Протосеня А.Г., Веселова А.В. Статистическая оценка физико-механических свойств кимберлита Западной Якутии // Транспортное, горное и строительное машиностроение: наука и производство. – 2024. – № 25. – С. 121-133.

УДК 622.023 https://doi.org/10.26160/2658-3305-2024-25-121-133

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ КИМБЕРЛИТА ЗАПАДНОЙ ЯКУТИИ

Протосеня А.Г., Веселова А.В.
Санкт-Петербургский горный университет императрицы Екатерины II, Санкт-Петербург

Ключевые слова: горная порода, кимберлит, Западная Якутия, статистическая обработка, критерии согласия, грубые погрешности, уровень значимости, описательная статистика.
Аннотация. Физические свойства и механические параметры горных пород важны для определения геомеханических характеристик горных массивов. Последние являются основополагающими при геотехническом проектировании и численном моделировании. В данной статье проведена статистическая обработка физико-механических свойств образцов горных пород, отобранных на кимберлитовом месторождении Западной Якутии. Статистическая обработка включает в себя отбраковку недостоверных значений, построение гистограмм распределения и проверку закона распределения случайной величины по нескольким критериям. Описательные статистики распределений показателей физико-механических свойств приводятся в данной работе. В результате определены наиболее точно описывающие исследуемый участок рудного массива основные механические параметры, включающие прочность на одноосное сжатие, прочность на одноосное растяжение, модуль упругости, коэффициент Пуассона, прочности на трехосное сжатие при боковых давлениях 5 и 10 МПа.

STATISTICAL ASSESSMENT OF PHYSICAL AND MECHANICAL PROPERTIES OF KIMBERLITE FROM WESTERN YAKUTIA

Protosenya A.G., Veselova A.V.
Saint-Petersburg mining university of Empress Catherine II, Saint-Petersburg

Keywords: rock, kimberlite, Western Yakutia, statistical processing, goodness-of-fit test, gross errors, significance value, descriptive statistics.
Abstract. Physical properties and mechanical parameters of rocks are important for determining the geomechanical characteristics of rock massifs. The latter are fundamental in geotechnical design and numerical modeling. In this paper, the statistical processing of physical and mechanical properties of rock samples taken at the kimberlite field of Western Yakutia is carried out. Statistical processing includes rejection of unreliable values, construction of distribution histograms and verification of the law of distribution of a random variable by several criteria. Descriptive statistics of physical and mechanical properties indicators distributions are given in this paper. As a result, the main mechanical parameters that most accurately describe the studied section of the ore mass were determined, including uniaxial compressive strength, uniaxial tensile strength, elastic modulus, Poisson's ratio, triaxial compressive strength at lateral pressures of 5 and 10 MPa.

Введение. Статистическая обработка данных имеет большое значение в различных аспектах геологии [1, 2], геомеханики, а также во многих других науках [3-5]. Статистический анализ необходим для интерпретации результатов, полученных в ходе лабораторных испытаний образцов горных пород. Применяя описательную статистику и проверки гипотез, исследователи получают представление о характеристиках и свойствах изучаемых горных пород [6]. Статистические методы позволяют эффективно обрабатывать и анализировать большой объем данных, способствуя более точному описанию свойств и поведения горных пород.

Статистический анализ обеспечивает основу для принятия обоснованных решений в области геотехнической инженерии и механики горных пород. Анализируя изменчивость и неопределенность данных испытаний, инженеры могут оценить устойчивость горных пород, спроектировать безопасные конструкции и снизить потенциальные риски [7].

Для проверки гипотезы о соответствии эмпирического распределения теоретическому закону распределения используются такие статистические показатели, как критерии согласия.

Выделяют большое множество параметрических и непараметрических критериев, критериев, основанных на сравнении наблюдаемых и ожидаемых частот (хи-квадрат), на сравнении максимального отклонения между двумя функциями (критерий типа Колмогорова-Смирнова), на сравнении интеграла от квадрата разности между двумя функциями (критерий Крамера-Мизеса-Смирнова) и другие.

