

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ВЕКТОРНОГО КОНТУРА ПР9, ИСПОЛЪЗУЕМОГО В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ РУЛЕВЫМ АГРЕГАТОМ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ОРИЕНТАЦИИ

Косенок Б.Б.

*Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева
(Самарский университет), Самара*

Ключевые слова: рулевой агрегат, вектор, контур, модель, модули, пространственного ориентирование, вектор тяги.

Аннотация. В большинстве существующих методик расчёта кинематики механизмов лежат геометрические построения или простейшие аналитические зависимости. Метод математического моделирования векторных замкнутых контуров основан на методе В.А. Зиновьева построения векторных моделей механизма. Системное развитие метода приводит к всё большему использованию различных элементарных, как плоских, так и пространственных контуров – модулей. В статье приведено скорректированное математическое описание пространственного модуля Пр9, использованного для решения задачи пространственной ориентации рулевого агрегата ракетносителя. Модуль Пр9 является одним из элементарных пространственных модулей, созданных в рамках теории векторного моделирования. В процессе реализации математической модели были выявлены ошибки в алгоритме решения модуля Пр9, что привело к необходимости поиска более лучшего решения, были предложены два варианта расчёта, в результате анализа был выбран вариант реализации математического описания модуля Пр9 на основе метода отображения на плоскость и решения более простой плоской задачи. Данный подход позволяет лучше учитывать возможные частные случаи реализации кинематики и динамики механизмов на базе отлаженных решений для плоских модулей.

ANALYTICAL SOLUTION OF THE SPATIAL VECTOR CONTOUR PR9 USED IN THE MATHEMATICAL MODEL OF STEERING UNIT CONTROL OF SPATIAL ORIENTATION

Kosenok B.B.

Samara National Research University named after acad. S.P. Koroleva, Samara

Keywords: steering unit, vector, contour, model, modules, spatial orientation, thrust vector.

Abstract. Most of the existing methods for calculating the kinematics of mechanisms are based on geometric constructions or the simplest analytical dependencies. A method of mathematical modeling of vector closed contours based on V.A. Zinoviev's method of constructing vector models of the mechanism. The systematic development of the method leads to an increasing use of various elementary, both planar and spatial contour modules. The article provides an adjusted mathematical description of the spatial module Pr9 used to solve the problem of spatial orientation of the steering unit of the launch vehicle. The Pr9 module is one of the elementary spatial modules created within the framework of the theory of vector modeling. In the process of implementing the mathematical model, errors were identified in the algorithm for solving the Pr9 module, which led to the need to find a better solution, two calculation options were proposed, and as a result of the analysis, an implementation option for the mathematical description of the Pr9 module based on the method of mapping to a plane and solving a simpler planar problem was chosen. This approach makes it possible to better take into account possible special cases of the implementation of kinematics and dynamics of mechanisms based on well-established solutions for flat modules.

Введение

Существующие методы расчёта пространственных механизмов [1-13], как правило, являются сложными в решении частных случаев, или являются вариантами расчёта конкретных механизмов. Одним из методов расчёта механизмов является метод математического моделирования векторных замкнутых контуров [14], который является дальнейшим развитием метода построения векторных моделей механизма В.А. Зиновьева [15, 16]. Решения задач кинематики и динамики механизмов на базе данного метода обладают

достаточной универсальностью для моделирования различных механизмов, а в более широком смысле и композиции механизмов, в том числе с использованием программы «Кинематический и динамический анализ механизмов» (КДАМ) [17], развиваемой на кафедре основ конструирования машин Самарского университета.

В рамках задачи разработки принципиальной схемы системы управления рулевым агрегатом с трёхмерной ориентацией при использовании существующих типов приводов также потребовалось сформировать математическую модель для получения управляющих параметров системы управления рулевым агрегатом (углов отклонения рулевой машинки от расчётной траектории вектора тяги двигателя (сопла)), что и было сделано в работах [18]. В рамках данной задачи была проведена работа по совершенствованию математического аппарата метода векторного моделирования, а конкретно, пространственного модуля Пр9.

