

ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА, ДВИЖУЩЕГОСЯ ПО УПРУГОМУ ОСНОВАНИЮ, С КОНТАКТОМ В ДВУХ ТОЧКАХ ОПОРЫ

Меркурьев И.В., Наим М., Сайпулаев М.Р.

Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва

Ключевые слова: динамика, изгиб, упругая балка, метод Бубнова–Галёркина, балка Эйлера–Бернулли, уравнения движения.

Аннотация. В работе рассматривается динамика движения тела, движущегося вдоль упругой балки. Целью работы является математическое моделирование динамики системы «твердое тело – упругая балка» с учетом силового взаимодействия указанных тел в двух точках соприкосновения. На основе теории балок Эйлера–Бернулли и общих теорем динамики построены уравнения движения системы «твердое тело – упругая балка» в частных производных. С помощью метода Бубнова–Галёркина получены обыкновенные дифференциальные уравнения для весовых коэффициентов приближенного решения уравнения в частных производных. По результатам численного интегрирования уравнений получены зависимости прогиба и угла поворота поперечного сечения упругой балки от времени. В отличие от ранее используемых, разработанная модель позволяет учесть влияние силового воздействия подвижного твердого тела на изгиб упругой балки. Результаты работы могут быть использованы при проектировании и изготовлении новых транспортных систем.

DYNAMICS OF A SOLID MOVING ALONG AN ELASTIC BASE WITH A DOUBLED POINT OF CONTACT

Merkuryev I.V., Naim M., Saypulaev M.R.

National Research University “Moscow Power Engineering Institute”, Moscow

Keywords: dynamics, bending, elastic beam, Bubnov–Galerkin method, Euler-Bernoulli beam, equations of motion.

Abstract. In this paper we consider the dynamics of motion of a body moving along an elastic beam. The aim of the work is mathematical modeling of the dynamics of the "rigid body - elastic beam" system taking into account the force interaction of these bodies at two points of contact. Based on the Euler–Bernoulli beam theory and general theorems of dynamics, the equations of motion of the system "rigid body – elastic beam" in partial derivatives are constructed. Using the Bubnov–Galerkin method, ordinary differential equations are obtained for the weight coefficients of the approximate solution of the equation in partial derivatives. Based on the results of numerical integration of equations, the dependences of the deflection and rotation angle of the cross section of the elastic beam on time are obtained. Unlike previously used models, the developed model allows one to take into account the influence of the force action of a moving rigid body on the bending of the elastic beam. The results of the work can be used in the design and manufacture of new transport systems.

Введение

В настоящее время существует множество научных работ, посвященных теоретическим и экспериментальным исследованиям проблем, связанных с разработкой моделей движения твердых тел на гибких платформах или балках [1] для обеспечения оптимальной устойчивости движущихся объектов [2].

Зачастую (см. например работы [3-8]) при моделировании динамики ограничения на силы контактного взаимодействия (силы трения и нормальную реакцию опоры) не учитываются, а ограничиваются только наложенными кинематическими связями. Учет контактных сил трения и нормальной реакции опоры приводит к усложнению математической модели динамики системы «твердое тело – упругая балка».

Так, в работе [9] исследована эквивалентная жесткость вязкоупругого полупространства для периодически поддерживаемой балки под действием движущейся нагрузки в качестве модели взаимодействия железнодорожного полотна с рельсами. Развитие волновой динамики распределенных механических систем, взаимодействующих с упруго-инерционными и неоднородными основаниями, несущих, в частности, подвижные нагрузки [10].

Анализ динамического поведения конструкции под действием вибрационных нагрузок в случае изменения условий опирания на упругое основание представлен в статье [11]. Моделирование поведения бесконечно длинной балки, лежащей на сплошном упругом основании, произведено в контексте определения воздействия высокоскоростного подвижного состава на рельсы железнодорожных путей [12].