Выделяют специальные критерии нормальности, использующие характеризации нормального распределения и направленные на защиту нулевой гипотезы нормальности распределения от всевозможных альтернатив. К ним относятся следующие критерии [8, 9]: критерий Шапиро-Уилка, энтропийный критерий нормальности (критерий Васичека) [10], критерий Хегази-Грина [11], Али-Чёрго-Ревеса [12], корреляционный критерий Филлибена [13], регрессионный критерий нормальности Ла Брека [11, 14], критерий Локка-Спурье [15], критерий Оя [16], критерий среднего абсолютного отклонения (критерий Гири), критерий Дэвида-Хартли-Пирсона [17], комбинированный критерий Шпигельхальтера [18] и другие.

В данном исследовании статистический анализ применен для исследования прочностных свойств кимберлита на участке месторождения кимберлитовой трубки Западной Якутии, на котором проводилась доразведка глубоких горизонтов рудника.

Прочностные свойства образцов горных пород, полученные в результате бурения 32 геологоразведочных скважин на участке размером 250×250 м представлены в зависимости от глубины отбора образцов на рисунке 1.

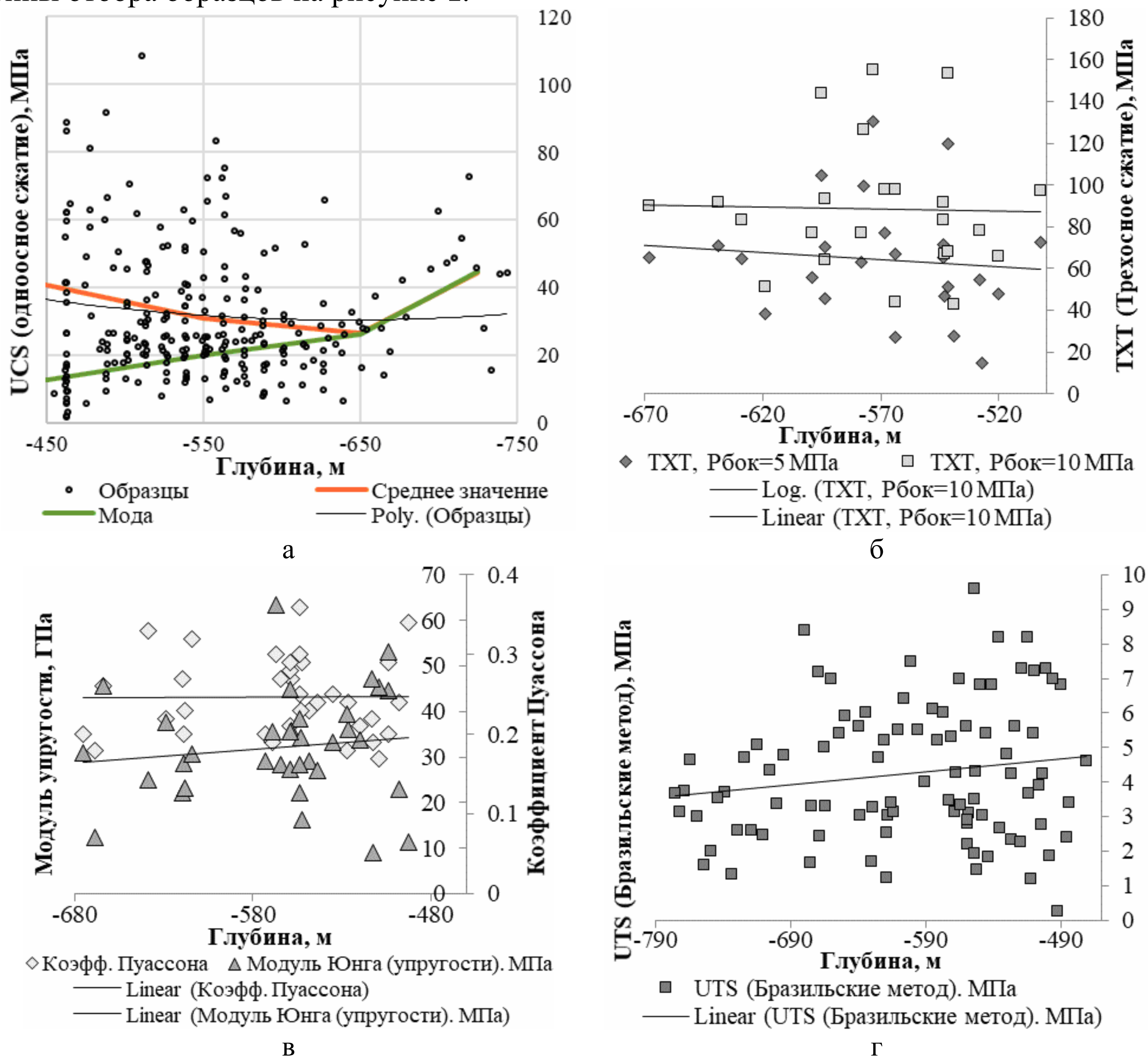


Рис. 1. Точечные диаграммы распределения физико-механических свойств образцов по глубине: а – прочность образцов на одноосное сжатие (UCS); б – прочность образцов на трехосное сжатие (ТХТ); в – модуль упругости (*E*) и коэффициент Пуассона (ν); г – прочность образцов на одноосное растяжение (UTS)

По рисунку 1,а-г видно, что линия аппроксимации на всех графиках практически горизонтальна, то есть по исследуемой глубине не наблюдается значительного изменения в ФМС горной породы, но эти показатели имеют достаточно большой разброс значений. Таким образом, для определения ФМС, которые смогут наиболее полно охарактеризовать данный участок массива применим статистическую обработку ФМС образцов кимберлитовой брекчии.