Материалы и методы исследования

В методе математического моделирования векторных замкнутых контуров вектор – это направленный отрезок с параметрами: радиус r_i , углы наклона α_i и β_i (рис. 1). Любой механизм можно отобразить векторными контурами (рис. 2). Подобные векторные замкнутые контуры приводятся к виду элементарных векторных замкнутых контуров – **модулей**, с заранее известными и подробно описанными решениями, что позволяет строить систему векторных контуров достаточно простым методом формирования в замкнутые кинематические цепи требуемых модулей.

Условия замкнутости контура, состоящего из m векторов на плоскости:

$$\sum_{i=1}^m r_i \cos \alpha_i = 0; \quad \sum_{i=1}^m r_i \sin \alpha_i = 0. \quad (1)$$

Условия замкнутости m -векторного контура в пространстве:

$$\sum_{i=1}^m r_i \cos \alpha_i \cos \beta_i = 0; \quad \sum_{i=1}^m r_i \sin \alpha_i = 0; \quad \sum_{i=1}^m r_i \cos \alpha_i \sin \beta_i = 0. \quad (2)$$

Построенная на основе модулей **основная векторная модель** – позволяет получить решение определенных функций с известными для каждого момента времени аргументами модели и связями между отдельными векторами и контурами.

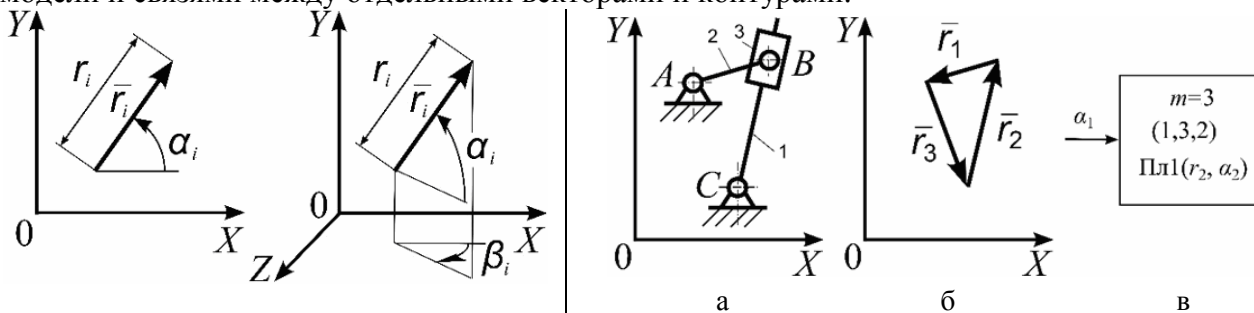


Рис. 1. Параметры плоского и пространственного вектора

Рис. 2. а) структурная схема; б) векторная модель; в) параметрическая формула механизма, где $m=3$ – число векторов; (1,2,3) – список векторов в контуре; $\text{Pl1}(r_2, \alpha_2)$ – модуль решения со списком функций, α_2 – аргумент модели

Основные сочетания функций возможных векторных контуров, исходя из условия замкнутости, определяют 4 плоских элементарных модуля (Пл1-Пл4) и 20 пространственных (Пр1-Пр20) [16]. Также следует отметить, что модули могут иметь несколько вариантов решений.

Модуль Пр9 имеет определённый список неизвестных параметров – функций $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2$.

В [16] имеется решение пространственного модуля Пр9. Приведём его полностью.

1. Первоначально проводится изменение всех параметров векторов контура от общей системы координат $OXYZ$ к локальной системе координат $OX'Y'Z'$, в которой ось X' совпадает с направлением проекции вектора 2 на плоскость OXZ .

