

НЕГОЛОНОМНАЯ КИНЕМАТИКА МОБИЛЬНОЙ ОМНИ-ПЛАТФОРМЫ, БАЛАНСИРУЮЩЕЙ НА СФЕРИЧЕСКОМ КОЛЕСЕ

*Сайпулаев Г.Р., Сайпулаев М.Р., Семенякина Е.С., Снегирев И.С., Демидов А.А.
Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва*

Ключевые слова: всенаправленная платформа, кинематика, неголономные связи, омни-колесо, сферическое колесо, омни-платформа.

Аннотация. В рамках данной работы ставится задача математического моделирования пространственной кинематики омни-платформы, балансирующей на сферическом колесе. Рассматривается конструкция платформы с тремя омни-колесами, симметрично расположенными на окружности. Используются уравнения неголономных связей, выражающих условия отсутствия проскальзывания точек контакта соприкасающихся тел. Из уравнений неголономных связей получены выражения для угловых скоростей омни-колес при пространственном движении платформы, балансирующей на сферическом колесе. В частном случае движения сферического колеса робота по горизонтальной поверхности при расположении платформы в верхнем положении равновесия получены уравнения прямой и обратной кинематики, связывающие угловые скорости омни-колес с линейными скоростями сферического колеса и угловой скоростью омни-платформы. По результатам численных расчетов сделан вывод о том, что для обеспечения платформы робота возможностью перемещаться с линейными скоростями до 1 м/с и вращаться с угловой скоростью до 1 рад/с достаточно, чтобы выходные валы двигателей каждого омни-колеса развивали угловые скорости вращения до 11 рад/с. Полученная кинематическая модель робота может быть использованы при построении управления движением омни-платформой, балансирующей на сферическом колесе, на кинематическом уровне.

NONHOLONOMIC KINEMATICS OF A MOBILE OMNI-PLATFORM BALANCING ON A SPHERICAL WHEEL

*Saypulaev G.R., Saypulaev M.R., Semenyakina E.S., Snegirev I.S., Demidov A.A.
National Research University "Moscow Power Engineering Institute", Moscow*

Keywords: omnidirectional platform, kinematics, nonholonomic constraints, omni-wheel, spherical wheel, omni-platform.

Abstract. In this paper, we solve the task of mathematical modeling the spatial kinematics of an omni-platform balancing on a spherical wheel. The design of a platform with three omni-wheels, symmetrically located on a circle, is being considered. Equations of nonholonomic constraints are used, expressing the conditions for the non-slippage of the contact points of interacting bodies. From the equations of nonholonomic constraints, expressions are obtained for the angular velocities of omni-wheels during the spatial motion of a platform balancing on a spherical wheel. In the particular case of motion of a robot's spherical wheel on a horizontal surface with the platform in the upper equilibrium position, equations of forward and inverse kinematics were obtained that describe the dependencies the angular velocities of the omni-wheels with the linear velocities of the spherical wheel and the angular velocity of the omni-platform. Based on the results of numerical calculations, it was concluded that in order to provide the robot platform with the ability to move at linear speeds of up to 1 m/s and rotate at an angular speed of up to 1 rad/s, it is sufficient that the output shafts of the motors of each omni-wheel rotate with angular speeds up to 11 rad/s. The resulting kinematic model of the robot can be used to develop motion control for an omni-platform balancing on a spherical wheel at the kinematic level.

Введение

В настоящее время исследование динамики и разработка систем управления движением для мобильных роботов, способных осуществлять движение в любом направлении с заданной ориентацией представляет большой научный и практический интерес [1-4]. Актуальность исследований роботов всенаправленного движения обусловлена возможностью их широкого применения в сфере складской логистики, образовательной и промышленной областях человеческой деятельности и других приложениях.

Одним из способов получения возможности всенаправленного движения является оснащения платформы омни-колесами [5] (см. рис. 1). Платформы, оснащенные омни-колесами, называют омни-платформами [6].

Мобильная омни-платформа, балансирующая на сферическом колесе, в совокупности составляют, так называемый, Ballbot (шаробот), который является электромеханической системой с недостатком управлений (underactuated system) (см. рис. 1, а). Несмотря на то, что такой робот является статически неустойчивым, с помощью разработки многоуровневой системы управления этот высокоманевренный робот способен поддерживать вертикальное положение равновесия и совершать всенаправленное движение.



Рис. 1. Робот, состоящий из платформы с омни-колесами, балансирующей на сферическом колесе: а) пример робота; б) омни-колесо

Для построения многоуровневой системы управления одно из ключевых значений имеет построение детальной математической модели движения шаробота.

Ввиду сложности системы уравнения движения часто получают энергетическим методом Лагранжа, которые имеют вид системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Указанная система уравнений, часто численно линеаризуются для малых возмущений [7,8].

В работе [9] исследуется пространственная динамика шаробота. Для описания модели движения через физические параметры системы (не прибегая к численному решению) используется формализм Ньютона-Эйлера и углы Тейта-Брайана.

В статьях [10,11] представлена конструкция прототипа и схема управления шаробота. Для улучшения производительности отслеживания траектории движения шаробота было предложено управление, полученное из решения линейно-квадратичной задачи оптимального управления. Представленное управление обеспечивает балансирование омни-платформы на сферическом колесе, а также перемещения шаробота.