Методы. Отсеивание грубых погрешностей

Все грубые ошибки должны быть выявлены и исключены из рассмотрения в самом начале обработки наблюдений [19].

Критерии отсеивания грубых погрешностей в большинстве случаев основаны на предположении о том, что группа результатов измерений принадлежит нормальному распределению. Поэтому в начале любого статистического анализа данных определяют, хотя бы приблизительно, закон распределения и оценивают степень отклонения его от нормального.

Самый простой способ определения – визуальный, основанный на визуальной оценке распределения по гистограммам и величине коэффициентов асимметрии и эксцесса [20].

Рассмотрим гистограмму нормального (рис. 2) закона распределения известных геомеханических параметров: прочности породы при одноосном сжатии; при одноосном растяжении, трехосном сжатии, а также модуля упругости и коэффициента Пуассона.

Визуально видно, что распределения геомеханических параметров отличаются от нормального закона распределения – наблюдается правосторонняя асимметрия. В данном случае при представлении данных в виде среднего арифметического и стандартной ошибки среднего или среднеквадратического отклонения будет некорректным [21]. Наличие нормального распределения изучаемого признака расширяет возможности исследователя в отношении использования методов статистического анализа данных и повышает чувствительность статистических критериев [22]. Поэтому, если фактическое распределение похоже на скошенное влево или вправо нормальное распределение, во многих случаях рекомендуется приблизить распределение к нормальному с помощью математического преобразования [22].

В данном случае можно представить значения ФМС в виде натуральных логарифмов (рис. 3).