В работе [13] показано, что модели изгиба балок Тимошенко, Рэлея и Эйлера–Бернулли дают очень близкие величины прогибов для систем, несущих подвижные нагрузки. История развития метода Бубнова–Галеркина приведена в работе [14]. Зависимости амплитуды прогиба, проявляющихся в движении динамических объектов по рельсовой линии, приведены в работе [15].

Таким образом, необходимо учитывать силы контактного взаимодействия и характеристики движущегося тела при проведении динамического моделирования упругой балки и твердого тела с целью получения физически реалистичных законов движения тел.

В данной работе рассмотрена задача моделирования динамики твердого тела, движущегося по упругой балке, закрепленной на обоих концах. Схема системы представлена на рисунке 1.



Рис. 1. Схема движения твердого тела по упругой балке, закрепленной на обоих концах

Материалы и методы исследований

В рамках теории Эйлера–Бернулли уравнение изгиба упругой балки с учетом ее веса имеет вид:

$$EJ \frac{d^4 w}{dx^4} + \rho S \frac{d^2 w}{dt^2} = -F_0 \delta[x - (x_C(t) - a)] - F_1 \delta[x - (x_C(t) + b)], \quad (1)$$

где EJ – жесткость балки при изгибе; ρ – плотность материала упругой балки; S – площадь поперечного сечения упругой балки; $w(x, t)$ – прогиб срединной точки балки в точке с координатой x в момент времени t ; a, b – расстояние от центра масс твердого тела до точек A, B ; F_0, F_1 – нормальные реакции опоры в точках A, B ; $\delta(x - x_C) = \begin{cases} 0, & x \neq x_C \\ \infty, & x = x_C \end{cases}$ – дельта-

функция Дирака.

Используя теорему об изменении количества движения твердого тела, уравнения динамики твердого тела можно записать в виде:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x_C}{dt^2} &= F(t) - F_{fr}, \\ m \frac{d^2 y_C}{dt^2} &= -mg + F_0 + F_1, \\ J_C \frac{d^2 \psi}{dt^2} &= F_0 a - F_1 b, \end{aligned} \quad (2)$$

где x_C, y_C – координаты центра масс твердого тела; m и $J_C = m(a+b)^2/12$ – масса и момент инерции твердого тела; g – ускорение свободного падения; F_{fr} – сила контактного трения; $F(t)$ – разгоняющая сила, приводящая твердое тело в движение по упругой балке; ψ – угол поворота твердого тела, обусловленный изгибом упругой балки.

Отметим, что первое уравнение из системы (2) может быть рассмотрено отдельно от остальных. Поэтому сила $F(t)$ может быть подобрана таким образом, чтобы твердое тело двигалось по требуемому (заданному) закону движения $x_C(t)$.

Далее будем учитывать, что твердое тело движется по упругой балке без отрыва. Тогда имеем ограничения на координаты и поворот твердого тела в виде: $y_c = w(x_c(t), t)$ и $\psi = \frac{dw(x_c(t), t)}{dx}$.

Выразим из системы уравнений (2) нормальные реакции опор:

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{1}{a+b} \left[\left(mg + m \frac{d^2 w_c}{dt^2} \right) a - J_c \frac{d^2 \psi}{dt^2} \right], \\ F_0 &= \frac{1}{a+b} \left[\left(mg + m \frac{d^2 w_c}{dt^2} \right) b + J_c \frac{d^2 \psi}{dt^2} \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

Исключая нормальные реакции F_0 , F_1 опоры из уравнения изгиба балки, получим математическую модель динамики системы в виде:

$$\begin{aligned} EJ \frac{d^4 w(x, t)}{dx^4} + \rho S \frac{d^2 w(x, t)}{dt^2} = - \\ - \frac{1}{a+b} \left[m \left(g + \frac{d^2 w(x_c(t), t)}{dt^2} \right) b + J_c \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{dw(x_c(t), t)}{dx} \right) \right] \delta[x - (x_c(t) - a)] - \\ - \frac{1}{a+b} \left[m \left(g + \frac{d^2 w(x_c(t), t)}{dt^2} \right) a - J_c \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{dw(x_c(t), t)}{dx} \right) \right] \delta[x - (x_c(t) + b)]. \end{aligned} \quad (4)$$

