

ОПТИМАЛЬНОЕ ПО ЭНЕРГОЗАТРАТАМ УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ ДВУХЗВЕННОЙ МОДЕЛИ МАЯТНИКА С МАХОВИКОМ

Чунг Ч.Т., Меркурьев И.В., Сайпулаев М.Р.

Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва

Ключевые слова: маятник, динамика, оптимальное управление, принцип максимума Понтрягина, уравнения движения, стационарная система.

Аннотация. В рамках данной работы ставится задача синтеза оптимального по энергозатратам закона управления движением двухзвенной моделью маятника с маховиком. Получены уравнения динамики маятника с маховиком, разделяющиеся на две подсистемы, одна из которых может быть проинтегрирована независимо от второй. Показано, что законы управления могут быть получены в аналитическом виде, поскольку линеаризованная система уравнений динамики является стационарной. Используя принцип максимума Понтрягина, для линеаризованной подсистемы построен закон оптимального по энергозатратам управления движением. По результатам численного моделирования подтверждена работоспособность разработанного управления. Построенное управление переводит систему из произвольного начального положения в целевое положение за заданное время. Результаты работы могут быть использованы при построении систем управления балансирующими роботами и шагающими роботами, простейшими математическими моделями которых являются перевернутый маятник.

OPTIMAL ENERGY CONSUMPTION CONTROL OF THE MOTION OF A TWO-LINK PENDULUM MODEL WITH A FLYWHEEL

Chung Ch.T., Merkuryev I.V., Saypulaev M.R.

National Research University "Moscow Power Engineering Institute", Moscow

Keywords: pendulum, dynamics, optimal control, Pontryagin's maximum principle, equations of motion, stationary system.

Abstract. In this paper, we set the task of synthesizing an energy-optimal control law for the motion of a two-link model of a pendulum with a flywheel. The equations of the dynamics of a pendulum with a flywheel are obtained, divided into two subsystems, one of which can be integrated independently of the second. It is shown that the control laws can be obtained in analytical form, since the linearized system of dynamic equations is stationary. Using the Pontryagin maximum principle, an energy-optimal control law for the linearized subsystem is constructed. The performance of the developed control is confirmed by the results of numerical modeling. The constructed control transfers the system from an arbitrary initial position to the target position in a given time. The results of the work can be used to construct control systems for balancing robots and walking robots, the simplest mathematical models of which are an inverted pendulum.

Введение

Задачи разработки систем управления различного вида балансирующими мобильными роботами тесно связаны с задачей об управлении маятником при помощи маховика [1-5] или задачей о раскачивании гимнаста на перекладине [6, 7]. В связи с этим исследование указанных модельных задач является важным и актуальным для нахождения способов совершенствования систем управления движением балансирующих роботов.

В настоящей статье рассматривается двухзвенная модель маятника с маховиком. Для синтеза законов управления движением маятником с маховиком необходимо разрабатывать динамические модели движения указанной системы. Зачастую при моделировании динамики двухзвенного механизма используют методы аналитической динамики, такие как уравнения Лагранжа 2-ого рода [8].

В некоторых исследованиях [9, 10] учитываются особенности конструкции маятника. Решаются задачи синтеза законов управления в виде обратной связи, обеспечивающих раскачивание маятника. Для решения задачи оптимального по энергозатратам управления для

двухзвенной модели системы зачастую пользуются принципом максимума Л.С. Понтрягина [11, 12].

Для оценки эффективности построенного управления можно проводить стендовые испытания с получением измерительной информации, которую впоследствии необходимо обрабатывать с помощью различных алгоритмов фильтрации, таких как фильтрация по Гауссу [13] и применения фильтра Калмана–Бьюси [14, 15].

В рамках данной работы ставится задача синтеза оптимального по энергозатратам закона управления движением двухзвенной моделью маятника с маховиком.

Материалы и методы исследований. Исследуемая система состоит из двух звеньев (см. рис. 1). На кинематической схеме введены следующие обозначения: неподвижный шарнир O – точка подвеса первого звена, которое будем считать абсолютно твердым однородным стержнем массой m_1 , длиной l_1 и серединой в точке C . Через φ обозначается угол отклонения первого звена OC от вертикали. Второе звено моделируется абсолютно твердым однородным стержнем длиной l_2 и массой m_2 , центр масс C которого шарнирно закреплен на середине первого звена. Через θ обозначим угол между первым и вторым звеньями. В шарнире C прикладывается управляющий момент M , который поворачивает второе звено относительно первого звена.