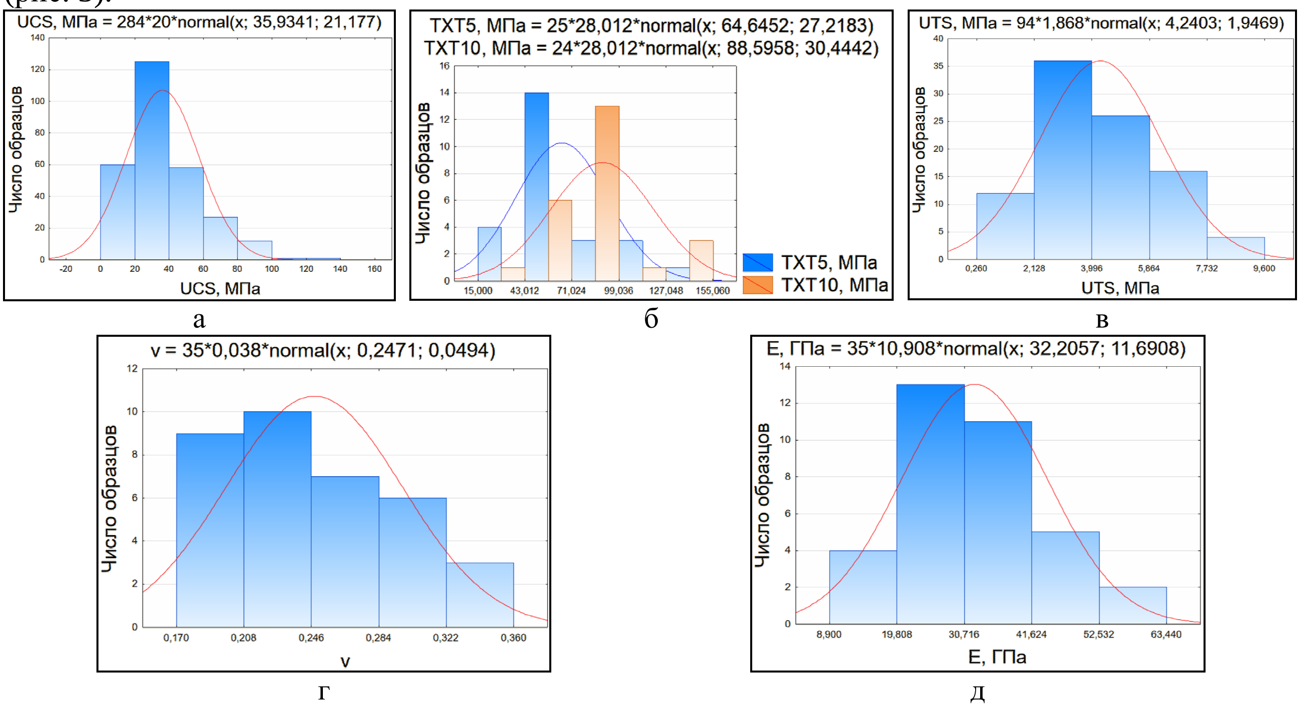
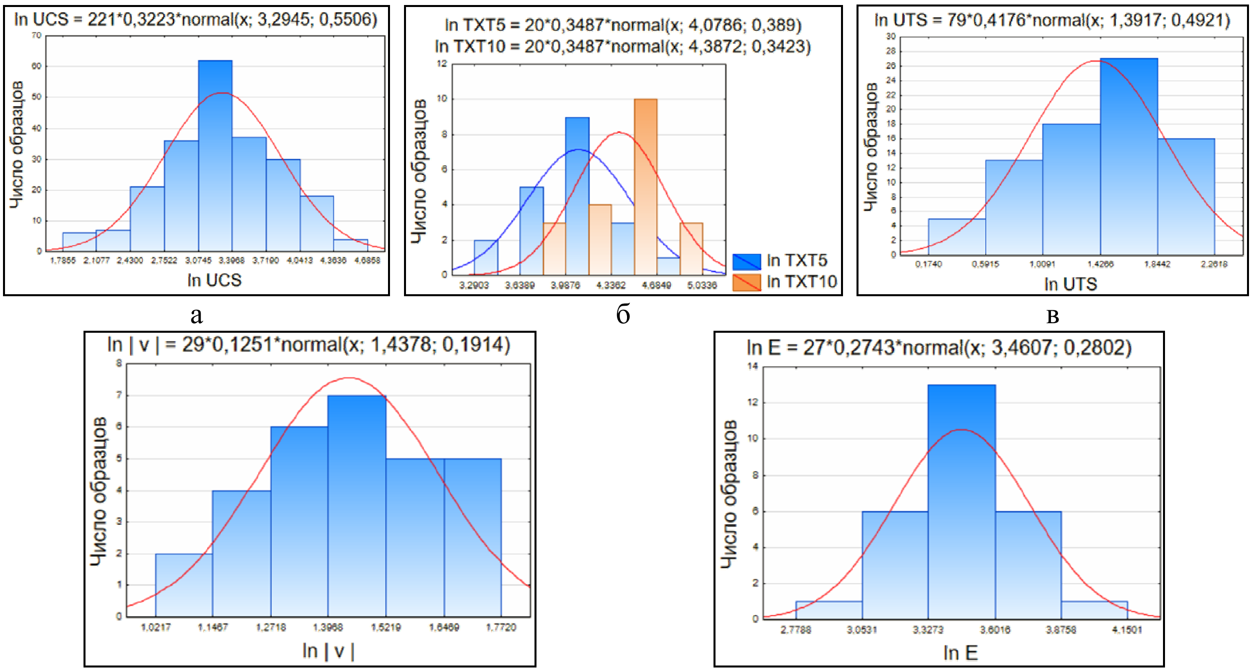