2. Проекция всех известных векторов в контуре (т.е. те, у которых известны все параметры) приводятся к плоскому векторному контуру с векторами, имеющими обозначение $\vec{p}_i$, где i – номер вектора:

$$p_2 = r_2;$$

$$p_3 = \sum_{i=3}^m r_i \cos \alpha_i \cos(\beta_i - \beta_2); \varphi_3 = 0;$$

$$p_4 = \sum_{i=3}^m r_i \sin \alpha_i; \varphi_4 = 0;$$

$$p_5 = \sqrt{r_1^2 - p_4^2}.$$

3. Полученный плоский контур, состоящий из 4-х плоских векторов с номерами 2, 3, 4, 5, имеет список из двух неизвестных параметров – функций φ_2, φ_5 , что соответствует списку функций для плоского модуля Пл4, поэтому проводится его решение, но так как из свойств модуля Пл4 известно, что он имеет два решения, принимается первоначально вариант $V = 1$ и если он по каким-то критериям не подходит, принимается вариант $V = 2$.

4. По полученным неизвестным находится $\alpha_2 = \varphi_2$.

На этом всё решение модуля Пр9 в источнике [19] заканчивается.

Данное решение было реализовано в КДАМ, но ранее углубленного тестирования данного модуля по различным причинам не проводилось и только, когда потребовалось решать задачи связанные с системой управления рулевым агрегатом с трёхмерной ориентацией [21], выявилась неработоспособность данного решения.

Проведённый анализ геометрической интерпретации модуля Пр9 показал, что сводится к решению задачи нахождения пересечения поверхности шара радиусом r_1 с окружностью радиусом r_2 . Но, так как сечением шара плоскостью является окружность, то всё решение сводится к нахождению пересечения двух окружностей на одной плоскости (см. рис. 3), что можно свести к следующему алгоритму.

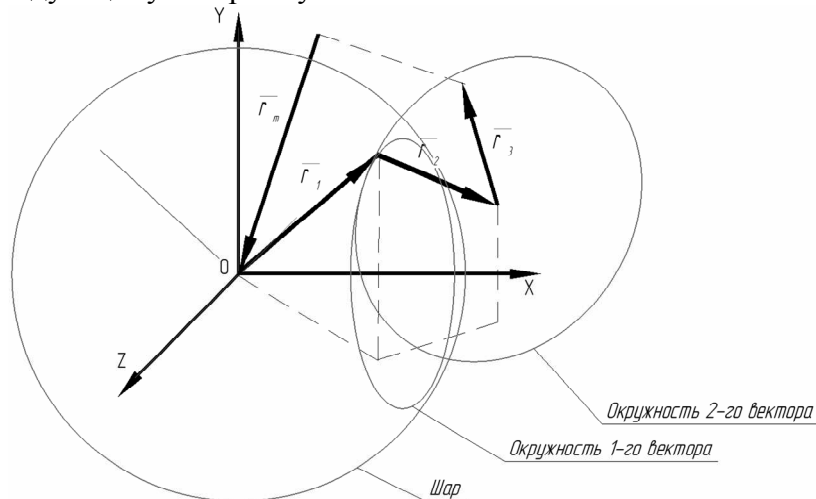


Рис. 3. Геометрическая интерпретация модуля Пр9

1. Первоначально проводим изменение всех параметров векторов контура от общей системы координат $OXYZ$, к локальной системе координат $OX'Y'Z'$, в которой ось X' совпадает с направлением проекции вектора 2 на плоскость OXZ .

2. Проекция всех известных векторов (у которых известны все параметры), приводятся к плоским векторам, имеющим обозначение $\vec{p}_i$.

$$p_2 = r_2;$$

$$p_3 = \sum_{i=3}^m r_i \cos \alpha_i \cos(\beta_i - \beta_2); \varphi_3 = 0;$$

$$p_4 = \sum_{i=3}^m r_i \sin \alpha_i ; \varphi_4 = 90^\circ;$$

$$p_z = \sum_{i=3}^m r_i \cos \alpha_i \sin (\beta_i - \beta_2);$$

$$r = \sqrt{r_1^2 - p_z^2}; \quad n = p_4;$$

$$k = p_3; \quad d = r_2;$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = r^2, \\ (x-k)^2 + (y-n)^2 = d^2. \end{cases}$$

