

КИНЕМАТИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ МЕКАНУМ-ПЛАТФОРМОЙ НА ОСНОВЕ ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА

Сайпулаев Г.Р., Калинин Г.Н.

Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва

Ключевые слова: всенаправленная платформа, кинематика, неголономные связи, механум-колесо, управление, функция Ляпунова.

Аннотация. В рамках данной работы ставится задача синтеза законов управления движением механум-платформой, обеспечивающих устойчивость программного движения, на основе функций Ляпунова. Рассматривается конструкция четырехколесной платформы, оснащенной механум-колесами. Представлены уравнения кинематики платформы и выражения для угловых скоростей механум-колес. Из уравнений кинематики получены законы управления для скоростей механум-платформы, обеспечивающих устойчивость желаемых движений, для двух различных функций Ляпунова. Получены аналитические решения уравнений кинематики относительно законов изменения координат и угла курса механум-платформы при построенных законах управления. По результатам численных расчетов подтверждена работоспособность разработанного управления и сделан вывод о скорости сходимости к желаемому движению для этих двух законов управления. Полученные кинематические законы управления движением роботом могут быть использованы при разработке реальных прототипов мобильных механум-платформ.

KINEMATIC CONTROL OF THE MECANUM-PLATFORM BASED ON LYAPUNOV FUNCTIONS

Saypulaev G.R., Kalinin G.N.

National Research University “Moscow Power Engineering Institute”, Moscow

Keywords: omnidirectional platform, kinematics, nonholonomic constraints, mecano-wheel, control, Lyapunov function.

Abstract. In this paper, we set the task of synthesizing the laws of motion control for a mecano-platform that ensure the stability of the programmed motion based on Lyapunov functions. The design of a four-wheeled platform equipped with mecano-wheels is considered. The kinematic equations of the platform and expressions for the angular velocities of the mecano-wheels are presented. From the kinematic equations, control laws for the velocities of the mecano-platform that ensure the stability of the desired motions are obtained for two different Lyapunov functions. Analytical solutions are obtained for the laws of change in coordinates and the yaw angle of the mecano-platform for the constructed control laws. Based on the results of numerical calculations, the operability of the developed control is confirmed and a conclusion is made about the rate of convergence to the desired motion for these two control laws. The obtained kinematic laws of robot motion control can be used in the development of real prototypes of mobile mecano-platforms.

Введение

В последние годы бурно развиваются области автоматизации и роботизации различных производственных предприятий, что приводит к увеличению исследований и разработок новых роботизированных систем. Одним из распространенных типов роботов, способных осуществлять движение в любом направлении с заданной ориентацией, применяемых в сфере складской логистики, являются мобильные платформы, оснащенные механум-колесами (см. рис. 1). Так, в работах [1, 2] рассматривается шестиколесная механум-платформа, являющаяся кинематически избыточной, и именно в силу этого обстоятельства способная решать широкий класс задач в различных областях человеческой деятельности.

Для синтеза законов управления движением механум-платформ необходимо разрабатывать кинематические модели движения указанных мобильных роботов. Зачастую при моделировании кинематики механум-колес используют упрощенные модели механум-колес [3]. При этом есть исследования [4, 5], в которых учитываются особенности конструкции механум-колес (количество роликов и их реальной геометрии).



а



б

Рис. 1. Мобильная роботизированная платформа с механум-колесами:
а) пример робота; б) механум-колесо

В статье [6] представлено исследование влияния погрешностей установки осей механум-колес на платформе на точность позиционирования мобильной платформы.

В работе [7] отмечено, что использование на складах грузоподъемного оборудования на мобильной платформе с механум-колесами имеет высокую степень практической реализации, что подтверждает актуальность исследований роботов всенаправленного движения.

В исследовании [8] предложен алгоритм локализации автономного сервисного робота-навигатора на механум-колесах при наличии в окружающей среде подвижных объектов. Предлагаемый алгоритм основан на вероятностной модели движения робота с дифференциальной кинематикой.

В работе [9] проведён сравнительный анализ двух вариантов симметричного размещения всенаправленных колёс типа механум в мобильном роботе.