Будем искать решение уравнения (4) в следующем виде:

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^N \varphi_i(t) \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right), \quad (5)$$

где L – длина балки; N – количество гармоник; $\varphi_i(t)$ – искомые функции, называемые весовыми коэффициентами. Указанный вид решения удовлетворяет краевым условиям для упругой балки, закрепленной на обоих концах.

Учитывая выражение (5), уравнение (4) получим в виде:

$$\begin{aligned} EJ \left(\frac{\pi}{L} \right)^4 \sum_{i=1}^N i^4 \varphi_i(t) \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) + \rho S \sum_{i=1}^N \frac{d^2 \varphi_i(t)}{dt^2} \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) = - \\ - \frac{m}{a+b} \left(g + \sum_{i=1}^N \frac{d^2 \varphi_i(t)}{dt^2} \sin\left(\frac{i\pi x_c}{L}\right) \right) (b \delta[x - (x_c - a)] + a \delta[x - (x_c + b)]) - \\ - \frac{J_c}{a+b} \left(\frac{\pi}{L} \right) \sum_{i=1}^N i \frac{d^2 \varphi_i(t)}{dt^2} \cos\left(\frac{i\pi x_c}{L}\right) (\delta[x - (x_c - a)] - \delta[x - (x_c + b)]). \end{aligned} \quad (6)$$

Следуя процедуре метода Бубнова–Галёркина [14], получим систему уравнений для весовых коэффициентов в виде:

$$\begin{aligned} EJ \left(\frac{\pi}{L} \right)^4 \frac{L}{2} j^4 \varphi_j + \rho S \frac{L}{2} \frac{d^2 \varphi_j(t)}{dt^2} = - \\ - \frac{mg}{a+b} \left(b \sin\left(\frac{j\pi(x_c - a)}{L}\right) + a \sin\left(\frac{j\pi(x_c + b)}{L}\right) \right) - \\ - \frac{m}{a+b} \left(b \sin\left(\frac{j\pi(x_c - a)}{L}\right) + a \sin\left(\frac{j\pi(x_c + b)}{L}\right) \right) \cdot \sum_{i=1}^N \frac{d^2 \varphi_i(t)}{dt^2} \sin\left(\frac{i\pi x_c}{L}\right) + \\ + \frac{J_c}{a+b} \left(\frac{\pi}{L} \right) \left(\sin\left(\frac{j\pi(x_c + b)}{L}\right) - \sin\left(\frac{j\pi(x_c - a)}{L}\right) \right) \cdot \sum_{i=1}^N i \frac{d^2 \varphi_i(t)}{dt^2} \cos\left(\frac{i\pi x_c}{L}\right). \end{aligned} \quad (7)$$

Полученное обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) i гармоника может быть численно проинтегрировано методами Рунге–Кутты. Для удобства приведем уравнения i -ой гармоники в безразмерном виде:

$$j^4 \varphi_j + \tilde{\varphi}_j'' = -K \left(\frac{b_*}{a_* + b_*} \sin(j\pi V_* \tau - a_*) + \frac{a_*}{a_* + b_*} \sin(j\pi V_* \tau + b_*) \right) - \\ - m_0 \left(\frac{b_*}{a_* + b_*} \sin(j\pi V_* \tau - a_*) + \frac{a_*}{a_* + b_*} \sin(j\pi V_* \tau + b_*) \right) \cdot \sum_{i=1}^n \tilde{\varphi}_i'' \sin(i\pi V_* \tau) + \\ + J_0 (\sin(j\pi V_* \tau + b_*) - \sin(j\pi V_* \tau - a_*)) \cdot \sum_{i=1}^n i \tilde{\varphi}_i'' \cos(i\pi V_* \tau). \quad (8)$$