Получим два варианта решения системы уравнений:

$$x = -(n\sqrt{(-d^4 + 2d^2(n^2 + r^2 + k^2) - n^4 + 2n^2(r^2 - k^2) - (r^2 - k^2)^2)} + k(d^2 - n^2 - r^2 - k^2)) / 2(n^2 + k^2);$$

$$y = (k\sqrt{(-d^4 + 2d^2(n^2 + r^2 + k^2) - n^4 + 2n^2(r^2 - k^2) - (r^2 - k^2)^2)} - n(d^2 - n^2 - r^2 - k^2)) / 2(n^2 + k^2);$$

$$x = (n\sqrt{(-d^4 + 2d^2(n^2 + r^2 + k^2) - n^4 + 2n^2(r^2 - k^2) - (r^2 - k^2)^2)} - k(d^2 - n^2 - r^2 - k^2)) / 2(n^2 + k^2);$$

или

$$y = -(k\sqrt{(-d^4 + 2d^2(n^2 + r^2 + k^2) - n^4 + 2n^2(r^2 - k^2) - (r^2 - k^2)^2)} + n(d^2 - n^2 - r^2 - k^2)) / 2(n^2 + k^2).$$

Контролировать все возможные сочетания частных случаев полученных выражений достаточно сложно, поэтому было решено для задачи нахождения пересечения окружностей на плоскости использовать плоский векторный контур, в данном случае – модуль Пл4 (неизвестные функции углов двух векторов).

Тогда весь алгоритм фактически повторяет более раннее решение, но с незначительными корректировками:

1. Первоначально проводим изменение всех параметров векторов контура от общей системы координат $OXYZ$ к локальной системе координат $OX'Y'Z'$, в которой ось X' совпадает с направлением проекции вектора 2 на плоскость OXZ .

2. Проекция всех известных векторов (у которых известны все параметры) приводятся к плоским векторам, имеющим обозначение $\bar{p}_i$:

$$p_2 = r_2;$$

$$p_3 = \sum_{i=3}^m r_i \cos \alpha_i \cos (\beta_i - \beta_2); \quad \varphi_3 = 0;$$

$$p_4 = \sum_{i=3}^m r_i \sin \alpha_i ; \quad \varphi_4 = 90^\circ;$$

$$p_z = \sum_{i=3}^m r_i \cos \alpha_i \sin (\beta_i - \beta_2);$$

$$p_s = r_1 - p_z.$$

3. Проводим проверку, если $p_s > 0$, то вычисляем $p_1 = \sqrt{r_1^2 - p_z^2}$, если нет, то дальнейшие расчёты не проводятся, так как при данном значении параметров происходит разрыв кинематической цепи.

4. Если разрыва нет, то вычисляется модуль Пл4. Полученный плоский контур, состоящий из 4-х плоских векторов со списком векторов с номерами 1, 2, 3, 4, имеет список из двух неизвестных параметров – функций φ_1, φ_2 , что соответствует списку функций для

плоского модуля Пл4, поэтому проводится его решение, но так как из свойств модуля Пл4 известно, что он имеет два решения, то первоначально принимается вариант $V = 1$ и, если он по каким-то критериям не подходит, принимается вариант $V = 2$:

5. Принимаем $\alpha_2 = \varphi_2$.

6. Для вычисления α_1 применяется модуль Пр1, состоящий из m векторов со списком векторов (1, 2, 3, 4, ..., m), который имеет список из двух неизвестных параметров – функций r_1, α_1 , и так как r_1 , был известен до расчёта, то заодно контролируется, что r_1 не изменился.

Максимальное число решений полученного модуля Пр9 равно двум ($V = 1$ или 2).