В статьях [10, 11] рассмотрен вопрос управления четырехколесным мобильным роботом с всенаправленными колесами типа механум. Предлагается программное управление движением на основе решения обратной задачи кинематики механум-платформы. По результатам моделирования показано, что для криволинейных траекторий движения предложенное управление может быть неэффективно.

В источнике [11] разрабатывается алгоритм траекторного управления высокоманевренной четырехколесной робототехнической платформой, оснащенной механум-колесами, с целью организации ее движения за некоторым подвижным объектом. Предложен алгоритм плоского движения робота за подвижным объектом без учета препятствий на основе модифицированного метода погони при разных видах управляющих функций.

Проведенный краткий обзор показывает необходимость разработки законов управления, обеспечивающих устойчивость программного движения. Для этого может быть применен метод управления на основе функций Ляпунова [12].

В рамках данной работы ставится задача синтеза законов управления движением механум-платформой, обеспечивающих устойчивость программного движения, на основе функций Ляпунова.

Материалы и методы исследований. Для описания движения платформы будем использовать кинематическую схему, представленную на рисунок 2.

При описании кинематики робота вводятся неподвижная система координат xuz и подвижная система координат $OXYZ$, связанная с платформой и с началом в геометрическом центре O платформы.

На кинематической схеме введены следующие обозначения: h – половина расстояния между передними и задними парами колес; l – половина расстояний между левыми и правыми колесами. Движение механум-платформы удобно описывать, используя продольную V_x и поперечную V_y линейные скорости геометрического центра платформы и угловую скорость Ω вращения платформы вокруг вертикальной оси.

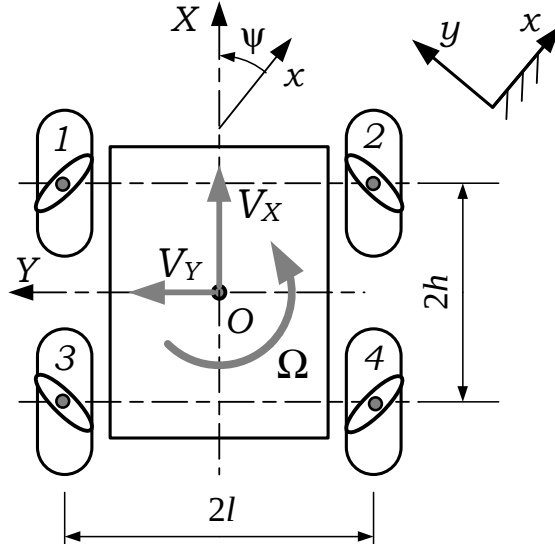


Рис. 2. Кинематическая схема меканум-платформы

При описании уравнений кинематики используется упрощенная модель омни-колеса [3], в которой колесо моделируется диском, точка контакта которого может проскальзывать в направлении перпендикулярном оси контактирующего ролика.

Поскольку управляющими сигналами на кинематическом уровне являются угловые скорости вращения колес ω_i , то приведем формулы, связывающие угловые скорости вращения колес со скоростями платформы в подвижной системе координат:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \frac{1}{R} [V_x - V_y - (l + h)\Omega], & \omega_2 &= \frac{1}{R} [V_x + V_y + (l + h)\Omega], \\ \omega_3 &= \frac{1}{R} [V_x + V_y - (l + h)\Omega], & \omega_4 &= \frac{1}{R} [V_x - V_y + (l + h)\Omega],\end{aligned}\quad (1)$$

где R – радиус меканум-колеса.

При этом уравнения связывающие скорости платформы в подвижных и неподвижных осях имеют вид:

$$\dot{x}_O = V_x \cos \psi - V_y \sin \psi, \quad \dot{y}_O = V_x \sin \psi + V_y \cos \psi, \quad \dot{\psi} = \Omega, \quad (2)$$

где x_O, y_O – координаты геометрического центра платформы в неподвижной системе координат; ψ – угол курса платформы. Здесь и далее точкой над переменной обозначается производная по времени.