Здесь введены следующие безразмерные переменные $\tilde{\varphi}_i = \varphi_i / L$, $\tau = \omega_0 t$ и безразмерные параметры:

$$\omega_0^2 = \frac{EJ}{\rho S} \left(\frac{\pi}{L} \right)^4, \quad K = \frac{2mg}{\rho S L^2 \omega_0^2}, \quad m_0 = \frac{2m}{\rho S L}, \quad J_0 = \frac{2J_c}{(a+b)\rho S L} \left(\frac{\pi}{L} \right), \\ V_* = V / (L\omega_0), \quad a_* = a / L, \quad b_* = b / L. \quad (9)$$

Зададим следующие размерные параметры системы:

$$V = 30 \text{ м/с}, \quad E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2, \quad J = 5,2083 \cdot 10^{-7} \text{ м}^4, \\ \rho = 7800 \text{ кг/м}^3, \quad S = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2, \quad a = 0,5 \text{ м}, \quad b = 0,5 \text{ м}. \quad (10)$$

Результаты. Результаты численного моделирования динамики твердого тела при движении вдоль балки получены численным интегрированием ОДУ (8) для первых 5-ти гармоник методом Рунге–Кутты с числовыми значениями (10).

Результаты моделирования представлены на рисунках 2 и 3 для $L = 15$ м.

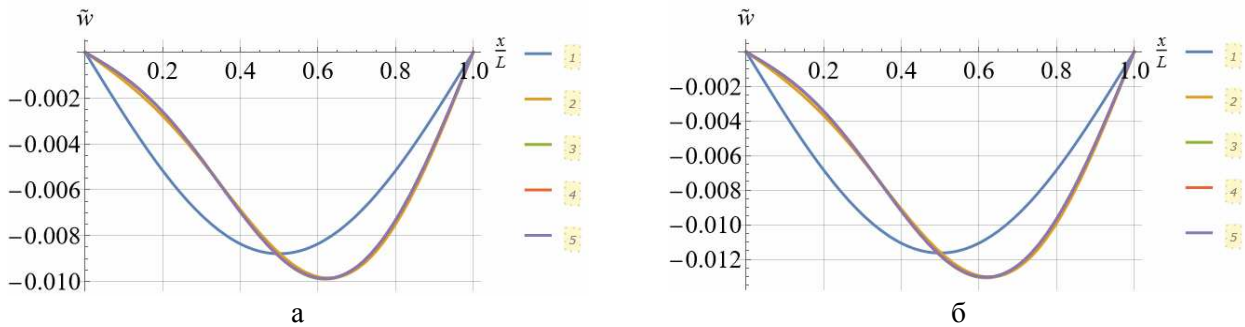


Рис. 2. Зависимости безразмерного прогиба упругой балки $\tilde{w} = w/L$, вычисленного по формуле (5), для весовых коэффициентов, найденных для различных масс твердого тела в конечный момент времени: а) $m = 30$ кг; б) $m = 40$ кг