На рисунке 4, а показана визуальная реализация полученного решения в виде векторной модели, созданной в программе КДАМ. На рисунке 4, б приведена параметрическая формула векторной модели – форма краткой записи основных параметров, принятой в теории математического моделирования векторных замкнутых контуров, где рамкой обозначают контур с векторами, в данном случае под номер 1, $m=5$ – это число векторов в контуре, (1, 2, 3, 4, 5) – список векторов в контуре, α_3, β_3 – аргументы модели (входные изменяемые параметры) Пр9 ($\alpha_1, \beta_1, \alpha_2$), $V = 2$ – вариант решения.

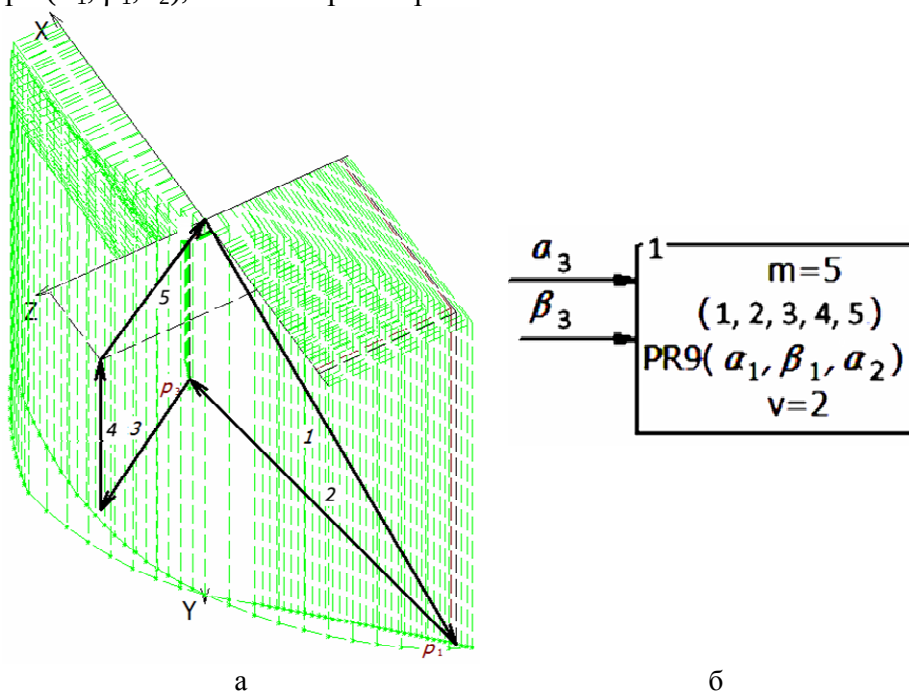


Рис. 4. Реализация модуля Пр9 в программе КДАМ: а) векторная модель; б) параметрическая формула

Полученное скорректированное решение на базе векторных плоских и пространственных модулей позволило сформировать механизм управления пространственной ориентации [18], что расширяет применение как метода, так и программы КДАМ.

Результаты

Полученные результаты позволили скорректировать их программную реализацию в программе КДАМ, что повысило надежность решения задач кинематического и динамического анализа и синтеза для пространственных механизмов путём их моделирования стандартными векторными замкнутыми контурами – модулями, позволяющими получать однозначные решения нахождения неизвестных параметров.

Возможное конструктивное формирование механизма системы управления рулевым агрегатом для пространственного ориентирования на базе векторных моделей, в том числе и модуля Пр9, приведено на рисунке 5, а. На рисунке 5, б показана визуальная реализация полученного решения в виде векторной модели, созданной в программе КДАМ. На рисунке 5, в приведена полная параметрическая формула векторной модели данного механизма.