В статье [12] представлено компьютерное моделирование движения шаробота, реализованное с использованием языка программирования Python, в виде среды Gymnasium. Основная цель работы заключалась в облегчении применения техник машинного обучения с подкреплением для нахождения эффективного управления системой шаробота.

Зачастую, взаимодействие робота с человеком происходит за счёт механического манипулятора, который придает шароботу новые преимущества, такие как возможность захвата и управления объектами. При этом исследование пространственной динамики осложняется из-за увеличения числа степеней свободы. В работе [13] с помощью энергетического метода Лагранжа рассматривается динамика системы шаробот-манипулятор, аналогичная роботу Festo (<https://www.genesis-design.de/work/festo-ballbot/>).

В рамках данной работы ставится задача описания пространственной кинематики мобильного робота, представленного омни-платформой, балансирующей на сферическом колесе. С использованием матриц направляющих косинусов и уравнений неголономных связей, описывающих условия непроскальзывания точек контакта взаимодействующих тел системы, выводится математическая модель кинематики движения шаробота.

Материалы и методы исследований. Перед описанием кинематики шаробота было построена его трехмерная модель (см. рис. 2) в системе автоматического проектирования SolidWorks.

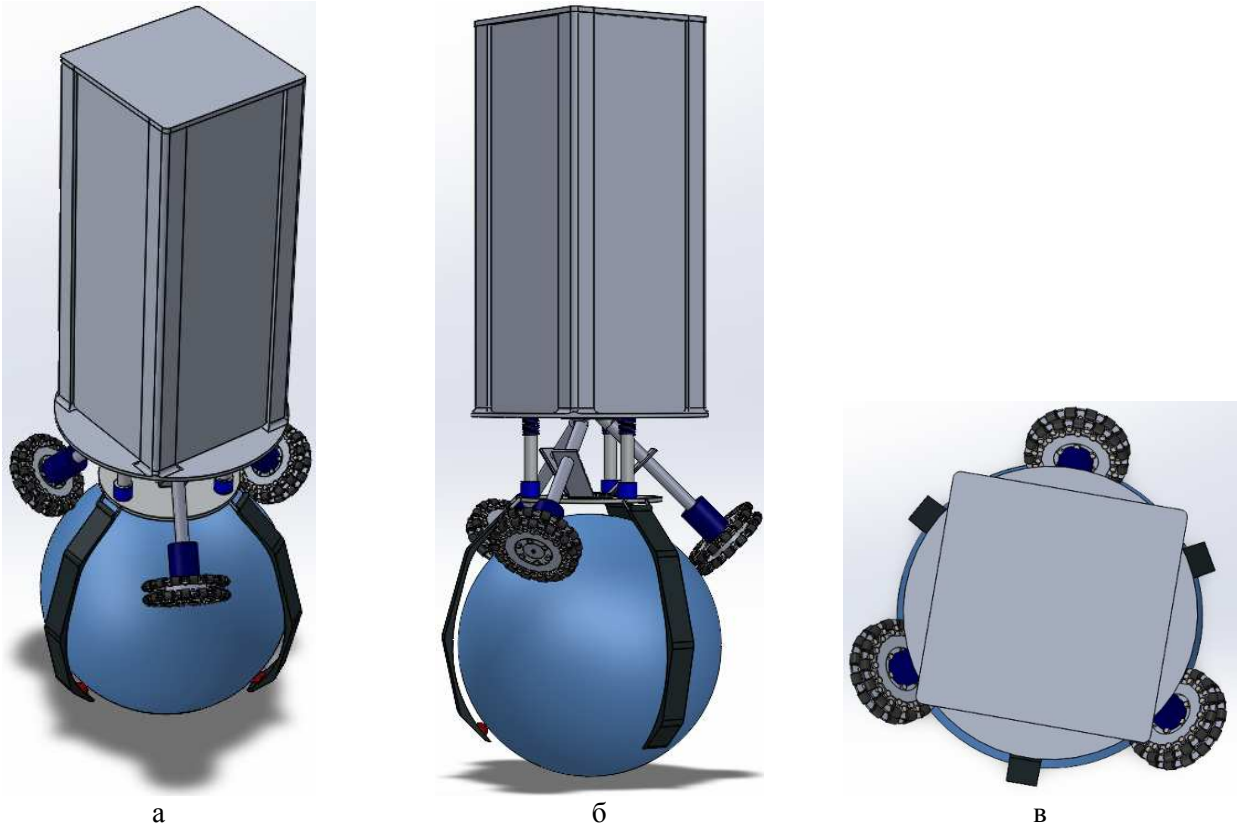


Рис. 2. Компьютерная 3D модель трехколесной омни-платформы, балансирующей на сферической оболочке: а) общий вид; б) вид сбоку; в) вид сверху

Кинематическая схема мобильного робота представлена на рисунке 3.