Для построения математической модели динамики запишем уравнения движения системы в форме Лагранжа 2-го рода:

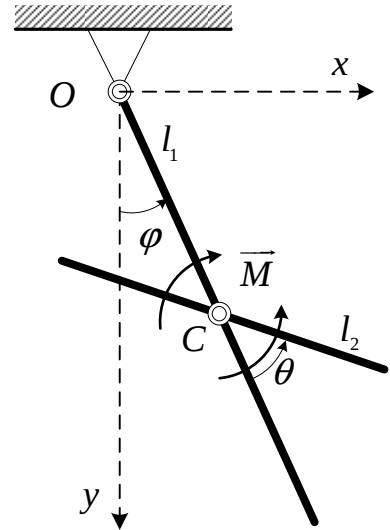


Рис. 1. Двухзвенный механизм – упрощенная модель человека на качелях

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad (13)$$

где $q = (\varphi, \theta)^T$ – обобщенные координаты; Q_i – обобщенные силы, а кинетическая энергия T может быть представлена в виде:

$$T = \left(I_{1O} + \frac{m_2 l_1^2}{4} \right) \frac{\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{I_{2C}}{2} (\dot{\varphi} + \dot{\theta})^2, \quad (14)$$

где $I_{1O} = \frac{m_1 l_1^2}{3}$ и $I_{2C} = \frac{m_2 l_2^2}{12}$ – моменты инерции первого и второго тел относительно точек O и C соответственно.

С учетом выражений для моментов инерции тел, получим кинетическую энергию системы в виде:

$$T = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{m_1}{3} + \frac{m_2}{4} \right) l_1^2 + \frac{m_2 l_2^2}{12} \right] \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \frac{m_2 l_2^2}{12} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \frac{m_2 l_2^2}{6} \dot{\varphi} \dot{\theta}. \quad (15)$$

Для нахождения обобщенных сил запишем выражение для мощности активных сил на возможных скоростях:

$$N = -M \dot{\varphi} + M (\dot{\varphi} + \dot{\theta}) - (m_1 + m_2) g \frac{l_1}{2} \sin \varphi = M \dot{\theta} - \dot{\varphi} \frac{l_1}{2} (m_1 + m_2) \sin \varphi. \quad (16)$$

Откуда обобщенные силы получаем, как коэффициенты при обобщенных скоростях:

$$Q_\varphi = -\frac{1}{2} g l_1 (m_1 + m_2) \sin \varphi, \quad Q_\theta = M. \quad (17)$$

Учитывая выражения (15) и (17), получим уравнения динамики (13) в виде:

$$\begin{aligned} & \left[(4m_1 + 3m_2)l_1^2 + m_2l_2^2 \right] \ddot{\phi} + m_2l_2^2 \ddot{\theta} + 6gl_1(m_1 + m_2)\sin\phi = 0, \\ & m_2l_2^2 \ddot{\phi} + m_2l_2^2 \ddot{\theta} - 12M = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Разделяя уравнения на две подсистемы, одна из которых может быть проинтегрирована независимо от второй, получим:

$$\begin{aligned} & \ddot{\phi} + \frac{6gl_1(m_1 + m_2)\sin\phi}{l_1^2(4m_1 + 3m_2)} + \frac{12M}{l_1^2(4m_1 + 3m_2)} = 0, \\ & \ddot{\theta} - \frac{6gl_1(m_1 + m_2)\sin\phi}{l_1^2(4m_1 + 3m_2)} - \left(\frac{12M}{l_2^2m_2} + \frac{12M}{l_1^2(4m_1 + 3m_2)} \right) = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Видно, что управлять можно только углом ϕ , так как θ зависит от него и явно не входит в первое уравнение. Однако, для стабилизации около вертикального положения в этом нет необходимости. Исследуем управление системой по первому уравнению, представив уравнение в виде:

$$\ddot{\phi} = -a \sin\phi + bu, \quad (20)$$

где $a = \frac{6gl_1(m_1 + m_2)}{l_1^2(4m_1 + 3m_2)}, b = \frac{12}{l_1^2(4m_1 + 3m_2)}, u = -M$.

Проводя линеаризацию уравнения (20) относительно вертикального положения равновесия $\sin\phi \approx \phi$ и представляя уравнения в форме Коши, получим:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -ax_1 + bu \quad (21)$$

или в векторно-матричной форме:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u, \quad (22)$$

где $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \phi \\ \dot{\phi} \end{pmatrix}$ – вектор переменных состояния системы; $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 0 \end{pmatrix}$ – матрица коэффициентов системы; $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$ – вектор-дозатор системы.

Полагая, что есть возможность измерять угловую скорость $\dot{\phi}$, будем использовать матрицу системы измерений $C = (0 \ 1)$.

