Дуйшеналиев Т.Б. Статическая краевая задача и ее решения // Транспортное, горное и строительное машиностроение: наука и производство. – 2024. – № 27. – С. 9-16.

УДК 539 https://doi.org/10.26160/2658-3305-2024-27-9-16

СТАТИЧЕСКАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА И ЕЕ РЕШЕНИЯ

Дуйшеналиев Т.Б.
Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва

Ключевые слова: упругое тело, краевая задача, напряжение, конечные деформации, обобщенный закон Гука, перемещение, формулы Чезаро, пластина.

Аннотация. Известно, что статическая краевая задача имеет две постановки. Первая выдвигается при формулировании, а вторая – при решении. Эти постановки не идентичны, ибо в первой из них речь идет о равновесии, а во второй – о движении. В механике деформируемого тела это различие игнорируется, в ней принимается, что задачи обеих постановок имеют одно и то же решение. Тем не менее, оказалось, что общепринятый подход к решению такой задачи не соответствует ее постановке и нередко является источником противоречий и осложнений. Более того, в трехмерной постановке, краевая задача в таком подходе вообще не решаема. Она математически не определена и механически некорректна. И с таким положением вещей сегодня все вынуждены мириться. Выдвигается новый неклассический подход, который строго соответствует общепринятой постановке краевой задачи и ее сути. Областью определения уравнений равновесия и совместности деформаций, а также граничных условий служит конечное состояние. Это состояние равновесия считается заданным, а не искомым. Иначе невозможно математически корректно указать положения сил, распределенных в объеме и на поверхности тела. Перемещения, определяемые по формулам Чезаро, представляют те перемещения, которые приводят тело в область конечного (деформированного) состояния. По ним находятся координаты точек начального состояния тела, и строится его конфигурация.

STATIC BOUNDARY VALUE PROBLEM AND ITS SOLUTIONS

Duishenaliev T.B.
National Research University "Moscow Power Engineering Institute", Moscow

Keywords: elastic body, boundary value problem, stress, finite deformations, generalized Hooke's law, displacement, Cesaro formulas, plate.

Abstract. It is known that the static boundary value problem has two formulations. The first is put forward when formulating, and the second is put forward when solving. These statements are not identical, they are even diametrically opposed, because in the first of them we are talking about balance, and in the second about movement. In the mechanics of a deformable body, this difference is ignored, it is tacitly accepted that the problems of both formulations have the same solution. Nevertheless, it turned out that the generally accepted approach to solving such a problem does not correspond to its formulation and is a source of contradictions and complications. Moreover, in a three-dimensional formulation, the boundary value problem in this approach is not solvable at all. It is mathematically undefined and mechanically incorrect. We have to put up with this state of affairs today. A new non-classical approach is put forward, which strictly corresponds to the generally accepted formulation of the boundary value problem and its essence. Deformation measures are of great importance for the mechanics of a deformable body. But so far there is not a single solution using nonlinear strain tensors. The field of so-called finite deformations is still closed to rigorous analytical studies. The field of determining the equations of equilibrium and compatibility of deformations, as well as boundary conditions, is the final state. This state of equilibrium is considered to be set, not sought. Otherwise, it is impossible to mathematically correctly indicate the positions of forces distributed in the volume and on the surface of the body. The displacements determined by Cesaro's formulas represent those displacements that bring the body to the region of the final (deformed) state. According to them, the coordinates of the points of the initial state of the body are found, and its configuration is built.

Введение

В статической краевой задаче утверждается, что тело, имеющее то или иное очертание, находится в равновесии под действием заданных усилий внутри и на его границе [1-7]. Равновесие – это то, что заявляется *á priory*.

Уравнения статической краевой задачи выражают на формальном языке математики именно это равновесие. Но вместо этой предельно ясной и правильной формулировки статической краевой задачи вынуждены рассматривать совершенно другую задачу:

прикладывая к известному начальному состоянию тела внешние усилия и задавая граничные условия, нужно найти некое конечное положение, в котором это тело обретет равновесие [1-6].