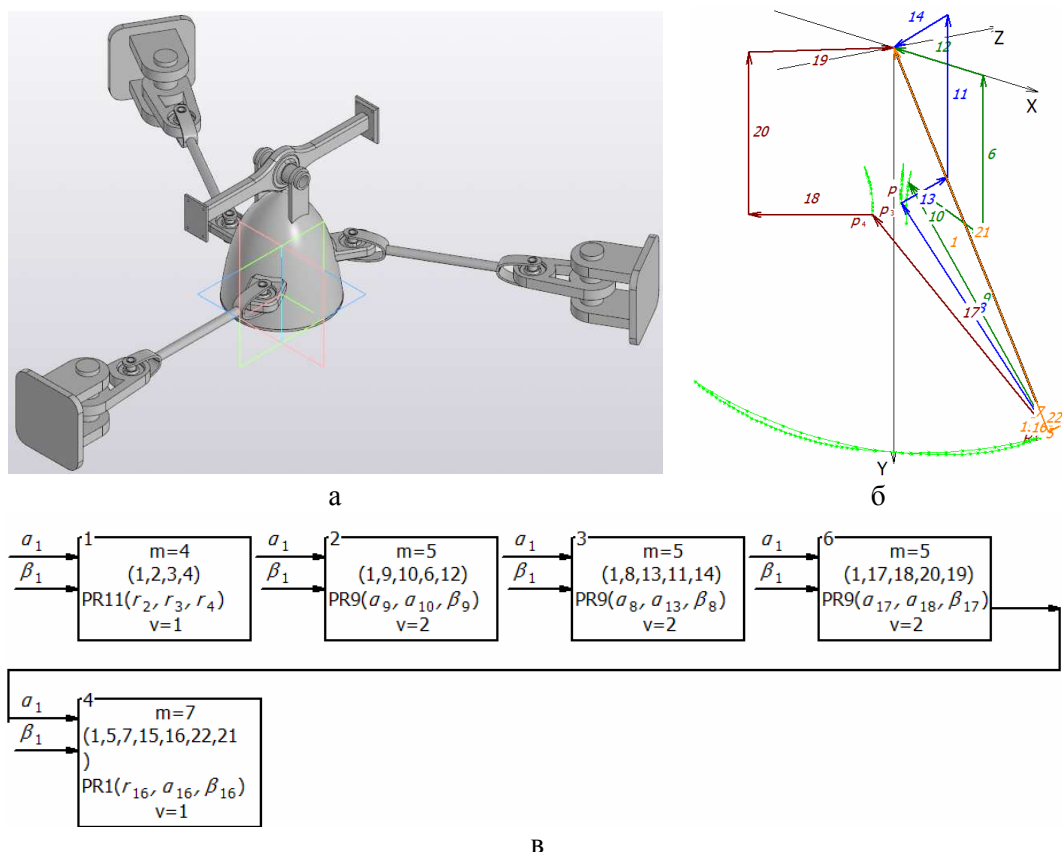


Рис. 5. Возможный механизм системы управления рулевым агрегатом (а), его векторная модель (б) и параметрическая формула (в)

Заключение

В результате данной работы была исправлена неточность в расчёте элементарного векторного модуля Пр9, что позволило интегрировать предложенное решение в программу КДАМ для моделирования пространственных механизмов, в том числе механизма управления рулевым агрегатом пространственной ориентации ракетносителя, с учетом обхода особых положений, где может происходить разрыв кинематических цепей механизма.

Список литературы

1. Артоболовский И.И. Теория механизмов и машин: Учебник для втузов. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 2009. – 639 с.
2. Uicker J., Pennock G., Shigley J. Theory of machines and mechanisms. Fourth edition. –New York – Oxford: Oxford university press, 2011. – 900 p.
3. Khurmi R.S., Gupta J.K. Theory of machines. 14th edition. – S Chand & Co Ltd. 2005. – 1071 p.
4. Глазунов В.А., Колискор А.Ш., Крайнев А.Ф. Пространственные механизмы параллельной структуры. – М.: Наука. 1991. – 95 с.
5. Диментберг Ф.М. Теория пространственных шарнирных механизмов. – М.: Наука. 1982. – 335 с.
6. Лебедев П.А. Тополого-матричный метод определения подвижности кинематических цепей // Теория механизмов машин. – 1978. – Вып. 6. – С. 47-54.
7. Aleshin A., Glazunov V., Rashoyan G., Shai O.: Analysis of kinematic screws that determine the topology of singular zones of parallel-structure robots // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2016, vol. 45, no. 4, pp. 291-296.
8. Antonov A.V., Aleshin A.K., Glazunov V.A., Rashoyan G.V., Skvortsov S.A., Shalyukhin K.A., Kovaleva N.L., Chernenov R. Dynamics of a New Parallel Structure Mechanism with Motors Mounted on the Base Outside the Working Area // Proceedings of 14th International Conference on Electromechanics and Robotics "Zavalishin's Readings". Smart Innovation, Systems and Technologies, vol 154. Springer, Singapore. 2019, pp. 183-195. DOI: 10.1007/978-981-13-9267-2_16.
9. Chunikhin A.Yu., Glazunov V.A. Developing the mechanisms of parallel structure with five degrees of freedom designed for technological robots // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2017, vol. 46, no. 4, pp. 313-321. DOI: 10.3103/S1052618817040057.