Для описания кинематики робота вводятся следующие системы координат (СК): xyz – неподвижная СК; $Ox_p Y_p Z_p$ – СК, связанная с омни-платформой. Проекции произвольного вектора \mathbf{a} на указанные СК связаны соотношениями:

$$\mathbf{a}^{(p)} = \Gamma_1(\gamma)\Gamma_2(\theta)\Gamma_3(\psi)\mathbf{a}^{(0)}, \quad (1)$$

где верхний индекс указывает систему координат, на которые спроецирован произвольный вектор \mathbf{a} (« p » соответствует СК $Ox_p Y_p Z_p$; « 0 » соответствует СК xyz); ψ , θ , γ – углы курса, тангажа и крена для омни-платформы; а матрицы поворота на произвольный угол x вокруг заданной оси (номер оси указан в нижнем индексе) имеют вид:

$$\Gamma_1(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \end{pmatrix}, \Gamma_2(x) = \begin{pmatrix} \cos x & 0 & -\sin x \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin x & 0 & \cos x \end{pmatrix}, \Gamma_3(x) = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x & 0 \\ -\sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Здесь используются сокращения для тригонометрических функций: $s x = \sin x$, $c x = \cos x$. Далее для краткости обозначим $\Gamma_{op} = \Gamma_2(\gamma)\Gamma_1(\theta)\Gamma_3(\psi)$ – матрица направляющих косинусов для перепроектирования векторов из СК xyz в СК $Ox_p Y_p Z_p$.

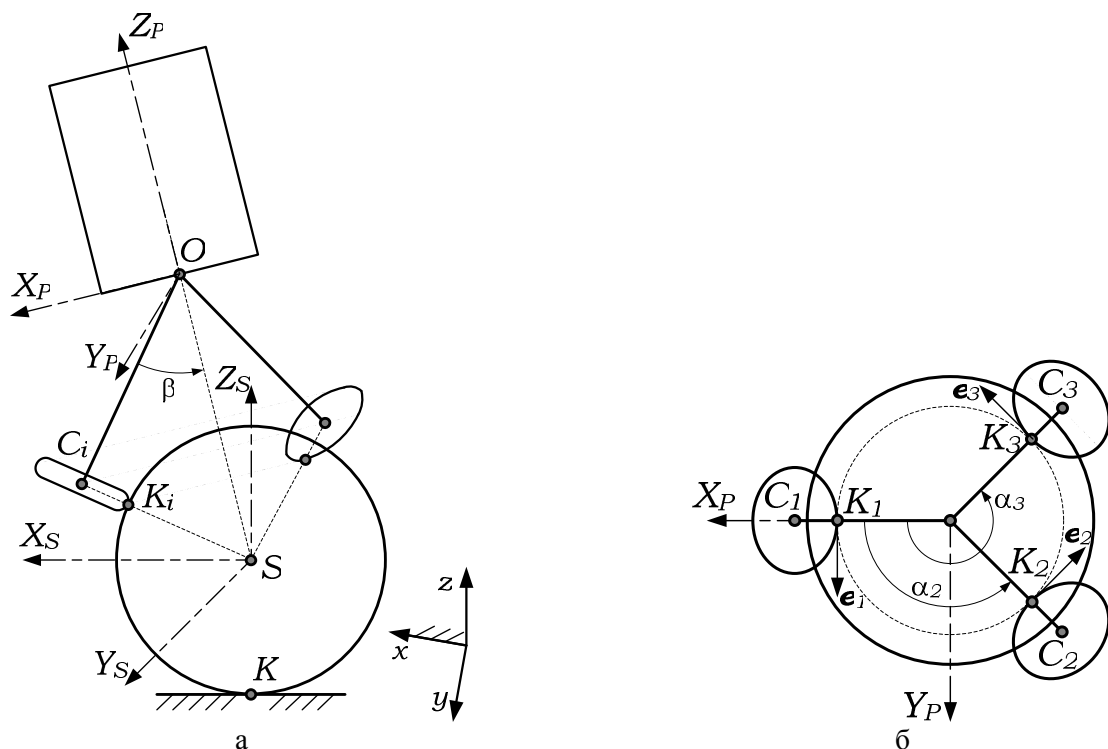


Рис. 3. Кинематическая схема трехколесной омни-платформы, балансирующей на сферической оболочке: а) вид сбоку; б) вид сверху

На кинематической схеме (рис. 3) введены следующие обозначения: O – точка платформы, в которой пересекаются оси трех омни-колес; S – геометрический центр сферического колеса; C_i – геометрический центр i -го омни-колеса; K_i – точка контакта i -го омни-колеса со сферическим колесом; K – точка контакта сферического колеса с опорной поверхностью.

Конфигурация омни-колес описывается следующими параметрами: $\beta = \angle(OC_i, OS)$ – угол, характеризующий направление оси i -го омни-колеса относительно вертикальной оси симметрии платформы OZ_p ; $\alpha_i = \angle(OC_i, OX_p)$ – угол, характеризующий направление оси i -го омни-колеса относительно горизонтальной оси платформы OX_p ; e_i – единичный вектор направления ролика i -го омни-колеса, контактирующего со сферической оболочкой.

При выводе уравнений кинематики используются следующие допущения:

– используется упрощенная модель омни-колеса [14], в которой колесо моделируется диском, точка контакта которого может проскальзывать в направлении перпендикулярном оси контактирующего ролика;

– оси омни-колес перпендикулярны вектору, связывающему геометрический центр сферического колеса с геометрическими центрами омни-колес, т.е. $\angle(OC_i, SC_i) = 90^\circ$.