Уравнения статической краевой задачи математически корректны только для конечного состояния, которое в общепринятой (классической) постановке считается искомым. Здесь краевая задача статики звучит странно: найти решение дифференциальных уравнений равновесия и совместности в неизвестной области, удовлетворяющее неизвестным условиям на неизвестной поверхности [8].

Математическая неопределенность этой задачи вынуждает пользоваться предположением о бесконечной близости начального и конечного состояний. Это вынужденная мера, из-за нее все решения, получаемые аналитическими методами, считаются верными только в области бесконечно малых перемещений.

Переход тела из начального состояния в конечное – это, несомненно, процесс с изменяющимися во времени усилиями, и его в принципе невозможно описать уравнениями статики. Это вынуждает сделать еще одно допущение о статическом приложения действий (нагрузки).

1. Методы и материалы исследования

1.1. Общепризнанная постановка

Тело с заданными силами внутри своего объема V и на его поверхности S находится в равновесии. Нужно найти напряжения и деформации внутри тела [1-6].

Тут объем тела V и его поверхность S, разумеется, должны быть заданы, в противном случае внешние силы не указываемы.

Пусть f_i и p_i соответственно внешние силы, заданные в объеме V и на поверхности S тела. Обозначая через σ_{ij} компоненты напряжения, представим постановку математически:

$$\sigma_{ji,j} + f_i = 0,\ \sigma_{ij} = \sigma_{ji},\ x_i \in V, \tag{1}$$

$$\sigma_{ij,kk} + \frac{1}{1+\nu}\sigma_{kk,ij} + \frac{\nu}{1-\nu}\delta_{ij} f_{k,k} + f_{i,j} + f_{j,i} = 0,\ x_i \in V, \tag{2}$$

$$\sigma_{ji}\, n_j = p_i,\ x_i \in S, \tag{3}$$

где ν – коэффициент Пуассона; x_i – координаты точки тела объемом V; n_j – нормаль к площадке; δ_{ij} – символ Кронекера, $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ при } i = j, \\ 0, \text{ при } i \neq j, \end{cases}$ индексы i, j для трехмерного пространства принимают значения 1, 2, 3.

На рисунке 1 данная постановка проиллюстрирована графически.

Приведенная постановка статической краевой задачи является общепризнанной [1-7]. Все единодушно ее сначала формулируют так, но все так же единодушно решают задачу, имеющую совершенно другую постановку, которая приведена ниже. Это историческая коллизия.

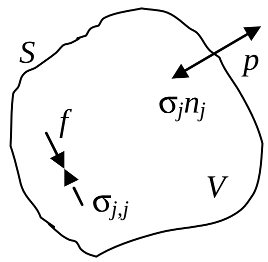

Рис. 1. Иллюстрация уравнений статической краевой задачи; в любой точке внутри объема V и на поверхности S тела внешние силы уравновешены внутренними напряжениями; σ_j – вектор напряжения на площадке с нормалью n_j

1.2. Постановка задачи классического подхода

Известно начальное состояние тела (объем тела V_0, поверхность тела S_0). К нему прикладываются внешние силы и оно, двигаясь и деформируясь, переходит в другое состояние (объем V, поверхность S), в котором обретает равновесие. Нужно найти конечное состояние равновесия и появившиеся в нем напряжения и деформации [1-6].

Уравнения статической краевой задачи имеют силу только в состоянии равновесия. В постановке задачи классического подхода это состояние неизвестно, оно ищется. Уравнения этой задачи можно написать только в неопределенном виде (1)-(3). Область определения уравнений (V, S) неизвестна. Для тела неизвестной конфигурации невозможно указать координаты точек приложения массовых сил, а так же сил на поверхности, следовательно, в уравнениях (1)-(3) неизвестны и f, p (рис. 2).