10. Fomin A., Antonov A., Glazunov V. Forward Kinematic Analysis of a Rotary Hexapod // CISM International Centre for Mechanical Sciences. Courses and Lectures. 2021, vol. 601, pp. 486-494. DOI: 10.1007/978-3-030-58380-4_58.
11. Glazunov V.A., Rashoyan G.V., Aleshin A.K., Shalyukhin K.A., Skvortsov S.A: Structural synthesis of spatial l-coordinate mechanisms with additional links for technological robots // Advances in Intelligent Systems and Computing. 2020, vol. 902, pp. 683-691. DOI: 10.1007/978-3-030-12082-5_62.
12. Романов И.А., Фаизов М.Р., Хабибуллин Ф.Ф. Исследование геометрических параметров шестизвенного механизма путем объединения пространственных механизмов, сферической и параллелепипедной структуры // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. – 2023. – №11. – С. 601-605. – DOI: 10.24412/2071-6168-2023-11-601-602.
13. Киселев С.В., Антонов А.В., Фомин А.С. Роботы параллельной структуры с круговой направляющей: систематический обзор кинематических схем, методов синтеза и анализа // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2022. – №1. – С. 26-38. – DOI: 10.31857/S0235711922010059.
14. Семенов Б.П., Косенок Б.Б. Методы и средства динамического синтеза механизмов авиационных энергоустановок. – Самара: Самарский научный центр РАН, 2010. – 281 с.
15. Зиновьев В.А. Векторный метод в структурном и кинематическом исследовании механизмов // Известия вузов. Машиностроение. – 1958. – №6. – С. 3-9.
16. Зиновьев В.А. Кинематический анализ пространственных механизмов // Труды семинара по ТММ. – М.: Изд-во АН СССР, 1951. – Т. 11, Вып. 42. – С. 52-99.
17. Свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ №2010616342. Программа КДАМ (Кинематический и динамический анализ механизмов) / Б.Б. Косенок, В.П. Тукмаков. – Заявка №2010614593 от 29.07.2010; зарег. 24.09.2010.
18. Косенок Б.Б., Балякин В.Б., Долгих Д.Е. Разработка системы управления рулевым агрегатом для пространственного ориентирования // Транспортное, горное и строительное машиностроение: наука и производство. – 2025. – №30. – С. 46-53. – doi.org/10.26160/2658-3305-2025-30-46-53.