В качестве основы для составления кинематических уравнений, связывающих угловые скорости омни-колес со скоростями платформы и сферической оболочки, будем использовать векторное уравнение, отвечающим условиям непроскальзывания точек контакта роликов омни-колес относительно сферической оболочки в проекциях на оси роликов. Указанное уравнение можно представить в виде:

$$(\mathbf{V}_{Kip}^{(p)} - \mathbf{V}_{Kis}^{(p)}, \mathbf{e}_i^{(p)}) = 0, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3)$$

где $\mathbf{e}_i^{(p)} = (s \alpha_i \quad c \alpha_i \quad 0)^T$ – вектор оси контактирующего ролика i -го омни-колеса в проекциях на оси СК $OX_p Y_p Z_p$; а векторы скоростей точки K_i , как точки принадлежащей омни-колесу $\mathbf{V}_{Kip}^{(p)}$ и как точки принадлежащей сферическому колесу $\mathbf{V}_{Kis}^{(p)}$, определяются из соотношений:

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_{Kip}^{(p)} &= \mathbf{V}_O^{(p)} + \boldsymbol{\omega}_P^{(p)} \times (\mathbf{r}_{OCi}^{(p)} + \mathbf{r}_{CiKi}^{(p)}) + \dot{\phi}_i \mathbf{e}_{wi}^{(p)} \times \mathbf{r}_{CiKi}^{(p)}, \\ \mathbf{V}_{Kis}^{(p)} &= \Gamma_{op} \mathbf{V}_S^{(0)} + (\Gamma_{op} \boldsymbol{\omega}_S^{(0)}) \times \mathbf{r}_{SKi}^{(p)},\end{aligned}\quad (4)$$

где $\mathbf{V}_O^{(p)}$ – вектор абсолютной скорости точки O ; $\mathbf{V}_S^{(0)} = (\dot{x}_S \quad \dot{y}_S \quad \dot{z}_S)^T$ – вектор абсолютной скорости центра сферической оболочки; $\boldsymbol{\omega}_P^{(p)}$ и $\boldsymbol{\omega}_S^{(0)}$ – векторы абсолютных угловых скоростей омни-платформы и сферической оболочки; $\dot{\phi}_i$ – угловая скорость вращения омни-колеса вокруг собственной оси вращения, задаваемой вектором $\mathbf{e}_{wi}^{(p)}$; $\mathbf{r}_O^{(p)}$ – радиус-вектор точки O относительно начала неподвижной СК; $\mathbf{r}_{OCi}^{(p)}, \mathbf{r}_{CiKi}^{(p)}$ – радиус-векторы соединяющие точки O и геометрические центры омни-колес, а также радиус-векторы соединяющие геометрический центры омни-колес и точки контакта омни-колес со сферической оболочкой. Здесь и далее точкой над переменной обозначена производная по времени.

Учитывая, что поворот СК $OX_p Y_p Z_p$ платформы робота осуществляется при его движении по сферической оболочке, а расстояние между точками O и S не изменяется (колеса платформа робота безотрывно контактирует со сферической оболочкой, что обеспечивается конструкцией шаробота), будет справедливо соотношение:

$$\mathbf{V}_O^{(p)} = \Gamma_{op} \mathbf{V}_S^{(0)} + \boldsymbol{\omega}_P^{(p)} \times \mathbf{r}_{SO}^{(p)}, \quad (5)$$

где $\mathbf{r}_{SO}^{(p)} = \frac{R_S + R_w}{\sin \beta} \cdot (0 \quad 0 \quad 1)^T$ – радиус-вектор, соединяющий точки O и S ; R_S, R_w – радиусы сферического колеса и омни-колеса.

После подстановки выражений (4) и (5) в уравнение (3) получим:

$$\left(\boldsymbol{\omega}_P^{(p)} \times \mathbf{r}_{SO}^{(p)} + \boldsymbol{\omega}_P^{(p)} \times (\mathbf{r}_{OCi}^{(p)} + \mathbf{r}_{CiKi}^{(p)}) + \dot{\phi}_i \mathbf{e}_{wi}^{(p)} \times \mathbf{r}_{CiKi}^{(p)} - (\Gamma_{op} \boldsymbol{\omega}_S^{(0)}) \times \mathbf{r}_{SKi}^{(p)}, \mathbf{e}_i^{(p)} \right) = 0, \quad (6)$$

или
$$\left((\boldsymbol{\omega}_P^{(p)} - \Gamma_{op} \boldsymbol{\omega}_S^{(0)}) \times \mathbf{r}_{SKi}^{(p)} + \dot{\phi}_i \mathbf{e}_{wi}^{(p)} \times \mathbf{r}_{CiKi}^{(p)}, \mathbf{e}_i^{(p)} \right) = 0. \quad (7)$$

где $\mathbf{r}_{SKi}^{(p)} = \mathbf{r}_{SO}^{(p)} + \mathbf{r}_{OCi}^{(p)} + \mathbf{r}_{CiKi}^{(p)}$ – радиус-вектор, соединяющий геометрический центр сферического колеса с точкой контакта i -го омни-колеса со сферическим колесом.