Рис. 2. Гистограммы нормального закона распределения физико-механических свойств образцов: а – прочность образцов на одноосное сжатие (UCS); б – прочность образцов на трехосное сжатие (TXT); в – прочность образцов на одноосное растяжение (UTS); г – модуль упругости (E); д – коэффициент Пуассона (ν)



а б в г д

Рис. 3. Гистограммы нормального закона распределения натуральных логарифмов физико-механических свойств образцов: а – прочность образцов на одноосное сжатие (UCS); б – прочность образцов на трехосное сжатие (TXT); в – прочность образцов на одноосное растяжение (UTS); г – модуль упругости (E); д – коэффициент Пуассона (ν)

Таким образом, при исключении грубых ошибок из выборок будем оперировать не самими значениями величины, а ее натуральным логарифмом.

Для исключения грубых ошибок применяются различные критерии. В зависимости от числа измерений можно применять критерий Смирнова-Граббса, критерий Родионова ($n \le 20$), критерий «трех сигм», критерий Стьюдента ($n = 50…100$), также если имеется выборка небольшого объема $n \le 25$, то можно воспользоваться методом вычисления максимального относительного отклонения.

1. *Метод Смирнова-Граббса*. Метод используется для отбраковки недостоверных данных [23]. Для двух выборок рассчитываются показатели: среднее значение x, среднеквадратичное (стандартное) отклонение S_x по формулам:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i / n, \quad (1)$$

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(\bar{x} - x_i\right)^2}, \quad (2)$$

где x_i – элемент выборки, n – число измерений.

Затем высчитывается выброс для каждого значения из выборки. Для аномально низких $x_{i\,\min}$ или высоких $x_{i\,\max}$ значений показателя x в выборке выброс рассчитывается как:

$$G_1 = [x_{i\max} - \bar{x}] / S_x, \quad (3)$$

$$G_2 = [\bar{x} - x_{i\min}] / S_x. \quad (4)$$

Полученные значения G сравнивают с максимально допустимым значением, то есть с предельным выбросом, приведенном в приложении к стандарту [23].

2. *Критерий В.И. Романовского*. Критерий применяется, если число измерений невелико, $n \le 20$. Для выборки рассчитывается соотношение:

$$\beta = \left| \left(x_i - \bar{x}\right) / S_x \right|, \quad (5)$$

где x_i – результат, вызывающий сомнение, β – коэффициент, предельное значение которого β_T определяют по таблице [19]. Если $\beta > \beta_T$, сомнительное значение x_i исключают как промах. Если $\beta < \beta_T$, x_i оставляют как равноправное в ряду наблюдений.

Здесь метод Смирнова-Граббса используется при обработке выборок с числом наблюдений больше 20, критерий Романовского – в выборках с числом наблюдений равном или менее 20.

Результаты вычислений по критериям приведены в таблице 1.

Табл. 1. Результаты статистической обработки при исключении грубых ошибок по выборкам

	ln(TXT), трехосное сжатие $P_{бок}$=10 МПа	ln(TXT), трехосное сжатие $P_{бок}$=5 МПа	ln(E) Модуль упругости	ln(ν) Коэфф. Пуассона	ln(UTS) прочность на одноосное растяжение (Бразильский метод)	ln(UCS) прочность на одноосное сжатие
Среднее значение	4,08	4,39	3,46	-1,44	1,39	3,29
Среднеквадратичное (стандартное) отклонение	0,39	0,34	0,28	0,19	0,49	0,55
Число наблюдений *n*	20	20	27	29	79	221
Предельный выброс	**2,78***	**2,78***	**2,876**	**2,876**	**3,291**	**3,632**
Максимальное значение выборки	4,79	5,03	4,15	-1,02	2,26	4,69
Выброс максимального значения выборки	1,82	1,89	2,46	2,17	1,77	2,53
Минимальное значение выборки	3,29	3,76	2,19	-1,77	0,17	1,79
Выброс минимального значения выборки	-2,03	-1,84	**-3,03**	-1,75	-2,47	-2,74
Отброшенное значение (макс/мин)	-	-	мин (2,19)	-	-	-
После отброса 1-го измерения						
Минимальное значение выборки	-	-	2,52	-	-	-
Выброс минимального значения выборки	-	-	**-2,77**	-	-	-
После отброса 2-го измерения						
Минимальное значение выборки	-	-	2,78	-	-	-
Выброс минимального значения выборки	-	-	-2,43	-	-	-
* значение критерия Романовского при уровне значимости 0,05.						