Отметим, что исследуемая система (22) управляема и наблюдаема при $a \neq 0, b \neq 0$.

Построим оптимальное по энергозатратам управление, используя принцип максимума Понтрягина. Для оценки качества процесса управления введем функционал:

$$J = \int_{t_0}^{t_k} u^2 dt \rightarrow \min. \quad (23)$$

Следуя алгоритму принципа максимума Понтрягина, введем вектор сопряженных переменных $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1 \ \psi_2)$ и запишем Гамильтониан системы:

$$H(x, u, \boldsymbol{\psi}, t) = x_2\psi_1 + (-ax_1 + bu)\psi_2 + u^2. \quad (24)$$

Необходимое условие максимума Гамильтониана по управлению можно представить в виде:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = b\psi_2 + 2u = 0, \quad (25)$$

откуда получаем оптимальную структуру регулятора:

$$u = -\frac{1}{2}b\psi_2. \quad (26)$$

При этом исходные и сопряженные переменные удовлетворяют каноническим уравнениям:

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial \psi_i}, \quad \dot{\psi}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad (27)$$

или в явном виде после подстановки оптимальной структуры регулятора (26) имеем:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -ax_1 - \frac{1}{2}b^2\psi_2, \quad \dot{\psi}_1 = a\psi_2, \quad \dot{\psi}_2 = -\psi_1. \quad (28)$$

Вводя расширенный вектор переменных $\mathbf{z} = (x_1 \ x_2 \ \psi_1 \ \psi_2)^T$, запишем уравнения (28) в матричном виде:

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{\Lambda} \mathbf{z}, \quad (29)$$

где матрица системы $\mathbf{\Lambda}$ имеет вид:

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 & -\frac{1}{2}b^2 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (30)$$

Поскольку система (29) является стационарной, то переходная матрица системы равна матричной экспоненте $\Phi(t) = e^{\mathbf{\Lambda}t}$. При этом решение системы представляется в виде:

$$\mathbf{z}(t) = \Phi(t) \mathbf{z}(t_0), \quad (31)$$

где граничные условия определяются из решения линейной системы уравнений:

$$\mathbf{z}(t_k) = \Phi(t_k) \mathbf{z}(t_0), \quad \psi(t_k) = 0. \quad (32)$$

Результаты. Приведем результаты численного моделирования при построенном законе оптимального управления. В качестве численных параметров примем:

$$a = 21,02 \text{ с}^{-2}, \quad b = 0,268 \frac{1}{\text{кг} \cdot \text{м}^2}, \quad t_0 = 0 \text{ с}, \quad t_k = 2 \text{ с}, \quad (33)$$

$$x(t_0) = 0,5 \text{ рад}, \quad \dot{x}(t_0) = 0,5 \frac{\text{рад}}{\text{с}}, \quad x(t_k) = 0 \text{ рад}, \quad \dot{x}(t_k) = 0 \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

На рисунке 2 представлены результаты моделирования.