Из кинематической схемы (рис. 3) и введенных выше обозначений запишем соотношения для векторов, входящих в уравнение (7):

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}_P^{(p)} &= (\dot{\gamma} - \dot{\psi} \sin \theta \quad \dot{\theta} \cos \gamma + \dot{\psi} \cos \theta \sin \gamma \quad \dot{\psi} \cos \theta \cos \gamma - \dot{\theta} \sin \gamma)^T, \\ \boldsymbol{\omega}_S^{(0)} &= (\omega_{Sx} \quad \omega_{Sy} \quad \omega_{Sz})^T, \\ \mathbf{r}_{SKi}^{(p)} &= R_S \cdot (\cos \beta \cos \alpha_i \quad \cos \beta \sin \alpha_i \quad \sin \beta)^T, \\ \mathbf{r}_{CiKi}^{(p)} &= -R_w \cdot (\cos \beta \cos \alpha_i \quad \cos \beta \sin \alpha_i \quad \sin \beta)^T, \\ \mathbf{e}_{wi}^{(p)} &= (\sin \beta \cos \alpha_i \quad \sin \beta \sin \alpha_i \quad -\cos \beta)^T, \\ \mathbf{e}_i^{(p)} &= (-\sin \alpha_i \quad \cos \alpha_i \quad 0)^T.\end{aligned}\quad (8)$$

С учетом (8) получим уравнения (7) в форме:

$$R_S (\omega_{PSz} \cos \beta - \omega_{PSy} \sin \beta \sin \alpha_i - \omega_{PSx} \sin \beta \cos \alpha_i) + R_w \dot{\phi}_i = 0, \quad (9)$$

где для краткости $\omega_{PSx}, \omega_{PSy}, \omega_{PSz}$ обозначены проекции на СК $OX_p Y_p Z_p$ вектора относительной угловой скорости платформы, вычисляемого по формуле:

$$\boldsymbol{\omega}_{PS}^{(p)} = \boldsymbol{\omega}_P^{(p)} - \Gamma_{op} \boldsymbol{\omega}_S^{(0)}. \quad (10)$$

В дополнение к полученным кинематическим уравнениям запишем уравнения неголономных связей, отвечающих условиям непроскальзывания точки контакт сферического колеса с опорной поверхностью:

$$\dot{x}_s = R_s \omega_{sy}, \quad \dot{y}_s = -R_s \omega_{sx}. \quad (11)$$

и уравнение голономной связи, отвечающей условию безотрывного движения по горизонтальной поверхности:

$$\dot{z}_s = 0. \quad (12)$$

Таким образом, математическая модель неголономной кинематики робота, балансирующего на сферическом колесе, описывается системой уравнений (5), (9)-(12):

$$\begin{aligned} \omega_p^{(0)} &= (\dot{\gamma} \cos \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \quad \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\gamma} \cos \theta \sin \psi \quad \dot{\psi} - \dot{\gamma} \sin \theta)^T, \\ \dot{x}_o &= \dot{x}_s + \left(\frac{R_s + R_w}{\sin \beta} \right) [\dot{\theta} c \gamma c \theta c \psi + \dot{\gamma} (c \gamma s \psi - s \gamma s \theta c \psi) + \dot{\psi} (s \gamma c \psi - c \gamma s \theta s \psi)], \\ \dot{y}_o &= \dot{y}_s + \left(\frac{R_s + R_w}{\sin \beta} \right) [\dot{\theta} c \gamma c \theta s \psi - \dot{\gamma} (c \gamma c \psi + s \gamma s \theta s \psi) + \dot{\psi} (s \gamma s \psi + c \gamma s \theta c \psi)], \\ \dot{z}_o &= \dot{z}_s - \left(\frac{R_s + R_w}{\sin \beta} \right) (\dot{\theta} c \gamma s \theta + \dot{\gamma} s \gamma c \theta), \\ \dot{x}_s &= R_s \omega_{sy}, \quad \dot{y}_s = -R_s \omega_{sx}, \quad \dot{z}_s = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \phi_i &= \frac{R_s}{R_w} (-\omega_{ps_z} \cos \beta + \omega_{ps_y} \sin \beta \sin \alpha_i + \omega_{ps_x} \sin \beta \cos \alpha_i), \\ \omega_{ps_x} &= \dot{\gamma} - \dot{\psi} s \theta - (\omega_{sx} c \theta c \psi + \omega_{sy} c \theta s \psi - \omega_{sz} s \theta), \\ \omega_{ps_y} &= \dot{\theta} c \gamma + \dot{\psi} c \theta s \gamma - [\omega_{sx} (s \gamma s \theta c \psi - c \gamma s \psi) + \omega_{sy} (c \gamma c \psi + s \gamma s \theta s \psi) + \omega_{sz} s \gamma c \theta], \\ \omega_{ps_z} &= \dot{\psi} c \theta c \gamma - \dot{\theta} s \gamma - [\omega_{sx} (c \gamma s \theta c \psi + s \gamma s \psi) + \omega_{sy} (c \gamma s \theta s \psi - s \gamma c \psi) + \omega_{sz} c \gamma c \theta]. \end{aligned}$$