Оценка значимости нормального закона распределения физико-механических свойств

Для проверки нормальности распределения логарифмов физико-механических свойств (ФМС) необходимо сформулировать статистическую простую гипотезу о виде закона распределения исследуемой случайной величины (в данном случае для нормального логарифма ФМС).

Выдвинутая гипотеза называется нулевой (основной). Ее принято обозначать H_0. Предполагается, что действительное различие сравниваемых величин равно нулю, а выявленное по данным отличие от нуля носит случайный характер. Нулевая гипотеза отвергается тогда, когда по выборке получается результат, который при истинности выдвинутой нулевой гипотезы маловероятен.

По отношению к высказанной (основной) гипотезе всегда можно сформулировать альтернативную (конкурирующую), противоречащую ей. Альтернативную (конкурирующую) гипотезу принято обозначать H_1.

Чтобы подтвердить или опровергнуть нулевую гипотезу используются различные параметрические и непараметрические критерии [24]: критерий Пирсона (χ^2) [25]; критерий Мизеса-Смирнова (ω^2) [23]; критерий типа Колмогорова-Смирнова [26], критерий Лильефорса (поправка Лильефорса), критерий Шапиро-Уилка [27], критерий Шапиро-Франчиа [27] и другие.

Критерии типа Колмогорова-Смирнова, Мизеса-Смирнова и Пирсона применимы к выборкам с большим числом наблюдений (n > 50…100). Критерии Шапиро-Уилка и Эппса-Палли подходит в большей степени для малых объемов выборок (для выборок с 8 < n < 50) [28]. Таким образом, для оценки нормальности распределения логарифмов ФМС будут использованы критерии Шапиро-Уилка и Эппса-Палли для выборок небольшого объема (TXT5, TXT10, E, ν), критерий Пирсона и типа Колмогорова-Смирнова – для выборок UTS и UCS.

1. *Критерий Пирсона* χ^2 – основывается на том, что в двухвходовой таблице ожидаемые частоты при гипотезе, что между переменными нет зависимости, можно непосредственно вычислить [29]. Это наиболее простой критерий проверки значимости расхождения эмпирических (наблюдаемых) и теоретических (ожидаемых) частот. Формула определения критерия Пирсона:

$$\chi^2 = \sum \frac{\left(f_{\text{н}} - f_{\text{т}}\right)^2}{f_{\text{т}}}, \tag{6}$$

где $f_{\text{н}}$ – наблюдаемая частота; $f_{\text{т}}$ – теоретическая частота.

Ограничения при использовании критерия Пирсона [30]:

1) объем выборки должен быть больше 30 ($n \geq 30$);

2) теоретическая частота каждой ячейки таблицы не должна быть меньше 5 ($f \geq 5$);

3) выбранные разряды должны охватывать весь диапазон вариативности признаков;

4) разряды должны быть неперекрещивающимися.

2. *Критерий типа Колмогорова-Смирнова* основан на сравнении теоретической и эмпирической функций распределения вероятностей. Проверяет, что эмпирическое распределение соответствует теоретическому. Статистика типа Колмогорова-Смирнова [26]:

$$\sqrt{n}D_n(\theta^*) = \sqrt{n}\sup_x |F_n(x) - F(x;\theta^*)|, \tag{7}$$

где $F_n(x)$ – эмпирическая функция распределения случайной величины x, представленной выборкой $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$; $F(x)$ – полностью определенная (с точностью до параметров) теоретическая функция распределения; n – объем выборки; θ* – оценка [26]; sup – точная верхняя граница разностей.

Особенности данного критерия следующие:

1) чувствителен к отличиям в форме распределений и их сдвигу относительно друг друга;

2) плохо работает на маленьких выборках;

3) применим только для непрерывных распределений;

3. Критерий (поправка) Лильефорса – это вариант критерия Колмогорова-Смирнова, применяемый, когда среднее и дисперсия заранее неизвестны. Наиболее применим при большом объеме выборки. В работе [31] приведены критические значения для критериев нормальности Колмогорова-Смирнова и Лильефорса.