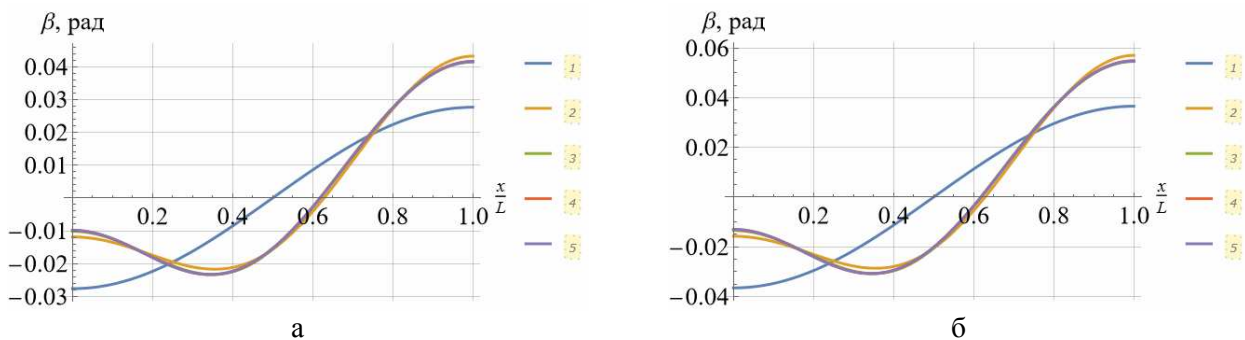


Рис. 3. Зависимости угла поворота $\beta = \frac{\partial w}{\partial x}$ поперечного сечения упругой балки, вычисленного с учетом формулы (5), для весовых коэффициентов, найденных для различных масс твердого тела в конечный момент времени: а) $m = 30$ кг; б) $m = 40$ кг

Согласно результатам моделирования (рис. 2 и 3), можно отметить, что прогиб всех точек упругой балки и угол поворота поперечного сечения растет по величине с увеличением массы твердого тела. При этом можно заметить, что учет в приближенном решении (5) гармоник выше 2-го порядка несущественно влияет на зависимость прогиба упругой балки.

Результаты моделирования представлены на рисунках 4 и 5 для $L = 20$ м.

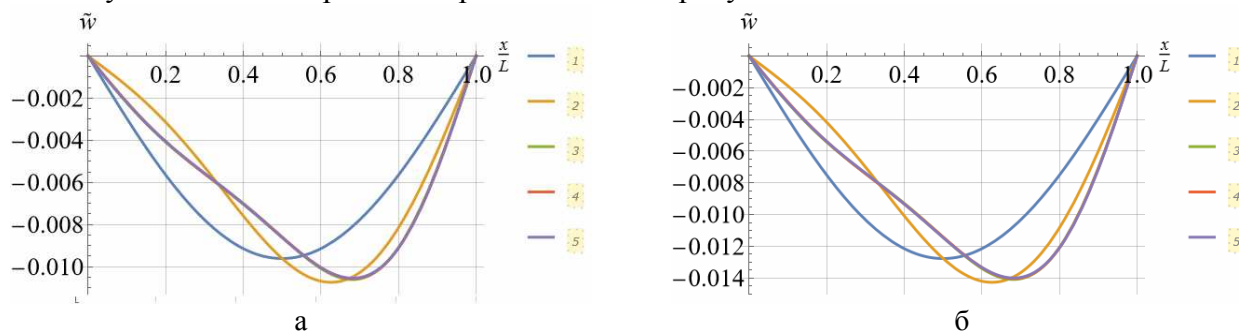


Рис. 4. Зависимости безразмерного прогиба упругой балки $\tilde{w} = w/L$, вычисленного по формуле (5), для весовых коэффициентов, найденных для различных масс твердого тела в конечный момент времени: а) $m = 30$ кг; б) $m = 40$ кг