Или, исключая проекции угловой скорости сферического колеса на горизонтальные оси, последние три уравнения из системы (13) можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \omega_{ps_x} &= \dot{\gamma} - \dot{\psi} s \theta - \left(-\frac{\dot{y}_s}{R_s} c \theta c \psi + \frac{\dot{x}_s}{R_s} c \theta s \psi - \omega_{sz} s \theta \right), \\ \omega_{ps_y} &= \dot{\theta} c \gamma + \dot{\psi} c \theta s \gamma - \left[-\frac{\dot{y}_s}{R_s} (s \gamma s \theta c \psi - c \gamma s \psi) + \frac{\dot{x}_s}{R_s} (c \gamma c \psi + s \gamma s \theta s \psi) + \omega_{sz} s \gamma c \theta \right], \\ \omega_{ps_z} &= \dot{\psi} c \theta c \gamma - \dot{\theta} s \gamma - \left[-\frac{\dot{y}_s}{R_s} (c \gamma s \theta c \psi + s \gamma s \psi) + \frac{\dot{x}_s}{R_s} (c \gamma s \theta s \psi - s \gamma c \psi) + \omega_{sz} c \gamma c \theta \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

Результаты. Для построения системы управления на кинематическом уровне, вычислим угловые скорости омни-колес. Будем задавать законы изменения линейных координат сферической оболочки и законы изменения углов ориентации платформы. При вычислении угловых скоростей омни-колес будем полагать, что сферическое колесо взаимодействуют с опорной поверхностью в рамках модели качения шара без верчения [15], т.е. $\omega_{sz} = 0$.

Далее при численных расчетах будем использовать числовые значения геометрических параметров шаробота, полученные для 3D модели (рис. 2), построенной в SolidWorks:

$$R_s = 0,2 \text{ м}, \quad R_w = 0,0664 \text{ м}, \quad \beta = 45^\circ, \quad \alpha_1 = 0^\circ, \quad \alpha_2 = 120^\circ, \quad \alpha_3 = 240^\circ. \quad (15)$$

Рассмотрим частные случаи движения омни-платформы, балансирующей на сферическом колесе. Ограничимся такими движениями, при которых омни-платформа сохраняет верхнее неустойчивое положение равновесия (т.е. $\theta(t) = 0$, $\gamma(t) = 0$). Для указанного типа движений:

$$\begin{aligned} \omega_p^{(0)} &= (0 \quad 0 \quad \dot{\psi})^T, \quad \dot{x}_o = \dot{x}_s, \quad \dot{y}_o = \dot{y}_s, \quad \dot{z}_o = 0, \\ \dot{\phi}_i &= \frac{1}{R_w} (-V_L \sin \alpha_i \sin \beta + V_T \cos \alpha_i \sin \beta - R_s \dot{\psi} \cos \beta), \end{aligned} \quad (16)$$

где $V_L = \dot{x}_s \cos \psi + \dot{y}_s \sin \psi$, $V_T = \dot{y}_s \cos \psi - \dot{x}_s \sin \psi$ – проекции скорости геометрического центра сферического колеса на оси повернутые на угол курса омни-платформы.

При этом решение задачи прямой кинематики имеет вид:

$$V_L = -\frac{2R_w}{3\sin\beta} \sum_{i=1}^3 \dot{\phi}_i \sin \alpha_i, \quad V_T = \frac{2R_w}{3\sin\beta} \sum_{i=1}^3 \dot{\phi}_i \cos \alpha_i, \quad \dot{\psi} = -\frac{R_w}{3R_s \cos \beta} \sum_{i=1}^3 \dot{\phi}_i, \quad (17)$$

Рассмотрим некоторые простые движения робота:

1. Поступательное движение по прямой вдоль горизонтальной оси OX_p ($V_T(t) = 0$, $\dot{\psi}(t) = 0$):

$$\dot{x}_o = V_L \cos \psi, \quad \dot{y}_o = V_L \sin \psi, \quad \dot{\phi}_1 = 0, \quad \dot{\phi}_2 = -\frac{\sqrt{3}V_L \sin \beta}{2R_w}, \quad \dot{\phi}_3 = \frac{\sqrt{3}V_L \sin \beta}{2R_w}. \quad (18)$$

2. Поступательное движение по прямой вдоль горизонтальной оси OY_p ($V_L(t) = 0$, $\dot{\psi}(t) = 0$):

$$\dot{x}_o = -V_T \cos \psi, \quad \dot{y}_o = V_T \sin \psi, \quad \dot{\phi}_1 = \frac{V_T \sin \beta}{R_w}, \quad \dot{\phi}_2 = \dot{\phi}_3 = -\frac{V_T \sin \beta}{2R_w}. \quad (19)$$

3. Вращение вокруг вертикальной оси OZ_p ($V_L(t) = 0$, $V_T(t) = 0$):

$$\dot{x}_o = 0, \quad \dot{y}_o = 0, \quad \dot{\phi}_1 = \dot{\phi}_2 = \dot{\phi}_3 = -\frac{R_s \cos \beta}{R_w} \dot{\psi}. \quad (20)$$

Результаты численных расчетов угловых скоростей вращения омни-колес для простых движений сведены в таблицу 1.