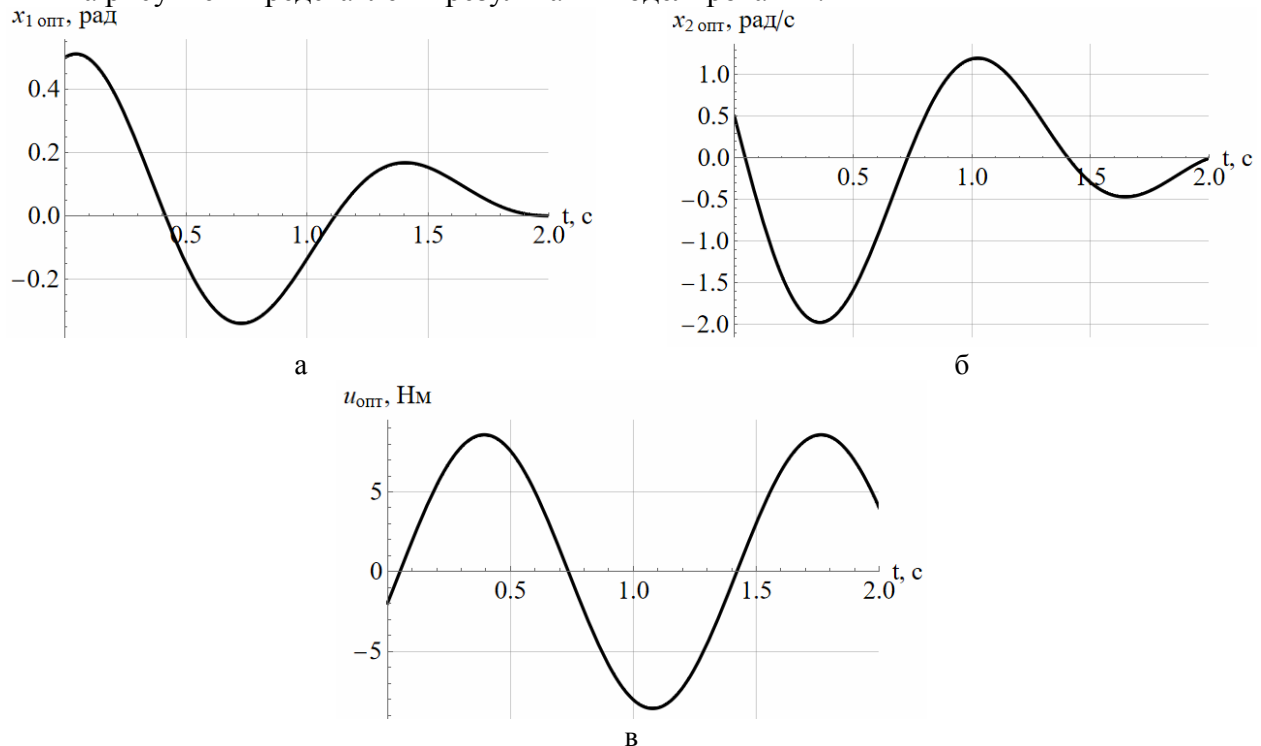


Рис. 2. Результаты численного моделирования

Результаты моделирования показали, что построенное управление приводит маятник с маховиком к целевому положению за заданное время.

Выводы. Построенные уравнения динамики двухзвенной модели маятника с маховиком обеспечивают управление только по углу поворота маятника. Решение задачи оптимального по энергозатратам управления можно получить в аналитическом виде, поскольку уравнение движения, линеаризованные относительно положения равновесия, являются стационарными. По результатам численного моделирования продемонстрирована работоспособность построенного закона управления.

Результаты работы могут быть использованы при построении систем управления балансирующими роботами и шагающими роботами, простейшими математическими моделями которых являются перевернутый маятник.

Заключение

В данной работе с использованием формализма Лагранжа получены уравнения динамики маятника с маховиком. На основе принципа максимума Понтрягина построены законы управления движением оптимальные по энергозатратам. По результатам численного моделирования продемонстрирована работоспособность построенного закона управления.

Результаты работы могут быть использованы при построении систем управления балансирующими роботами и шагающими роботами, простейшими математическими моделями которых являются перевернутый маятник.

Список литературы

1. Формальский А.М. Управление движением неустойчивых объектов. – М.: Наука, 2012. – 230 с.
2. Formalskii A.M. Stabilization and motion control of unstable objects. – Berlin: Walter de Gruyter GmbH, 2015. – 250 p.
3. Безнос А.В., Гришин А.А., Ленский А.В., Охоцимский Д.Е., Формальский А.М. Маятник, управляемый при помощи маховика // Доклады академии наук. – 2003. – Т. 392, № 6. – С. 743-749.
4. Безнос А.В., Гришин А.А., Ленский А.В., Охоцимский Д.Е., Формальский А.М. Управление при помощи маховика маятником с неподвижной точкой подвеса // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2004. – № 1. – С. 27-38.
5. Spong M.W., Corke P., Lozano R. Nonlinear Control of the Inertia Wheel Pendulum // Automatica. 2001, vol. 37, no. 11, pp. 1845-1851.
6. Spong M.W. The Swing up Control Problem for the Acrobot // IEEE Control Systems Magazine. 1995, vol. 15, no. 1, pp. 49-55. DOI: 10.1109/37.341864.
7. Michitsuji Y., Sato H., Yamakita M. Giant Swing via Forward Upward Circling of the Acrobat-Robot // Proceedings of 2001 American Control Conference. Arlington. 2001, vol. 4, pp. 3262-3267. DOI: 10.1109/ACC.2001.946425.
8. Александров В.В., Жермоленко В.Н. Об абсолютной устойчивости систем второго порядка // Вестник МГУ. Математика, механика. – 1972. – №5. – С. 102-108.
9. Климина Л.А., Формальский А.М. Трехзвенный механизм как модель человека на качелях // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2020. – №5. – С. 89-105.
10. Меркурьев И.В., Чунг Ч.Т., Сайпулаев Г.Р., Сайпулаев М.Р., Диб Д. Разработка модели кинематики пальцев человеческой руки, применяемых в роботизированных перчатках // Механика машин, механизмов и материалов. – 2023. – №4(65). – С. 106-113. – DOI: 10.46864/1995-0470-2023-4-65-106-113.
11. Лутманов С.В., Остапенко Е.Н. Оптимальное управление динамическими объектами. – Пермь: ПГНИУ, 2022. – 164 с.
12. Чечурин С.Л. Параметрические колебания и устойчивость периодического движения. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1983. – 219 с.
13. Меркурьев И.В., Чунг Ч.Т., Сайпулаев Г.Р., Сайпулаев М.Р. Разработка комплексной математической модели для оценки уровня погрешностей в определении координат многосуставной кисти руки // Транспортное, горное и строительное машиностроение: наука и производство. – 2024. – №26. – С. 9-16. – doi.org/10.26160/2658-3305-2024-26-9-16.
14. Степанов О.А. Методы обработки навигационной измерительной информации. – СПб.: Университет ИТМО, 2017. – 196 с.
15. Браммер К., Зиффлинг Г. Фильтр Калмана–Бьюси. – М.: Наука, 1983. – 200 с.

