Walker J., Newell P. Computational homogenization of linear elastic properties in porous non-woven fibrous materials // Mechanics of Materials. 2023, no. 189, pp. 104868 doi.org/10.1016/j.mechmat.2023.104868.
4. Rahali Y., Goda I., Gangoffer J.F. Numerical identification of classical and nonclassical moduli of 3D woven textiles and analysis of scale effects // Composite Structures. 2016, no. 135, pp. 122-139. doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.09.023.
5. Badia S., Verdugo F. Gridap: An extensible finite element toolbox in Julia // Journal of Open Source Software. 2020, vol. 5, no. 52, pp. 2520. doi.org/10.21105/joss.02520.

6. Verdugo F, Badia S. The software design of Gridap: a finite element package based on the Julia JIT compiler // Computer Physics Communications. 2022, vol. 276, p. 108341. doi.org/10.1016/j.cpc.2022.108341.
7. Gaillac R., Pullumbi P., Coudert F.X., ELATE: an open-source online application for analysis and visualization of elastic tensors // Journal of Physics: Condensed Matter. 2016, vol. 28, p. 275201. doi.org/10.1088/0953-8984/28/27/275201.
8. Feng J., Liu B., Lin Z., Fu J. Isotropic octet-truss lattice structure design and anisotropy control strategies for implant application // Materials & Design. 2021, vol. 203, p. 109595. doi.org/10.1016/j.matdes.2021.109595.
9. Vazic B., Abali B.E., Yang H., Newell P. Mechanical analysis of heterogeneous materials with higher-order parameters // Engineering with Computers. 2022, vol. 38, pp. 5051-5067. doi.org/10.1007/s00366-021-01555-9.
10. Vazic B., Abali B.E., Newell P. Generalized thermo-mechanical framework for heterogeneous materials through asymptotic homogenization // Continuum Mechanics and Thermodynamics. 2023, vol. 35, pp. 159-181. doi.org/10.1007/s00161-022-01171-y.

Сведения об авторах:

Information about authors:

Овечкин Федор Сергеевич – магистрант	Ovechkin Fedor Sergeevich – master student
Попов Николай Валерьевич – кандидат физико-математических наук	Popov Nikolay Valerievich – candidate of physico-mathematical sciences
Куц Михаил Сергеевич – кандидат технических наук, доцент кафедры «Основы конструирования машин»	Kuts Mikhail Sergeevich – candidate of technical sciences, associate professor «Fundamentals of Machine Design» Department
kuts@bmstu.ru	

Получена 15.08.2025