Табл. 1. Результаты расчетов угловых скоростей омни-колес

V_L , м/с	V_T , м/с	$\dot{\psi}$, рад/с	$\dot{\phi}_1$, рад/с	$\dot{\phi}_2$, рад/с	$\dot{\phi}_3$, рад/с
1	0	0	0	-9,22	9,22
0	1	0	10,65	-5,32	-5,32
0	0	1	-2,13	-2,13	-2,13

Полученные уравнения прямой (17) и обратной (16) кинематики позволяют оценить необходимые скоростные характеристики двигателей омни-колес, необходимые для реализации требуемого движения.

Выводы. По результатам численных расчетов для рассмотренных движений можно сделать вывод, что для обеспечения платформы робота возможностью перемещаться с линейными скоростями до 1 м/с и вращаться с угловой скоростью до 1 рад/с достаточно, чтобы выходные валы двигателей каждого омни-колеса развивали скорости до 11 рад/с.

По результатам работы получены выражения для угловых скоростей омни-колес робота при его пространственном движении из условий отсутствия проскальзывания точек контакта соприкасающихся тел. Полученные выражения позволили оценить скоростные характеристики двигателей омни-колес, необходимые для реализации простых движений робота. Результаты работы могут быть использованы при построении управления движением омни-платформой, балансирующей на сферическом колесе, на кинематическом уровне.

Заключение

В данной работе с использованием неголономных связей построена математическая модель пространственной кинематики трехколесной омни-платформы, балансирующей на сферическом колесе. Для движения сферического колеса робота по горизонтальной

поверхности при расположении платформы в верхнем положении равновесии получены уравнения прямой и обратной кинематики, связывающие угловые скорости омни-колес с линейными скоростями сферического колеса и угловой скоростью омни-платформы.

Полученная кинематическая модель робота может быть использованы при построении управления движением омни-платформой, балансирующей на сферическом колесе, на кинематическом уровне.

Список литературы

1. Сайпулаев Г.Р., Адамов Б.И. Исследование влияния конструкции механум-колес и контактных сил на точность управления роботом-манипулятором KUKA youBot // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2024. – Т. 25, № 3. – С. 158-164. – doi.org/10.17587/mau.25.158-164.
2. Андреев А.С., Перегудова О.А. Робастная стабилизация движения мобильного робота с омни-колесами // Автоматизация процессов управления. – 2019. – № 2(56). – С. 75-84.
3. Комаров А.Г., Гебель Е.С. Сферический мобильный робот с гибридной системой движущих механизмов // Мехатроника, автоматика и робототехника. – 2017. – № 1. – С. 50-56.
4. Баландин Д.В., Комаров М.А., Осипов Г.В. Управление движением сферического робота с маятниковым приводом // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2013. – № 4. – С. 150-163. – DOI: 10.7868/S0002338813040045.
5. Su B., Gong Y. Euler-Lagrangian modeling and exact trajectory following controlling of Ballbot-like robot // 2017 IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics (ROBIO). 2017, pp. 2325-2330. DOI: 10.1109/ROBIO.2017.8324766.
6. Moiseev G.N. No-Overturn Conditions for Omnivehicle Motion // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2024, vol. 20, no. 2, pp. 311-336. DOI: 10.20537/nd240502.
7. Thach D.V., Lee S.G. LQG control design for a coupled ballbot dynamical system // 2018 18th International Conference on Control, Automation and Systems (ICCAS). 2018, pp. 666-670.
8. Bonci A. New dynamic model for a Ballbot system // 2016 12th IEEE/ASME International Conference on Mechatronic and Embedded Systems and Applications (MESA). 2016, pp. 1-6. – DOI: 10.1109/MESA.2016.7587176.
9. Asgari P., Zarafshan P., Moosavian S.A.A. Dynamics modelling and stable motion control of a ballbot equipped with a manipulator // 2013 First RSI/ISM International Conference on Robotics and Mechatronics (ICRoM). 2013, pp. 259-264. DOI: 10.1109/ICRoM.2013.6510115.
10. Lee S.M., Park B.S. Robust control for trajectory tracking and balancing of a ballbot // IEEE Access. 2020, vol. 8, pp. 159324-159330. DOI: 10.1109/ACCESS.2020.3020091.
11. He Z., Yan L., Gao X., Gerada C. Dynamic Analysis and Controller Design for the Ballbot // 2020 15th IEEE Conference on Industrial Electronics and Applications (ICIEA). 2020, pp. 1669-1672. DOI: 10.1109/ICIEA48937.2020.9248096.
12. Nashat A., Morsi A., Hassan M.M.M., Abdelrahman M. Ballbot Simulation System: Modeling, Verification, and Gym Environment Development // 2023 Eleventh International Conference on Intelligent Computing and Information Systems (ICICIS). 2023, pp. 198-204. DOI: 10.1109/ICICIS58388.2023.10391172.
13. Kordbacheh S., Baghestan K., Gheidary S.S. Modeling and robust control of ballbot robot with improved power transfer mechanism // 2018 6th RSI International Conference on Robotics and Mechatronics (ICRoM). 2018, pp. 353-358. DOI: 10.1109/ICRoM.2018.8657623.
14. Borisov A.V., Kilin A.A., Mamaev I.S. An omni-wheel vehicle on a plane and a sphere // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2011, vol. 7, no. 4, pp. 785-801. DOI: 10.20537/nd1104004.
15. Bolsinov A.V., Borisov A.V., Mamaev I.S. Rolling of a ball without spinning on a plane: the absence of an invariant measure in a system with a complete set of integrals // Regular and Chaotic Dynamics. 2012, vol. 17, no. 6, pp. 605-616. DOI: 10.1134/S1560354712060081.