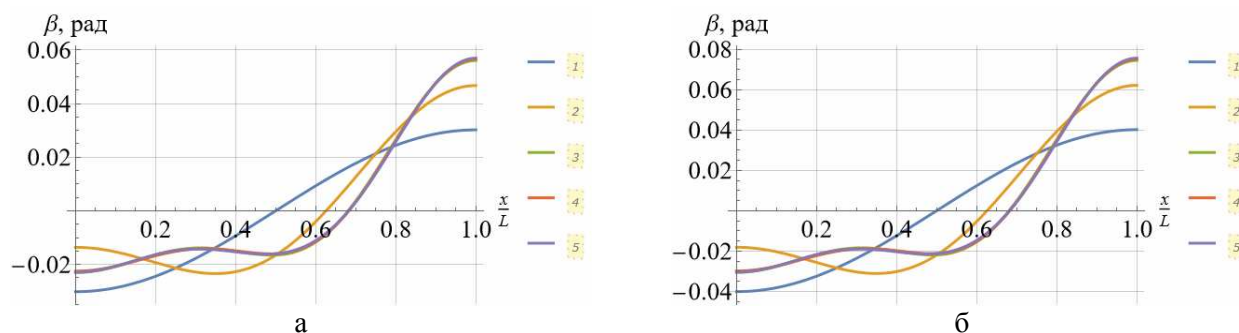


Рис. 5. Зависимости угла поворота $\beta = \frac{\partial w}{\partial x}$ поперечного сечения упругой балки, вычисленного с учетом формулы (5), для весовых коэффициентов, найденных для различных масс твердого тела в конечный момент времени: а) $m = 30$ кг; б) $m = 40$ кг

Согласно результатам моделирования (рис. 4 и 5), можно отметить, что вывод о влиянии массы твердого тела на величины прогиба и угла поворота поперечного сечения балки остаются справедливыми. При этом можно заметить, что учет в приближенном решении (5) гармоник выше 3-го порядка несущественно влияет на зависимость прогиба упругой балки.

Таким образом, можно сделать вывод о том, что при увеличении длины упругой балки в приближенном решении для прогиба точек балки необходимо учитывать больше гармоник.

Выводы. На основании результатов работы были получена система ОДУ относительно весовых коэффициентов разложения функции прогиба по гармоническим функциям для задачи динамики системы «твердое тело – упругая балка» и при рассмотрении двухточечного контакта. Численное интегрирование уравнений позволило оценить форму колебаний, вызванных воздействием твердого тела, движущегося по упругой балке. Результаты работы позволяют определить влияние массы твердого тела и длины упругой балки на величины прогиба точек балки. Более того, результаты численного моделирования показали, что для получения достаточно точной формы прогиба количество рассматриваемых гармоник приближенного решения функции прогиба должно зависеть от длины упругой балки.

Заключение

В данной работе построена математическая модель динамики твердого тела, движущегося по упругой балке при наличии двух точек их соприкосновения. Построенная

математическая модель имеет форму системы дифференциальных уравнений с частными производными. Применяв метод Бубнова–Галёркина, математическая модель была приведена к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. По результатам численного интегрирования ОДУ получены зависимости прогиба и угла поворота поперечного сечения упругой балки от времени для различных масс твердого тела и длин упругой балки. В отличие от ранее используемых математических моделей, разработанная модель позволяет учесть влияние силового воздействия подвижного твердого тела на изгиб упругой балки.

Результаты работы позволили определить влияние массы твердого тела и длины упругой балки на величины прогиба точек балки. Более того, результаты численного моделирования показали, что для получения достаточно точной формы прогиба количество рассматриваемых гармоник приближенного решения функции прогиба должно зависеть от длины упругой балки.