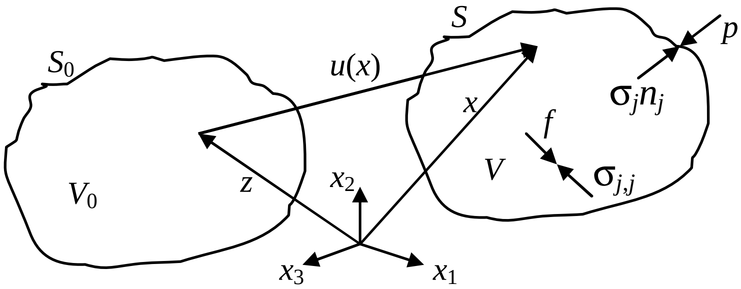

Рис. 2. Иллюстрация задачи классического подхода

1.2.1. Математическая неопределенность и механическая некорректность задачи классического подхода

В задаче (1)-(3) неизвестны не только объем тела V и его поверхность S, но и внешние силы f, p. Тут задача приобретает следующее содержание – найти решение дифференциальных уравнений равновесия и совместности деформаций с неизвестными силами в неизвестной области V, удовлетворяющее неизвестным условиям на неизвестной поверхности S. Математическая нелепость такой задачи очевидна.

Задача эта некорректна и с точки зрения механики. Здесь начальное состояние нагружается внешними силами и оно, двигаясь и деформируясь, переходит в некое состояние равновесия, которое надо найти. Но этот процесс невозможно описать уравнениями равновесия.

Математическая неопределенность и механическая некорректность задачи классического подхода вынуждают делать допущения.

1.2.2. Допущение, обусловленное математической неопределенностью

В задаче классического подхода (V_0, S_0) – начальное состояние, для которого справедливы уравнения:

$$\sigma_{ji,j} = 0,\ \sigma_{ij} = \sigma_{ji},\ x_i \in V_0, \tag{4}$$

$$\sigma_{ij,kk} + \frac{1}{1+\nu}\sigma_{kk,ij} = 0,\ x_i \in V_0, \tag{5}$$

$$\sigma_{ji}\, n_j = 0,\ x_i \in S_0. \tag{6}$$

В задаче классического подхода (1)-(3) неизвестны, как уже отмечалось выше, не только объем тела V и его поверхность S, но и внешние силы f, p. Эта задача математически корректна в том и только в том случае, когда заданы эти величины. Как это сделать? Различие состояний (V_0, S_0) и (V, S) друг от друга может быть малым или большим. Следуя классическому подходу, допустим, что это различие мало. Но состояний (V, S), мало отличающихся от (V_0, S_0), бесконечное множество. Которой из них отдать предпочтение? Опять та же неопределенность. Обоснованного выхода из нее нет. Из этого тупика классический подход выходит крайне просто – в задаче (1)-(3) неизвестные V, S заменяются на известные V_0, S_0:

$$\sigma_{ji,j} + f_i = 0,\ \sigma_{ij} = \sigma_{ji},\ x_i \in V_0, \tag{7}$$

$$\sigma_{ij,kk} + \frac{1}{1+\nu}\sigma_{kk,ij} + \frac{\nu}{1-\nu}\delta_{ij} f_{k,k} + f_{i,j} + f_{j,i} = 0,\ x_i \in V_0, \tag{8}$$

$$\sigma_{ji}\, n_j = p_i,\ x_i \in S_0. \tag{9}$$

На деле, как видим, эта оговорка осталась не использованной, ибо она не введена в уравнения, следовательно, на их решение не оказывает никакого влияния.

Однако каково конечное состояние тела? Оно определяется с помощью функций перемещений $u_i(x)$, соответствующих решению задачи (7)-(9). Этим мы еще более усугубляем противоречие. Если внять уравнениям (7)-(9), то (V_0, S_0) – есть состояние равновесия. Это равновесие, несомненно, не зависит от того, решена эта задача или нет. Поэтому, решение не отвергает равновесие – не двигает и не деформирует тело. Классический подход игнорирует это положение вещей. Он наделяет решение свойством двигать и деформировать тело. В задаче классического подхода решение перемещает тело из состояния (V_0, S_0) до положения (V, S).

А в случае так называемых конечных деформаций, как уже подчеркивалось ранее, краевую задачу не только решить, но и написать строго математически затруднительно. В задаче (1)-(3) неизвестны не только V, S, но и внешние силы f, p.