References

1. Saypulaev G.R., Adamov B.I. Study of the Influence of the Mecanum-Wheel Design and Contact Forces on the Control Accuracy of Mobile Robot-Manipulator KUKA YouBot // Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie. 2024, vol. 25, no. 3, pp. 158-164. doi.org/10.17587/mau.25.158-164.
2. Andreev A.S., Peregudova O.A. Robust motion stabilization of a mobile robot with omni-wheels // Automation of Control Processes. 2019, no. 2(56), pp. 75-84.
3. Komarov A.G., Gebel E.S. Spherical mobile robot with a hybrid system of driving mechanisms // Mechatronics, Automation and Robotics. 2017, no. 1, pp. 50-56.
4. Balandin D.V., Komarov M.A., Osipov G.V. A motion control for a spherical robot with pendulum drive // International Journal of Computer and Systems Sciences. 2013, vol. 52, no. 4, pp. 650-663. DOI: 10.1134/S1064230713040047.

5. Su B., Gong Y. Euler-Lagrangian modeling and exact trajectory following controlling of Ballbot-like robot // 2017 IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics (ROBIO). 2017, pp. 2325-2330. DOI: 10.1109/ROBIO.2017.8324766.
6. Moiseev G.N. No-Overturn Conditions for Omnivehicle Motion // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2024, vol. 20, no. 2, pp. 311-336. DOI: 10.20537/nd240502.
7. Thach D.V., Lee S.G. LQG control design for a coupled ballbot dynamical system // 2018 18th International Conference on Control, Automation and Systems (ICCAS). 2018, pp. 666-670.
8. Bonci A. New dynamic model for a Ballbot system // 2016 12th IEEE/ASME International Conference on Mechatronic and Embedded Systems and Applications (MESA). 2016, pp. 1-6. – DOI: 10.1109/MESA.2016.7587176.
9. Asgari P., Zarafshan P., Moosavian S.A.A. Dynamics modelling and stable motion control of a ballbot equipped with a manipulator // 2013 First RSI/ISM International Conference on Robotics and Mechatronics (ICRoM). 2013, pp. 259-264. DOI: 10.1109/ICRoM.2013.6510115.
10. Lee S.M., Park B.S. Robust control for trajectory tracking and balancing of a ballbot // IEEE Access. 2020, vol. 8, pp. 159324-159330. DOI: 10.1109/ACCESS.2020.3020091.
11. He Z., Yan L., Gao X., Gerada C. Dynamic Analysis and Controller Design for the Ballbot // 2020 15th IEEE Conference on Industrial Electronics and Applications (ICIEA). 2020, pp. 1669-1672. DOI: 10.1109/ICIEA48937.2020.9248096.
12. Nashat A., Morsi A., Hassan M.M.M., Abdelrahman M. Ballbot Simulation System: Modeling, Verification, and Gym Environment Development // 2023 Eleventh International Conference on Intelligent Computing and Information Systems (ICICIS). 2023, pp. 198-204. DOI: 10.1109/ICICIS58388.2023.10391172.
13. Kordbacheh S., Baghestan K., Gheidary S.S. Modeling and robust control of ballbot robot with improved power transfer mechanism // 2018 6th RSI International Conference on Robotics and Mechatronics (ICRoM). 2018, pp. 353-358. DOI: 10.1109/ICRoM.2018.8657623.
14. Borisov A.V., Kilin A.A., Mamaev I.S. An omni-wheel vehicle on a plane and a sphere // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2011, vol. 7, no. 4, pp. 785-801. DOI: 10.20537/nd1104004.
15. Bolsinov A.V., Borisov A.V., Mamaev I.S. Rolling of a ball without spinning on a plane: the absence of an invariant measure in a system with a complete set of integrals // Regular and Chaotic Dynamics. 2012, vol. 17, no. 6, pp. 605-616. DOI: 10.1134/S1560354712060081.

Сведения об авторах:

Information about authors:

Сайпулаев Гасан Русланович – аспирант, старший преподаватель кафедры Робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин	Saypulaev Gasan Ruslanovich – postgraduate student, senior lecturer of the of Department of robotics, mechatronics, dynamics and machine strength
Сайпулаев Муса Русланович – кандидат технических наук, старший преподаватель кафедры Робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин	Saypulaev Musa Ruslanovich – candidate of technical sciences, senior lecturer of the Department of robotics, mechatronics, dynamics and machine strength
Семенякина Елизавета Сергеевна – студент	Semenyakina Elizaveta Sergeevna – student
Снегирев Иван Сергеевич – студент	Snegirev Ivan Sergeevich – student
Демидов Александр Андреевич – студент	Demidov Alexander Andreevich – student
saypulaevgr@mail.ru	

Получена 03.07.2024