Зададим желаемое движение робота $x_o^d(t), y_o^d(t), \psi^d(t)$ и сформулируем задачу управления следующим образом: требуется определить угловые скорости вращения меканум-колес, обеспечивающие устойчивость желаемого движения робота. Поскольку угловые скорости вращения колес однозначно определяются по скоростям платформы V_x, V_y, Ω , то можно искать законы управления относительно скоростей платформы и последующего использования соотношения (1) для вычисления угловых скоростей меканум-колес.

Для формирования законов управления V_x, V_y, Ω рассмотрим две кандидат-функции Ляпунова. В качестве одной из кандидат-функций Ляпунова V_1 примем:

$$V_1 = \frac{1}{2} \left[(x_o - x_o^d)^2 + (y_o - y_o^d)^2 + \gamma (\psi - \psi^d)^2 \right] > 0. \quad (3)$$

где $\gamma > 0$ – положительный коэффициент, имеющий размерность квадрата длины.

В качестве второй из кандидат-функций Ляпунова V_2 примем [12]:

$$V_2 = \frac{1}{2} \left[(x_o - x_o^d)^2 + (y_o - y_o^d)^2 \right] + \gamma (1 - \cos(\psi - \psi^d)) \geq 0. \quad (4)$$

Из соотношений (3) и (4) видно, что функции V_1 и V_2 являются положительно определенными при любых x_o, y_o, ψ .

Вычислим производные от функций V_1 и V_2 в силу уравнений кинематики (2):

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 &= (\dot{x}_o - \dot{x}_o^d)(\dot{x}_o - \dot{x}_o^d) + (\dot{y}_o - \dot{y}_o^d)(\dot{y}_o - \dot{y}_o^d) + \gamma(\psi - \psi^d)(\dot{\psi} - \dot{\psi}^d) = \\ &= (\dot{x}_o - \dot{x}_o^d)(V_x \cos \psi - V_y \sin \psi - \dot{x}_o^d) + (\dot{y}_o - \dot{y}_o^d)(V_x \sin \psi + V_y \cos \psi - \dot{y}_o^d) + \\ &\quad + \gamma(\psi - \psi^d)(\Omega - \dot{\psi}^d), \\ \dot{V}_2 &= (\dot{x}_o - \dot{x}_o^d)(\dot{x}_o - \dot{x}_o^d) + (\dot{y}_o - \dot{y}_o^d)(\dot{y}_o - \dot{y}_o^d) + \gamma(\psi - \psi^d)(\dot{\psi} - \dot{\psi}^d) = \\ &= (\dot{x}_o - \dot{x}_o^d)(V_x \cos \psi - V_y \sin \psi - \dot{x}_o^d) + (\dot{y}_o - \dot{y}_o^d)(V_x \sin \psi + V_y \cos \psi - \dot{y}_o^d) + \\ &\quad + \gamma \sin(\psi - \psi^d)(\dot{\psi} - \dot{\psi}^d).\end{aligned}\tag{5}$$

Для обеспечения отрицательной определенности производной $\dot{V}_1$ можно формировать законы изменения скоростей платформы в виде:

$$\begin{aligned}V_x &= \dot{x}_o^d \cos \psi + \dot{y}_o^d \sin \psi - k_1 \left[(x_o - x_o^d) \cos \psi + (y_o - y_o^d) \sin \psi \right], \\ V_y &= -\dot{x}_o^d \sin \psi + \dot{y}_o^d \cos \psi - k_1 \left[-(x_o - x_o^d) \sin \psi + (y_o - y_o^d) \cos \psi \right], \\ \Omega &= \dot{\psi}^d - k_2 (\psi - \psi^d),\end{aligned}\tag{6}$$

где $k_1 > 0, k_2 > 0$ – положительные коэффициенты.