1.2.3. Допущение, обусловленное механической некорректностью задачи классического подхода

Для преодоления механической некорректности вводится понятие о статическом приложении действия. Согласно ему, действие и вызванное им движение настолько медленно, что на любом этапе можно говорить о том, что тело находится в равновесии. Это, якобы, открывает путь для описания процесса движения и деформирования тела уравнениями равновесия.

Однако, дело в том, что у уравнений (1)-(3) нет одушевленности. Им, к примеру, не скажешь о том, что действительная область их определения (V, S) пока неизвестна и это вынуждает представлять их приблизительно в виде (7)-(9).

2. Обсуждение результатов. Неклассическое решение статической краевой задачи

Рассмотрим подробнее некоторые положения, вытекающие из статической краевой задачи.

2.1. Недвижимость и геометрическая неизменяемость находящегося в равновесии тела

2.1.1. Недвижимость материальных точек находящегося в равновесии тела

Равновесие в статической краевой задаче декларируется *a priory*, оно составляет ее суть. Это то, что не может быть предметом спора. Итак, рассматриваемое тело находится в равновесии. Мысленно вырежем некоторый объем тела V_ε с поверхностью S_ε. Главный вектор и главный момент приложенных к нему усилий определяются в виде:

$$\int\limits_{S_\varepsilon} \sigma_j\, n_j\, dS + \int\limits_{V_\varepsilon} f\, dV, \quad \int\limits_{S_\varepsilon} r\times\sigma_j\, n_j\, dS + \int\limits_{V_\varepsilon} r\times f\, dV, \tag{10}$$

где r – радиус-вектор, σ_j – вектор напряжения на площадке с нормалью n_j.

Преобразования Остроградского-Гаусса позволяют написать эти выражения в виде:

$$\int\limits_{V_\varepsilon} (\sigma_{j,j} + f)\, dV, \quad \int\limits_{V_\varepsilon} (r\times(\sigma_{j,j} + f) + r_{,j}\times\sigma_j)\, dV\,. \tag{11}$$

Здесь $(\sigma_{j,j} + f)$ – главный вектор, а $r\times(\sigma_{j,j} + f) + r_{,j}\times\sigma_j$ – главный момент в точке. Это надо принимать так же, как и точечное определение массовых сил.

Для того, чтобы выделенный объем не двигался и не вращался, необходимо:

$$\int\limits_{V_\varepsilon} (\sigma_{j,j} + f)\, dV = 0, \quad \int\limits_{V_\varepsilon} (r\times(\sigma_{j,j} + f) + r_{,j}\times\sigma_j)\, dV = 0\,.$$

К тому же еще расширим это требование: пусть не двигается и не вращается не только этот объем, но и всякий другой. В этом случае вышеприведенные уравнения должны удовлетворяться в любом произвольном объеме V_ε, что возможно только тогда, когда в каждой точке тела имеет место:

$$\sigma_{j,j} + f = 0,\ r\times(\sigma_{j,j} + f) + r_{,j}\times\sigma_j = 0,\ x_i \in V. \tag{12}$$

Учитывая первое во втором, окончательно напишем

$$\sigma_{j,j} + f = 0,\ r_{,j}\times\sigma_j = 0,\ x_i \in V. \tag{13}$$

Эти уравнения присутствуют в краевой задаче в виде уравнений (1). Любой обособленный элементарный объем тела V_ε в пространстве имеет шесть степеней свободы. Шесть уравнений (13) являются шестью условиями, отнимающими эти степени свободы. Этот объем недвижим, он не перемещается в пространстве (главный вектор равен нулю) и не вращается (главный момент равен нулю).