Список литературы

1. Ivanchenko I.I., Shapovalov S.N. The development of models for high-speed railway track dynamics // The Proceedings of International Symposium on Speed-up, Safety and Service Technology for Railway and Maglev Systems 2009 (STECH'09). – Niigata, Japan: JSME, 2009. – P. 1-7. doi.org/10.1299/jsmestech.2009._352225-1_.
2. Ivanchenko, I.I., Shapovalov S.N. Design of composite, long structures modeling railway tracks for moving loads // EUROMECH Colloquium 484 "Wave mechanics and stability of long flexible structures subject to moving loads and flows". – Netherlands: TU Delft, 2006. – P. 30-31.
3. Klasztorny M., Myslecki K., Machelski C., Podworna M. Dynamic analysis of a series-of-types of steel beam bridges loaded by a Shinkansen train moving at high speeds // 5th European Conference on Structural Dynamics. EURODYN'2002. – Munich, Germany, 2002. – P. 1179-1184.
4. Metrikine A.V., Popp K. Vibration of a periodically supported beam on an elastic half-space // European Journal of Mechanics A. Solids. 1999, vol. 18, no. 4, pp. 679-701.
5. Zoller V., Zobory I. Analysis of railway track dynamics by using Winkler model with initial geometrical irregularity // Proceedings of the 7th Conference on Vehicle System Dynamics, Identification and Anomalies, VSDIA 2000. – Budapest, Hungary: Budapest University of Technology and Economics, 2000. – P. 113-118.
6. Кадисов Г.М. Колебания складчатых систем при подвижных нагрузках: Автореф. дисс. ... докт. техн. наук. – М.: МИИТ, 1998. – 38 с.
7. Дерендяев Н.В., Солдатов И.Н. О движении точечной массы вдоль колеблющейся струны // Прикладная математика и механика. – 1997. – Т. 61, № 4. – С. 703-705.
8. Каплунов Ю.Д., Муравский Г.Б. Действие равнопеременно движущейся силы на балку Тимошенко, лежащую на упругом основании. Переходы через критические скорости // Прикладная математика и механика. – 1987. – Т. 51, № 3. – С. 475-482.
9. Lu T., Metrikine A.V., Steenbergen M.J.M.M. The equivalent dynamic stiffness of a visco-elastic half-space in interaction with a periodically supported beam under a moving load // European Journal of Mechanics A. Solids. 2020, vol. 84, p. 104065. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2020.104065.
10. Колесов Д.А. Волны в одномерных распределенных механических системах, взаимодействующих с упруго-инерционными и неоднородными основаниями: Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. – Нижний Новгород: Институт проблем машиностроения РАН, 2019. – 133 с.
11. Леонтьев Е.В. К вопросу о поперечных колебаниях балок на упругом основании при изменении условий опирания // Безопасность зданий и сооружений. – 2020. – Т. 91, № 5 – С. 70-76. – DOI: 10.33979/2073-7416-2020-91-5-70-77.
12. Курбацкий Е.Н., Зернов И.И., Бадина Е.С. Применение обобщённых функций и интегрального преобразования Фурье при моделировании воздействия подвижной нагрузки на балку, лежащую на упругом основании // Транспортные сооружения. – 2023. – Т. 10, № 3. – doi.org/10.15862/05SATS323.
13. Герасимов С.И., Ерофеев В.И., Колесов Д.А., Лисенкова Е.Е. Динамика деформируемых систем, несущих движущиеся нагрузки (обзор публикаций и диссертационных исследований) // Вестник научно-технического развития. – 2021 – № 160. – С. 25-47. – DOI: 10.18411/vntr2021-160-3.
14. Афендикова Н.Г. История метода Галёркина и его роль в творчестве М.В.Келдыша // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. – 2014. – № 77. – <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-77>.
15. Радковский С.А., Трунаев А.М., Пойманов В.Д. Моделирование колебаний железнодорожного рельса при воздействии на него подвижной вертикальной динамической нагрузки // Сборник научных трудов Донецкого института железнодорожного транспорта. – Донецк: ДОНИЖТ, 2016. – № 43. – С. 4-9.

References

1. Ivanchenko I.I., Shapovalov S.N. The development of models for high-speed railway track dynamics // The Proceedings of International Symposium on Speed-up, Safety and Service Technology for Railway and Maglev Systems 2009 (STECH'09). – Niigata, Japan: JSME, 2009. – P. 1-7. doi.org/10.1299/jsmestech.2009._352225-1_.