Для обеспечения отрицательной определенности производной $\dot{V}_2$ можно формировать законы изменения скоростей платформы в виде:

$$\begin{aligned}V_x &= \dot{x}_o^d \cos \psi + \dot{y}_o^d \sin \psi - k_1 \left[(x_o - x_o^d) \cos \psi + (y_o - y_o^d) \sin \psi \right], \\ V_y &= -\dot{x}_o^d \sin \psi + \dot{y}_o^d \cos \psi - k_1 \left[-(x_o - x_o^d) \sin \psi + (y_o - y_o^d) \cos \psi \right], \\ \Omega &= \dot{\psi}^d - k_2 \sin(\psi - \psi^d).\end{aligned}\tag{7}$$

Учитывая законы управления (6) и (7), выражения для производных (5) примут вид:

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 &= -k_1 \left[(x_o - x_o^d)^2 + (y_o - y_o^d)^2 \right] - k_2 \gamma (\psi - \psi^d)^2 < 0, \\ \dot{V}_2 &= -k_1 \left[(x_o - x_o^d)^2 + (y_o - y_o^d)^2 \right] - k_2 \gamma \sin^2(\psi - \psi^d) \leq 0.\end{aligned}\tag{8}$$

Воспользовавшись теоремой Барбашина–Красовского (или принципом инвариантности ЛаСаля) и учитывая (3), (4) и (8), получим, что законы управления (6) и (7) обеспечивают асимптотическую устойчивость желаемого движения.

Найдем решения уравнений кинематики движения при полученных законах управления. При подстановке законов управления (6) в уравнения (2) получим:

$$\dot{x}_o = \dot{x}_o^d - k_1 (x_o - x_o^d), \quad \dot{y}_o = \dot{y}_o^d - k_1 (y_o - y_o^d), \quad \dot{\psi} = \dot{\psi}^d - k_2 (\psi - \psi^d).\tag{9}$$

Решение системы уравнений (9) имеет вид:

$$\begin{aligned}x_o(t) &= x_o^d(t) + (x_o(0) - x_o^d(0)) \exp(-k_1 t), \\ y_o(t) &= y_o^d(t) + (y_o(0) - y_o^d(0)) \exp(-k_1 t), \\ \psi(t) &= \psi^d(t) + (\psi(0) - \psi^d(0)) \exp(-k_2 t).\end{aligned}\tag{10}$$

Из решения (10) явно просматривается асимптотическая устойчивость желаемого движения при любых начальных отклонениях.

При подстановке законов управления (7) в уравнения (2) получим:

$$\dot{x}_o = \dot{x}_o^d - k_1 (x_o - x_o^d), \quad \dot{y}_o = \dot{y}_o^d - k_1 (y_o - y_o^d), \quad \dot{\psi} = \dot{\psi}^d - k_2 \sin(\psi - \psi^d).\tag{11}$$

Решение системы уравнений (9) имеет вид:

$$\begin{aligned}
x_o(t) &= x_o^d(t) + (x_o(0) - x_o^d(0)) \exp(-k_1 t), \\
y_o(t) &= y_o^d(t) + (y_o(0) - y_o^d(0)) \exp(-k_1 t), \\
\psi(t) &= \psi^d(t) + 2 \arctan \left(\exp(-k_2 t) \tan \left(\frac{\psi(0) - \psi^d(0)}{2} \right) \right).
\end{aligned} \tag{12}$$

Из решения (10) явно просматривается асимптотическая устойчивость желаемого движения при любых начальных отклонениях по координатам. Но в зависимости от начальных отклонений по углу курса может возникнуть постоянная ошибка по углу курса. Последнее возможно при $\psi^d(t) = \psi^d(0) = \text{const}$ и $\psi(0) - \psi^d(0) = n\pi$, $n = \pm 1, 2, 3, \dots$.

Результаты. Приведем сравнение полученных законов управления по зависимостям угла курса в соответствии с выражениями (11) и (12). В качестве численных параметров примем $k_2 = 5 \text{ с}^{-1}$. На рисунке 3 представлены результаты моделирования в случае, когда желаемая зависимость угла курса является периодической функцией, а на рисунке 4 – в случае, когда желаемая зависимость угла курса является постоянной величиной.

Результаты моделирования показали, что управление (6) быстрее приводит угол курса к желаемой зависимости, чем при управлении (7).