2.1.2. Недвижимость находящегося в равновесии тела, как единого целого

Покажем, приложенные к рассматриваемому телу внешние силы эквивалентны нулевому вектору и нулевому моменту. Главный вектор и главный момент этих сил:

$$\int_S p\,dS + \int_V f\,dV\,, \quad \int_S r\times p\,dS + \int_V r\times f\,dV\,. \tag{14}$$

Из (13) $f = -\sigma_{j,j}$. Подставив это в интегралы по объему и пользуясь преобразованием Остроградского-Гаусса, находим:

$$\int_S (p-\sigma_j\, n_j)\,dS, \quad \int_S r\times(p-\sigma_j\, n_j)\,dS + \int_V r_{,j}\times\sigma_j\,dV\,. \tag{15}$$

Учитывая второе из уравнений (13), эти выражения напишем в окончательном виде:

$$\int_S (p-\sigma_j\, n_j)\,dS\,, \quad \int_S r\times(p-\sigma_j\, n_j)\,dS. \tag{16}$$

Величины этих интегралов равны нулю

$$\int_S (p-\sigma_j\, n_j)\,dS = 0, \quad \int_S r\times(p-\sigma_j\, n_j)\,dS = 0\,, \tag{17}$$

так как в любой точке поверхности S удовлетворены условия (3). Таким образом, внешние силы (14) эквивалентны нулевому вектору и нулевому моменту. Тело, как единое целое, в пространстве имеет 6 степеней свободы, которые отнимаются 6-ю условиями (17), следовательно, оно недвижимо.

Выше показано, что и все материальные точки этого тела также недвижимы.

Таким образом, рассматриваемое в краевой задаче тело недвижимо и неизменяемо геометрически.

2.2. Определение деформаций и перемещений

Пусть известно решение статической краевой задачи (1)-(3) в напряжениях σ_{ij}. Из него, используя обобщенный закон Гука, определяются деформации:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E}(-\nu\, \delta_{ij}\, \sigma_{kk} + (1+\nu)\, \sigma_{ij}), \tag{18}$$

где E – модуль Юнга; δ_{ij} – символ Кронекера, $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ при } i = j, \\ 0, \text{ при } i \neq j. \end{cases}$

Далее определяем перемещения $u_i(x)$ по формулам Чезаро:

$$u_i(x) = u_i(x^0) + \omega_{ij}(x^0)(x_j - x_j^0) + \frac{1}{E}\int_l (\varepsilon_{ik}(y) + (x_j - y_j)(\varepsilon_{ki,j}(y) - \varepsilon_{kj,i}))) dy_k\,,$$

где l – линия в области V; x^0 – начальная точка этой линии; $u_i(x^0)$, $\omega_{ij}(x^0)$ – постоянные интегрирования.

Более удобно пользоваться не этой формулой, а ее преобразованным видом [8]:

$$u_i(x) = u_i(x^0) + \omega_{ij}(x^0)\,(x_j - x_j^0) +$$
$$+ \frac{1}{E}\int_\ell (-\nu\delta_{ik}\sigma_{tt} + (1+\nu)(\sigma_{ik} + (x_j - y_j)(-\nu(\delta_{ki}\sigma_{tt,j} - \delta_{kj}\sigma_{tt,i}) + (1+\nu)(\sigma_{ki,j} - \sigma_{kj,i})))dy_k\,.$$

В этом выражении $u_i(x^0)$, $\omega_{ij}(x^0)$ – произвольные постоянные. Они соответствуют не вызывающим деформации перемещениям (параллельному переносу и жесткому повороту тела). В дальнейшем исключим из рассмотрения такие перемещения. В этом случае:

$$u_i(x) = \frac{1}{E}\int_\ell (-\nu\delta_{ik}\sigma_{tt} + (1+\nu)(\sigma_{ik} + (x_j - y_j)(-\nu(\delta_{ki}\sigma_{tt,j} - \delta_{kj}\sigma_{tt,i}) + (1+\nu)(\sigma_{ki,j} - \sigma_{kj,i})))dy_k\,. \tag{19}$$

2.3. Сравниваемое состояние

Как показано на рисунке 2, векторы:

$$z_i = x_i - u_i\,(x),\ x_i \in V;\ z_i = x_i - u_i\,(x),\ x_i \in S \tag{20}$$

определяют некоторую область V_0 и ее поверхность S_0. (V_0, S_0), очевидно, состояние равновесия без внешних сил. Далее, для краткости, (V_0, S_0) назовем сравниваемым состоянием статической краевой задачи. Решение не перемещает тело на величину векторов $u(x)$. Положение тела, заданное в уравнениях (1)-(3), незыблемо. Оно занимало область V, ограниченную поверхностью S, до решения и остается там же и после решения. Определяемое координатами z_i (20) сравниваемое состояние есть некое математическое преобразование области (V, S).