References

1. Artobolevsky I.I. Theory of mechanisms and machines: Textbook. – 4th ed., revised and add. – M.: Science, 2009. – 639 p.
2. Uicker J., Pennock G., Shigley J. Theory of machines and mechanisms. Fourth edition. –New York – Oxford: Oxford university press, 2011. – 900 p.
3. Khurmi R.S., Gupta J.K. Theory of machines. 14th edition. – S Chand & Co Ltd. 2005. – 1071 p.
4. Glazunov V.A., Koliskor A.Sh., Krainev A.F. Spatial mechanisms of parallel structure. – M.: Science. 1991. – 95 p.
5. Dimentberg F.M. Theory of spatial hinge mechanisms. – M.: Science, 1982. – 335 p.
6. Lebedev P.A. Topological-matrix method for determining the mobility of kinematic chains // Theory of machine mechanisms. 1978, iss. 6, pp. 47-54.
7. Aleshin A., Glazunov V., Rashoyan G., Shai O.: Analysis of kinematic screws that determine the topology of singular zones of parallel-structure robots // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2016, vol. 45, no. 4, pp. 291-296.
8. Antonov A.V., Aleshin A.K., Glazunov V.A., Rashoyan G.V., Skvortsov S.A., Shalyukhin K.A., Kovaleva N.L., Chernozov R. Dynamics of a New Parallel Structure Mechanism with Motors Mounted on the Base Outside the Working Area // Proceedings of 14th International Conference on Electromechanics and Robotics "Zavalishin's Readings". Smart Innovation, Systems and Technologies, vol 154. Springer, Singapore. 2019, pp. 183-195. DOI: 10.1007/978-981-13-9267-2_16.
9. Chunikhin A.Yu., Glazunov V.A. Developing the mechanisms of parallel structure with five degrees of freedom designed for technological robots // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2017, vol. 46, no. 4, pp. 313-321. DOI: 10.3103/S1052618817040057.
10. Fomin A., Antonov A., Glazunov V. Forward Kinematic Analysis of a Rotary Hexapod // CISM International Centre for Mechanical Sciences. Courses and Lectures. 2021, vol. 601, pp. 486-494. DOI: 10.1007/978-3-030-58380-4_58.
11. Glazunov V.A., Rashoyan G.V., Aleshin A.K., Shalyukhin K.A., Skvortsov S.A: Structural synthesis of spatial l-coordinate mechanisms with additional links for technological robots // Advances in Intelligent Systems and Computing. 2020, vol. 902, pp. 683-691. DOI: 10.1007/978-3-030-12082-5_62.
12. Romanov I.A., Faizov M.R., Khabibullin F.F. Investigation of geometric parameters of a six-link mechanism by combining spatial mechanisms, spherical and parallelepiped structures // Proceedings of Tula State University. Technical sciences. 2023, no. 11, pp. 601-605. DOI: 10.24412/2071-6168-2023-11-601-602.
13. Kiselev S.V., Antonov A.V., Fomin A.S. Parallel structure robots with a circular guide: a systematic review of kinematic schemes, synthesis and analysis methods // Problems of mechanical engineering and machine reliability. 2022, no. 1, pp. 26-38. DOI: 10.31857/S0235711922010059.
14. Semenov B.P., Kosenok B.B. Methods and means of dynamic synthesis of mechanisms of aviation power plants. – Samara: Samara Scientific Center of the RAS, 2010. – 281 p.

15. Zinoviev V.A. Vector method in the structural and kinematic study of mechanisms // News of university. Mechanical Engineering. 1958, no. 6, pp. 3-9.
16. Zinoviev V.A. Kinematic analysis of spatial mechanisms // Proceedings of seminar on TMM. –M.: Publ. house of the AS USSR, 1951. – Vol. 11, iss. 42. – P. 52-99.
17. Certificate of official registration of computer programs No. 2010616342. KDAM (Kinematic and dynamic analysis of mechanisms) program / B.B. Kosenok, V.P. Tukmakov. – Appl. No. 2010614593 from 29.07.2010; reg. 24.09.2010.
18. Kosenok B.B., Balyakin V.B., Dolgikh D.E. Development of a steering unit control system for spatial orientation // Transport, mining and construction engineering: science and production. 2025, no. 30, pp. 46-53. doi.org/10.26160/2658-3305-2025-30-46-53.

Сведения об авторах:

Косенок Борис Борисович – кандидат технических наук, доцент кафедры основ конструирования машин

borkos@yandex.ru

Information about authors:

Kosenok Boris Borisovich – candidate of technical sciences, associate professor of Department of machine design principles

Получена 11.06.2025