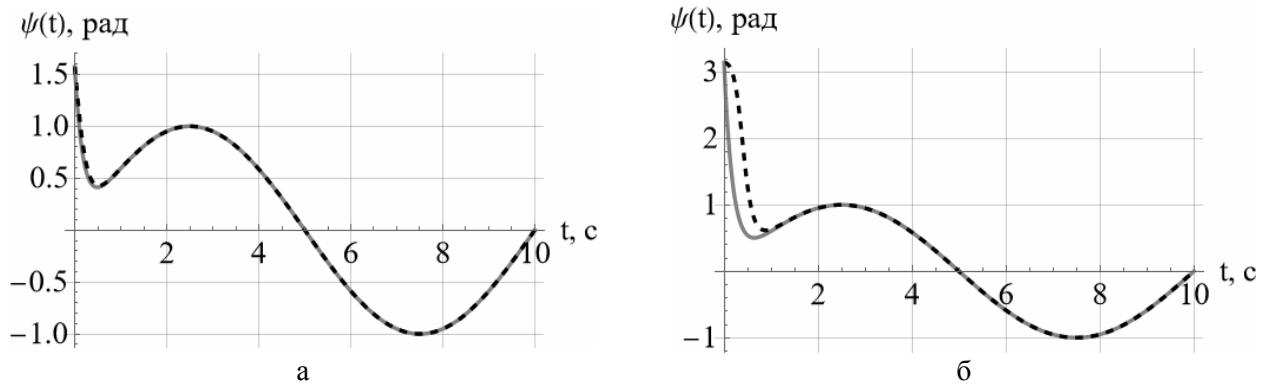


Рис. 3. Результаты численного моделирования движения при $\psi^d(t) = \sin\left(\frac{\pi t}{10}\right)$:

а) $\psi(0) = \frac{\pi}{2}$; б) $\psi(0) = \pi$ (сплошной линией обозначена зависимость по формуле (10); штриховой линией – зависимость по формуле (12))

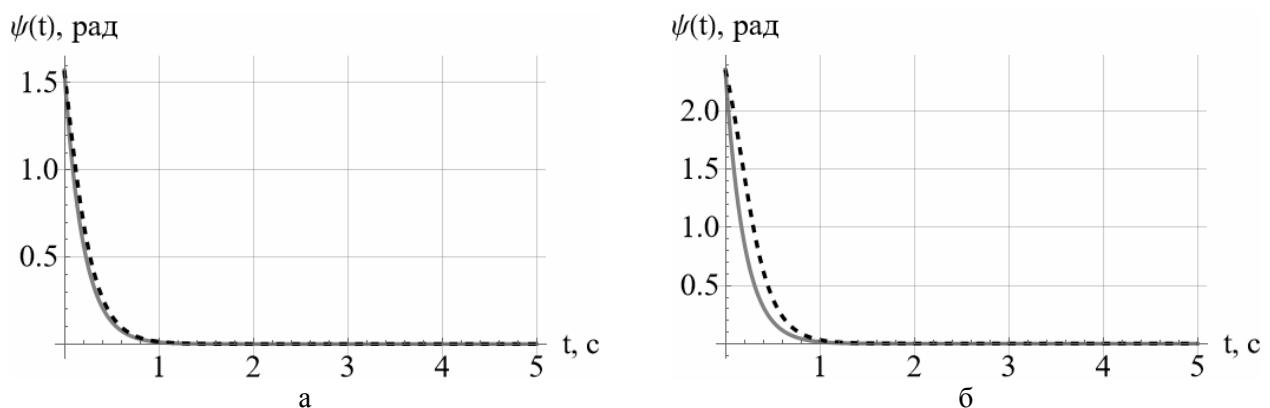


Рис. 4. Результаты численного моделирования движения при $\psi^d(t) = 0$: а) $\psi(0) = \frac{\pi}{2}$; б) $\psi(0) = \frac{3\pi}{4}$ (сплошной линией обозначена зависимость по формуле (10); штриховой линией – зависимость по формуле (12))

Выводы. По найденным аналитическим решениям уравнений кинематики при построенных управлениях подтверждена устойчивость решений системы уравнений. По результатам численного моделирования продемонстрирована работоспособность предложенных законов управления. Показано, что законы управления (6) быстрее приводят угол курса к желаемой зависимости, чем при законе управления (7).