2. Ivanchenko, I.I., Shapovalov S.N. Design of composite, long structures modeling railway tracks for moving loads // EUROMECH Colloquium 484 "Wave mechanics and stability of long flexible structures subject to moving loads and flows". – Netherlands: TU Delft, 2006. – P. 30-31.
3. Klasztorny M., Myslecki K., Machelski C., Podworna M. Dynamic analysis of a series-of-types of steel beam bridges loaded by a Shinkansen train moving at high speeds // 5th European Conference on Structural Dynamics. EUROODYN'2002. – Munich, Germany, 2002. – P. 1179-1184.
4. Metrikine A.V., Popp K. Vibration of a periodically supported beam on an elastic half-space // European Journal of Mechanics A. Solids. 1999, vol. 18, no. 4, pp. 679-701.
5. Zoller V., Zobory I. Analysis of railway track dynamics by using Winkler model with initial geometrical irregularity // Proceedings of the 7th Conference on Vehicle System Dynamics, Identification and Anomalies, VSDIA 2000. – Budapest, Hungary: Budapest University of Technology and Economics, 2000. – P. 113-118.
6. Kadisov G.M. Vibrations of folded systems under moving loads: Abstract of the diss. ... doct. of tech. sc. – M.: MIIT, 1998. – 38 p.
7. Derendyaev N.V., Soldatov I.N. On the motion of a point mass along an oscillating string // Applied Mathematics and Mechanics. 1997, vol. 61, no. 4, pp. 703-705.
8. Kaplunov. U.D., Muravsky G.B. The action of an equally alternating moving force on the Timoshenko beam lying on an elastic base. Transitions through critical speeds // Applied Mathematics and Mechanics. 1987, vol. 51, no. 3, pp. 475-482.
9. Lu T., Metrikine A.V., Steenbergen M.J.M.M. The equivalent dynamic stiffness of a visco-elastic half-space in interaction with a periodically supported beam under a moving load // European Journal of Mechanics A. Solids. 2020, vol. 84, p. 104065. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2020.104065.
10. Erofeev V.I. Waves in one-dimensional distributed mechanical systems interacting with elastic-inertial and heterogeneous foundations: Diss. ... cand. of phys. and math. sc. – Nizhny Novgorod: Institute of Mechanical Engineering Problems of the RAS, 2019. – 133 p.
11. Leontiev E.V. Lateral vibrations of beams on an elastic base at changing the supporting conditions // Safety of Buildings and Structures. 2020, vol. 91, no. 5, pp. 70-76. DOI: 10.33979/2073-7416-2020-91-5-70-77.
12. Kurbatsky E.N., Zernov I.I., Badina E.S. Application of generalised functions and Fourier's integral transformation in modelling the effect of a moving load on a beam resting on an elastic foundation // Transport Engineering. 2023, vol. 10, no. 3. doi.org/10.15862/05SATS323.
13. Gerasimov S.I., Erofeev V.I., Kolesov D.A., Lisenkova E.E. Dynamics of deformable systems bearing moving loads (review of publications and dissertation research) // Bulletin of Scientific and Technical Development. 2021, no. 160, pp. 25-47. DOI: 10.18411/vntr2021-160-3.
14. Afendikova N.G. The history of Galerkin's method and its role in M.V. Keldysh work // Preprints of the IPM named after M.V. Keldysh. 2014, no. 77. <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-77>.
15. Radkovsky S.A., Trunaev A.M., Poymanov V.D. Modeling of railway rail vibrations under the influence of a moving vertical dynamic load on it // Collection of Scientific Papers of the Donetsk Institute of Railway Transport. – Donetsk: DONIZHT, 2016. – No. 43. – P. 4-9.

Сведения об авторах:

Information about authors:

Меркурьев Игорь Владимирович – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой Робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин	Merkuryev Igor Vladimirovich – doctor of technical sciences, professor, head of the Department of robotics, mechatronics, dynamics and strength of machines
Наим Муханнад – аспирант	Naim Muhannad – postgraduate student
Сайпулаев Муса Русланович – кандидат технических наук, доцент кафедры Робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин alisamdoaaa@gmail.com	Saypulaev Musa Ruslanovich – Candidate of Technical Sciences and Senior Lecturer of Department of Robotics, Mechatronics, Dynamics and Machine Strength

Получена 28.12.2024