References

1. Formalskii A.M. Motion control of unstable objects. – М.: Science, 2012. – 230 p.

2. Formalskii A.M. Stabilization and motion control of unstable objects. – Berlin: Walter de Gruyter GmbH, 2015. – 250 p.
3. Beznos A.V., Grishin A.A., Lenskii A.V., Ohocimskii D.E., Formalskii A.M. A pendulum controlled by a flywheel // Reports of the Academy of Sciences. 2003, vol. 392, no. 6, pp. 743-749.
4. Beznos A.V., Grishin A.A., Lenskii A.V., Ohocimskii D.E., Formalskii A.M. Flywheel control of a pendulum with a fixed suspension point // News of RAS. Theory and control system. – 2004, no. 1, pp. 27-38.
5. Spong M.W., Corke P., Lozano R. Nonlinear Control of the Inertia Wheel Pendulum // Automatica. 2001, vol. 37, no. 11, pp. 1845-1851.
6. Spong M.W. The Swing up Control Problem for the Acrobot // IEEE Control Systems Magazine. 1995, vol. 15, no. 1, pp. 49-55. DOI: 10.1109/37.341864.
7. Michitsuji Y., Sato H., Yamakita M. Giant Swing via Forward Upward Circling of the Acrobat-Robot // Proceedings of 2001 American Control Conference. Arlington. 2001, vol. 4, pp. 3262-3267. DOI: 10.1109/ACC.2001.946425.
8. Aleksandrov V.V., Zhermolenko V.N. On the absolute stability of second-order systems // MSU Bulletin. Mathematics and Mechanics. 1972, no. 5, pp. 102-108.
9. Klimina L.A., Formalskii A.M. Three-link mechanism as a model of a person on a swing // News of RAS. Theory and control system. 2020, no. 5, pp. 89-105.
10. Merkuryev I.V., Chung Ch.T., Saypulaev G.R., Saypulaev M.R., Deeb D. Development of a kinematics model of human fingers for application in robotic gloves // Mechanics of machines, mechanisms and materials. 2023, no. 4(65), pp. 106-113. DOI: 10.46864/1995-0470-2023-4-65-106-113.
11. Lutmanov S.V., Ostapenko E.N. Optimal control of dynamic objects. – Perm: PSNRU, 2022. – 164 p.
12. Chehurin S.L. Parametric oscillations and stability of periodic motion. – L.: LSGU, 1983. – 219 p.
13. Merkuryev I.V., Chung Ch.T., Saypulaev G.R., Saypulaev M.R. Development of a complex mathematical model for assessing the level of errors in determining the coordinates of a multi-joint hand // Transport, mining and construction engineering: science and production. 2024, no. 26, pp. 9-16. doi.org/10.26160/2658-3305-2024-26-9-16.
14. Stepanov O.A. Methods of processing navigational measurement information. – SPb.: ITMO University, 2017. – 196 p.
15. Brammer K., Ziffing G. Kalman–Bucy filter. – M.: Science, 1983. – 200 p.

Сведения об авторах:

Information about authors:

Чунг Чан Туан – аспирант	Chung Chan Tuan – postgraduate student
Меркурьев Игорь Владимирович – доктор технических наук, заведующий кафедрой Робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин	Merkuryev Igor Vladimirovich – doctor of technical sciences, head of Department of robotics, mechatronics, dynamics and machine strength
Сайпулаев Муса Русланович – кандидат технических наук, старший преподаватель кафедры Робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин	Saypulaev Musa Ruslanovich – candidate of technical sciences, senior lecturer of the Department of robotics, mechatronics, dynamics and machine strength
saypulaevmr@mail.ru	

Получена 09.06.2025