По результатам работы получены законы управления в виде зависимостей скоростей платформы, включающие желаемые зависимости и текущие значения координат и угла курса платформы. Результаты работы могут быть использованы при построении реальных прототипов мобильных механум-платформ.

Заключение

В данной работе с использованием функций Ляпунова построены два закона управления на кинематическом уровне для четырехколесной механум-платформы. Получены аналитические решения уравнений кинематики при разработанных законах управления и проанализирована работоспособность построенных управлений в зависимости от начальных условий и желаемых движений. По результатам численного моделирования подтверждена работоспособность предложенного управления.

Полученные кинематические законы управления движением роботом могут быть использованы при построении реальных прототипов мобильных механум-платформ.

Финансовая поддержка. Работа выполнена в рамках проекта «Разработка программного обеспечения и систем управления движением новых мобильных роботов, оснащенных сферическими колесами и омни-колесами» при поддержке гранта НИУ «МЭИ» на реализацию программы научных исследований «Приоритет 2030: Технологии будущего» в 2024-2026 гг.

Список литературы

1. Павловский В.Е., Грибков Д.А., Орлов И.А., Подопросветов А.В., Колесниченко Е.Ю. Мобильный манипулятор на шестиколесной механум-платформе // Экстремальная робототехника. – 2018. – № 1(29). – С. 335-344.
2. Колесниченко Е.Ю., Павловский В.Е., Грибков Д.А., Орлов И.А., Алисейчик А.П. Кинематическое управление движением шестиколесного механум-робота // Препринты ИПМ. – 2016. – № 127. – С. 1-26. DOI: 10.20948/prepr-2016-127
3. Борисов А.В., Килин А.А., Мамаев И.С. Тележка с омниколесами на плоскости и сфере // Нелинейная динамика. – 2011. – Т. 7, №. 4 (Мобильные роботы). – С. 785-801. – DOI: 10.20537/nd1104004.
4. Adamov B.I. Influence of mecanum wheels construction on accuracy of the omnidirectional platform navigation (on example of KUKA youBot robot) // 2018 25th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems (ICINS). 2018, pp. 1-4. DOI: 10.23919/ICINS.2018.8405889.
5. Adamov B.I. Geometry and Kinematics of the Mecanum Wheel on a Plane and a Sphere // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2024, vol. 20, no. 1, pp. 43-78. DOI: 10.20537/nd240201.
6. Панкратьева Г.В., Мордин А.Е., Сайпулаев Г.Р. Анализ точности позиционирования при конструкционных погрешностях в установке механум-колёс мобильной платформы // Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don). – 2023. – Т. 23, № 4, С. 356-364. – doi.org/10.23947/2687-1653-2023-23-4-356-364.
7. Сладкова Л.А., Пшибиев А.М. Кинематический анализ, методика и проведение экспериментальных исследований перемещений робота-навигатора на механум колесах // Научно-технический вестник Брянского государственного университета. – 2024. – №3. – С. 214-224. – DOI: 10.22281/2413-9920-2024-10-03-214-224.
8. Пшибиев А.М., Сладкова Л.А. Алгоритм локализации автономного сервисного робота-навигатора на механум колесах в среде подвижных объектов // Известия ТулГУ. Технические науки. – 2024. – №5. – С. 533-539. – DOI: 10.24412/2071-6168-2024-5-539-540.
9. Павлюковец С.А., Вельченко А.А., Радкевич А.А. Поведение мобильного робота с симметричной структурой колес механум при перемещении по криволинейной траектории // Управление техническими объектами. – 2024. – № 4. – С. 47-52. – DOI: 10.21122/2309-4923-2024-4-47-52.
10. Радкевич А.А., Синьсинь У., Вельченко А.А., Павлюковец С.А. Математическая модель движения мобильного робота с колесами всенаправленного типа // Доклады БГУИР. – 2024. – Т. 22, № 1. – С. 82-90. – doi.org/10.35596/1729-7648-2024-22-1-82-90.
11. Микишанина Е.А., Платонов П.С. Управление высокоманевренным мобильным роботом в задаче следования за объектом // Компьютерные исследования и моделирование. – 2023. – Т. 15, № 5. – С. 1301-1321. – DOI: 10.20537/2076-7633-2023-15-5-1301-1321.