Поле $u_i(x)$ определяет относительные изменения координат, компонент деформации, вращения и напряжения этих состояний. Эту относительность можно представить в виде:

$$x_i – z_i = u_i(x),\ \varepsilon_{ij}(x) – \varepsilon_{ij}(z) = (u_{i,j} + u_{j,i})/2,\ \omega_{ij}(x) – \omega_{ij}(z) = (u_{i,j} – u_{j,i})/2,$$
$$\sigma_{ij}(x) = \lambda\delta_{ij}\, u_{k,k} + \mu\,(u_{i,j} + u_{j,i}), \qquad (21)$$

где x_i, $\varepsilon_{ij}(x)$, $\omega_{ij}(x)$, $\sigma_{ij}(x)$ относятся к положению равновесия с внешними силами, а z_i, $\varepsilon_{ij}(z)$, $\omega_{ij}(z)$ – к положению равновесия без внешних сил; λ, μ – константы Ламе. Поле $u_i(x)$ только преобразует (V, S) в (V_0, S_0), следовательно, оно определяет только относительные изменения координат, деформаций и напряжений этих сравниваемых состояний.

Когда и как произошли перемещения $u_i(x)$, какие силы при этом действовали, и как они изменялись во времени? Статической краевой задаче это не ведомо. Что будет, если разгрузить тело? Какие-то деформации исчезнут, какие-то останутся. И этот вопрос статическая краевая задача оставляет без ответа. Она при нулевых значениях внешних сил имеет решение $\sigma_{ij}(x) \equiv 0$, из которого следует $u_i(x) \equiv 0$. Ненагруженное тело находится в равновесии. Сравниваемое состояние совпадает с заданным.

На основе предлагаемого подхода к решению статической краевой задачи разработана и реализована математическая модель конечного деформирования различных упругих тел [9-11]. В работе [11] на основе предложенной модели аналитическим способом решена задача об изгибе прямоугольной пластины (рис. 3).

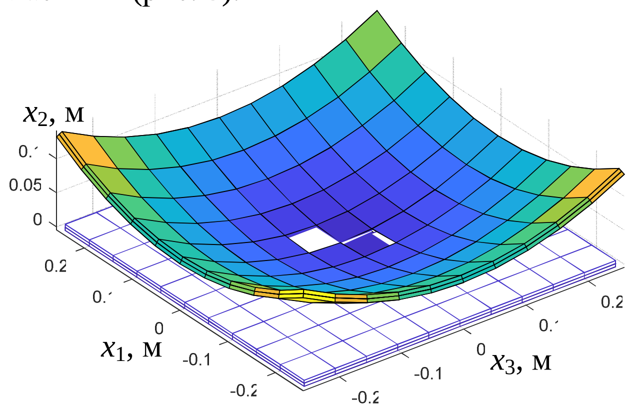

Рис. 3. Начальное искомое (верхняя пластина) и конечное (нагруженная нижняя пластина) состояния упругого тела

3. Некорректность выводов, сделанных из задачи классического подхода

В задаче классического подхода рассматривается процесс, с изменяющимися во времени силами, которые двигают и деформируют тело. Этот процесс имеет начало и конец и он должен изучаться уравнениями движения:

$$\sigma_{ji,i} + f_i = \rho u_{i,tt\ t},$$

где ρ – объемная плотность тела.

Тут выдвигается довод, что $\rho u_{i,tt}$ ничтожно мало по сравнению с величинами напряжений и внешних сил, поэтому силой инерции можно пренебречь. Однако это не совсем корректно. Величина силы инерции $\rho u_{i,tt}$ должна сравниваться не с величинами самих $\sigma_{ji,i}$, f_i, p_i, а с величиной суммы $\sigma_{ji,i} + f_i$.