4. Критерии Шапиро-Уилка базируется на сравнении линейной комбинации разностей порядковых статистик и параметрической оценки [28]:

$$S = \sum a_k [x_{n+1-k} - x_k], \tag{8}$$

где k – индекс, имеющий значения от 1 до n/2 или от 1 до (n – 1)/2 при четном и нечетном соответственно; α_k – коэффициент, имеющий специальные значения для объема выборки n.

Статистика критерия [28]:

$$W = S^2 / \left(\sum (x_i - \overline{x})^2\right). \tag{9}$$

5. *Критерий Эппса-Палли* основан на сравнении характеристических функций выборочных данных и нормального распределения [32]. Статистика критерия вычисляется по формуле [28]:

$$T_{\text{EP}} = 1 + \frac{n}{\sqrt{3}} + \frac{2}{n}\sum_{k=2}^{n}\sum_{j=1}^{k-1}\exp\left\{\frac{-(x_j - x_k)^2}{2S^2}\right\} - \sqrt{2}\sum_{j=1}^{n}\exp\left\{\frac{-(x_j - \overline{x})^2}{4S^2}\right\}. \tag{10}$$

Критерий применим при $n \geq 8$ и является сильным конкурентом критерия Шапиро-Уилка [27].

При применении вышеупомянутых критериев достигнутый уровень значимости *p* оценивается по критическому уровню значимости (принятый 0,05). *p*-уровень представляет собой вероятность ошибки, связанной с распространением наблюдаемого результата на всю генеральную совокупность [29]. *p*-уровень обычно принимается равным 0,05 [33], он показывает, что имеется 5%-я вероятность того, что найденная в выборке зависимость между переменными является лишь случайной особенностью данной выборки [29]. Если достигнутый уровень выше критического уровня, то нулевая гипотеза о сходстве распределений принимается, значит, распределение не отличается от ожидаемого (нормального) [34]. Соответственно, если *p* меньше 0,05, то распределение отличается от ожидаемого (нормального).

p-уровень зависит от применяемого критерия согласия. В таблицах 2 и 3 приведены результаты расчета уровня значимости *p* по различным критериям согласия.

Программный пакет для статистического анализа Statistica используется для оценки закона распределения физико-механических свойств образцов горных пород.

Таким образом, по имеющимся данным можно считать, что натуральные логарифмы ФМС имеют нормальное распределение. Теперь рассмотрим описательные статистики для натуральных логарифмов ФМС: TXT5, TXT10, *E*, ν, UTS и UCS (табл. 4).

Табл. 2. Критерии согласия и уровни значимости при нормальном распределении физико-механических свойств

Показатели физико-механических свойств	Критерий типа Колмогорова-Смирнова	Критерий Пирсона	Критерий (поправка) Лильефорса	Критерии Шапиро-Уилка	Критерий Эппса-Палли	Вывод
TXT5 (объемное сжатие при $P_{бок}$ = 5 МПа)	$d = 0{,}134$, $p > 0{,}20$	–	$p > 0{,}20$	$W = 0{,}962$, $p = 0{,}563$	$T = 0{,}117$, $p > 0{,}1$	норм
TXT10 (объемное сжатие при $P_{бок}$ = 10 МПа)	$d = 0{,}181$, $p > 0{,}20$	–	$p < 0{,}20$	$W = 0{,}923$, $p = 0{,}114$	$T = 0{,}301$, $p > 0{,}05$	норм
E (модуль упругости)	$d = 0{,}105$, $p > 0{,}20$	$\chi^2 = 1{,}187$, $p = 0{,}276$	$p > 0{,}20$	$W = 0{,}965$, $p = 0{,}445$	$T = 0{,}088$, $p > 0{,}1$	норм
ν (коэффициент Пуассона)	$d = 0{,}103$, $p > 0{,}20$	$\chi^2 = 1{,}915$, p = 0,166	$p > 0{,}20$	$W = 0{,}961$, $p = 0{,}376$	$T = 0{,}155$, $p > 0{,}1$	норм
UTS (прочность на одноосное растяжение)	$d = 0{,}101$, $p > 0{,}20$	$\chi^2 = 11{,}342$, $p = 0{,}12$	$\boldsymbol{p < 0{,}05}$	$W = 0{,}966$, $\boldsymbol{p = 0{,}039}$	$T = 0{,}386$, $\boldsymbol{p < 0{,}05}$	норм
UCS (прочность на одноосное сжатие)	$d = 0{,}14$, $p < 0{,}10$	$\chi^2 = 66{,}696$, $\boldsymbol{p^{**} = 0{,}000}$	$p < 0{,}10$	$W = 0{,}992$, $\boldsymbol{p = 0{,}000}$	$T = 4{,}438$, $\boldsymbol{p < 0{,}001}$	норм