12. Springer Handbook of Robotics / Eds. B. Siciliano, O. Khatib. – Germany, Berlin: Springer, 2008. – 1628 p.

References

1. Pavlovsky V.E., Gribkov D.A., Orlov I.A., Podoprosvetov A.V., Kolesnichenko E.Yu. Mobile manipulator on six-wheel mecanum platform // Extreme Robotics. 2018, no. 1(29), pp. 335-344.
2. Kolesnichenko E.Yu., Pavlovsky V.E., Gribkov D.A., Orlov I.A., Aliseychik A.P. Kinematic motion control of six-wheeled mecanum-robot // Keldysh Institute Preprints. 2019, no. 127, pp. 1-26. DOI: 10.20948/prepr-2016-127.
3. Borisov A.V., Kilin A.A., Mamaev I.S. An omni-wheel vehicle on a plane and a sphere // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2011, vol. 7, no. 4, pp. 785-801. DOI: 10.20537/nd1104004.
4. Adamov B.I. Influence of mecanum wheels construction on accuracy of the omnidirectional platform navigation (on example of KUKA youBot robot) // 2018 25th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems (ICINS). 2018, pp. 1-4. DOI: 10.23919/ICINS.2018.8405889.
5. Adamov B.I. Geometry and Kinematics of the Mecanum Wheel on a Plane and a Sphere // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2024, vol. 20, no. 1, pp. 43-78. DOI: 10.20537/nd240201.
6. Pankrateva G.V., Mordin A.E., Saypulaev G.R. Analysis of Positioning Accuracy in Case of Design Errors in the Installation of Mecanum Wheels of the Mobile Platform // Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don). 2023, vol. 23, no. 4, pp. 356-364. doi.org/10.23947/2687-1653-2023-23-4-356-364.
7. Sladkova L.A., Pshibiev A.M. Kinematic analysis, methods and experimental studies of robot navigator movements on mecanum wheels // Scientific and Technical Bulletin of Bryansk State University. 2024, no. 3, pp. 214-224. DOI: 10.22281/2413-9920-2024-10-03-214-224.
8. Pshibiev A.M., Sladkova L.A. Algorithm for localization of an autonomous service robot-navigator on mekanum wheels in the environment of moving objects // News of TlSU. Technical Sciences. 2024, no. 5, pp. 533-539. DOI: 10.24412/2071-6168-2024-5-539-540.
9. Pauliukavets S.A., Velchenko A.A., Radkevich A.A. Behavior of a mobile robot with symmetrical structure of mecanum wheels when movement along a curvilinear trajectory // Management of technical objects. 2024, no. 4, pp. 47-52. DOI: 10.21122/2309-4923-2024-4-47-52.
10. Radkevich A.A., Xinxin W., Velchenko A.A., Pauliukavets S.A. Mathematical Model of Movement of a Mobile Robot with Omnidirectional Wheels // Reports of the BSUIR. 2024, vol. 22, no. 1, pp. 82-90. doi.org/10.35596/1729-7648-2024-22-1-82-90.
11. Mikishanina E.A., Platonov P.S. Motion control by a highly maneuverable mobile robot in the task of following an object // Computer research and modeling. 2023, vol. 15, no. 5, pp. 1301-1321. DOI: 10.20537/2076-7633-2023-15-5-1301-1321.
12. Springer Handbook of Robotics / Eds. B. Siciliano, O. Khatib. – Germany, Berlin: Springer, 2008. – 1628 p.

Сведения об авторах:

Information about authors:

Сайпулаев Гасан Русланович – кандидат технических наук, доцент кафедры Робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин	Saypulaev Gasan Ruslanovich – candidate of technical sciences, associate professor of the Department of robotics, mechatronics, dynamics and machine strength
Калинин Григорий Николаевич – студент	Kalinin Grigory Nikolaevich – student
saypulaevgr@mail.ru	

Получена 06.05.2025