В первом случае довод кажется вполне приемлемым, а во втором он сомнителен, ибо если величина $\rho u_{i,tt}$ ничтожно мала, то, как следует из уравнения движения, в такой же мере мала и сумма $\sigma_{ji,i} + f_i$, которая представляет двигающую частицу тела силу. Пусть сила эта и ничтожно мала, но она двигает частицу тела с ничтожно малым ускорением.

Если в уравнении движения $\sigma_{ji,i} + f_i = \rho u_{i,tt}$ положим $\rho u_{i,tt} = 0$, то это означает, что нет никакой силы, которая бы двигала эту частицу. В таком случае эта и любая другая частица тела (ибо $\sigma_{ji,i} + f_i = 0,\ x \in V$) находится в состоянии покоя (равномерное и прямолинейное движение тела, в котором оно не деформируется, исключим из рассмотрения). Это позиция закона Ньютона.

В статической краевой задаче классического подхода упрощение $\rho u_{i,tt} = 0,\ x \in V$ равносильно утверждению об отсутствии двигающих материальные точки сил во всем объеме тела, что присутствует в ней в виде уравнений $\sigma_{ji,i} + f_i = 0,\ x \in V$. Если верить закону Ньютона, то все материальные точки тела недвижимы. Однако, эта задача изучает движение тела из начального состояния в конечное уравнениями $\sigma_{ji,i} + f_i = 0,\ x \in V$, тем самым опровергает закон Ньютона. Здесь движение частиц тела из начального состояния в конечное имеет место не в силу этого основного закона механики, а в угоду нашему желанию.

Это одна сторона дела. Есть и другая его сторона – представление внешних сил в виде $f(x),\ x \in V,\ p(x),\ x \in S$ означает, что они не изменяются во времени, таковыми они указываются в уравнениях статической краевой задачи. Если мы принимаем эти уравнения всерьез, то величины указанных в них внешних сил постоянны, т.е. нисколько не изменяются через секунду, или минуту, или час, или день. Но в задаче классического подхода эти силы медленно возрастают от нуля и выше, и тело, так же медленно двигаясь и деформируясь, переходит из начального состояния в некое конечное состояние. Если нам угодно, эти силы будут убывать медленно от этого «выше» до нуля и тело, так же медленно двигаясь назад и теряя деформации, переходит из некоего конечного состояния в начальное состояние. Хотя время не входит число их аргументов, однако они «могут» изменять свои величины во времени в ту или в другую сторону, согласно нашей прихоти.

Но это такой же абсурд, какой мы имели перед этим. С точки зрения механики задача классического подхода, несомненно, динамическая. Решение задачи классического подхода в динамической постановке с начальными и граничными условиями описывало бы движение тела в виде функций $u_i(x, t)$.

Заключение

Предложен новый подход – решать краевую задачу статики в строгом соответствии с ее общепризнанной постановкой. Областью определения уравнений равновесия и совместности деформаций, а также граничных условий служит конечное состояние. Это состояние равновесия считается заданным, а не искомым.

Задача решена, если найдено поле напряжения, которое удовлетворяет уравнениям совместности деформаций и уравновешивает внешние силы внутри области и на ее поверхности. Из него определяются деформации. Вычисленные по формулам Чезаро перемещения преобразуют конечное состояние в начальное.

Теперь эта задача проста и ясна. Она не стоит перед неразрешимой проблемой поиска решений в неизвестной области с неизвестной границей как задача классического подхода. В ней нет некорректных приемов линейной постановки. Ненужным оказалось ей и статическое приложение действий. В ее решении не использовано предположение о близости начального и конечного положений тела и, в виду этого, решение свободно от ограничений, накладываемых на величины перемещений.

Наконец, эта задача допускает численное решение, основанное на общем решении в виде формул Сомильяны.

Список литературы

1. Новацкий В. Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
2. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. – М.: Наука, 1980. – 512 с.
3. Седов Л.И. Механика сплошной среды: учебник для вузов. – 6-е изд. – СПб.: Лань, 2004. – Т. 1, 528 с. – Т. 2, 560 с.

4. Галеркин Б.Г. Собрание сочинений. – М.: Изд-во АН СССР, 1952. – 391 с.
5. Грин А., Аткинс Дж. Большие упругие деформации в нелинейной механике сплошной среды. – М.: Мир, 1965. – 456 с.
6. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. – М.: Наука, 1979. – 744 с.
7. Бородачев Н.М. Об одном подходе к решению пространственной задачи теории упругости в напряжениях // Прикладная механика. – 1995. – Т. 31, № 12. – С. 38-44.
8. Дуйшеналиев Т.Б. Неклассические решения механики деформируемого тела. – М.: Изд-во МЭИ, 2017. – 400 с.
9. Duishembiev A.S., Duishenaliev T.B., Talipov D.R. Virtualization of the Behavior of Structures from Rubber-like and Metal Composites // 2020 V International Conference on Information Technologies in Engineering Education (Inforino), Moscow, Russia, 2020, pp. 1-5, doi: 10.1109/Inforino48376.2020.9111655.
10. Дуйшеналиев Т.Б., Меркурьев И.В., Грибов Е.А. Построение начальной конфигурации нагруженного тела // Физико-механические испытания, прочность и надежность современных конструкционных и функциональных материалов: материалы XIV Всероссийской конференции по испытаниям и исследованиям свойств материалов "ТестМат". – М.: НИЦ «Курчатовский институт» - ВИАМ, 2022. – С. 403-416.
11. Дикарев Д.С., Дуйшеналиев Т.Б. Задача о равновесии прямоугольной пластины // Материалы XXIX Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Т. 1. – М.: ООО «ТРП», 2023. – С. 99-101.

References

1. Novatsky V. Theory of elasticity. – M.: Mir, 1975. – 872 p.
2. Lurie A.I. Nonlinear theory of elasticity. – M.: Science, 1980. – 512 p.
3. Sedov L.I. Continuum mechanics: Textbook for universities. – 6th ed. – SPb.: Lan, 2004. – T. 1, 528 p. – T. 2, 560 p.
4. Galerkin B.G. Collected Works. – M.: Publ. house of the USSR Academy of sciences, 1952. – 391 p.
5. Green A., Atkins J. Large elastic deformations in nonlinear continuum mechanics. – M.: World, 1965. – 456 p.
6. Rabotnov Yu.N. Mechanics of deformable solids. – M.: Science, 1979. – 744 p.
7. Borodachev N.M. On One approach to solving the spatial problem of the theory of elasticity in Stresses // Applied mechanics. 1995, vol. 31, no. 12, pp. 38-44.
8. Duishenaliev T.B. Non-classical solutions to the mechanics of a deformable body. – M.: Publ. house of the MPEI, 2017. – 400 p.
9. Duishembiev A.S., Duishenaliev T.B., Talipov D.R. Virtualization of the Behavior of Structures from Rubber-like and Metal Composites // 2020 V International Conference on Information Technologies in Engineering Education (Inforino), Moscow, Russia, 2020, pp. 1-5, doi: 10.1109/Inforino48376.2020.9111655.
10. Duishenaliev T.B., Merkuryev I.V., Gribov E.A. Construction of the initial configuration of a loaded body // Physical and mechanical tests, strength and reliability of modern structural and functional materials: materials of the XIV All-Russian conference on testing and research of properties of materials "TestMat". – M.: NRC "Kurchatov Institute" - VIAM, 2022. – P. 403-416.
11. Dikarev D.S., Duishenaliev T.B. The problem of the equilibrium of a rectangular plate // Dynamic and technological problems of structural mechanics and continuous media: Proceedings of the XIX International Symposium n.a. A.G. Gorshkov. Vol. 1. – M.: TRP, 2023. – P. 99-101.

Сведения об авторах:	*Information about authors:*
Дуйшеналиев Туратбек Болотбекович – доктор физико-математических наук, профессор	**Duishenaliev Turatbek Bolotbekovich** – doctor of physical and mathematical sciences, professor
DuyshenaliyevT@mpei.ru	

Получена 14.04.2024