* выделенные ячейки, расположенные напротив конкретного показателя ФМС, говорят о малой пригодности этого критерия;
** уровень значимости $\boldsymbol{p < 0{,}05}$

Табл. 3. Критерии согласия и уровни значимости при логнормальном распределении физико-механических свойств

Показатели физико-механических свойств	Критерий типа Колмогорова-Смирнова	Критерий Пирсона	Критерий (поправка) Лильефорса	Критерии Шапиро-Уилка	Критерий Эппса-Палли	Вывод
ln TXT5 (объемное сжатие при $P_{бок}$ = 5 МПа)	d = 0,117, p > 0,20	–	p > 0,20	W = 0,963, p = 0,602	T =0,061, p > 0,1	норм
ln TXT10 (объемное сжатие при $P_{бок}$ = 10 МПа)	d = 0,133, p > 0,20	–	p > 0,20	W = 0,965, p = 0,657	T =0,026, p > 0,1	норм
ln E (модуль упругости)	d = 0,093, p > 0,20	χ^2 = 0,729, p = 0,393	p > 0,20	W = 0,977, p = 0,786	T = 0,038, p > 0,1	норм
| ln ν | (коэффициент Пуассона)	d = 0,094, p > 0,20	χ^2 =1,745 p = 0,418	p > 0,20	W = 0,9775, p = 0,772	T = 0,071, p > 0,1	норм
ln UTS (прочность на одноосное растяжение)	d = 0,093, p > 0,20	χ^2 = 8,899, p = 0,113	p < 0,10	W = 0,964, **p** = 0,024**	T = 0,447, **p < 0,025**	норм
ln UCS (прочность на одноосное сжатие)	d = 0,05, p > 0,20	χ^2 = 12,322, p = 0,196	p < 0,20	W = 0,992, p = 0,267	T = 0,06, p > 0,1	норм

* выделенные ячейки, расположенные напротив конкретного показателя ФМС, говорят о малой пригодности этого критерия.
** уровень значимости **p < 0.05**

Описательная статистика

В прошлом разделе были подобраны наиболее подходящие законы распределения для рассматриваемых ФМС горных пород. Рассмотрим описательные статистики для распределений, наиболее близких к нормальному, т.е. распределений значений ФМС или их натуральных логарифмов (табл. 4 и 5): среднее арифметическое значение, медиана, стандартное отклонение, степени асимметрии и эксцесса.

Табл. 4. Описательные статистики нормальных распределений физико-механических свойств

ФМС	Объем выборки	Среднее зн.	Медиана	Мин. знач.	Макс. знач.	Стандарт. откл.	Асимметрия	Эксцесс
UCS	219	30,61	25,90	5,96	83,50	16,35	1,032	0,559
UTS	78	4,42	4,29	1,19	8,40	1,90	0,241	-0,908
E	28	30,38	29,84	8,90	45,30	9,12	-0,478	0,145
ν	28	0,24	0,24	0,17	0,32	0,04	0,225	-0,975
TXT5	21	60,99	63,10	15,00	120,00	25,62	0,514	0,481
TXT10	20	85,00	80,55	42,84	153,48	29,56	0,886	0,697

Медиана – это квантиль, соответствующая вероятности 0,5, т.е. это значение, которое разбивает выборку на две равные части по количеству элементов [29]. Одна половина наблюдений лежит ниже медианы, вторая половина – выше.

Стандартное отклонение – это корень квадратный из суммы квадратов отклонений значений переменной от среднего значения, деленное на (n – 1) [29].

Асимметрия – это мера симметричности распределения. Если распределение симметрично, то асимметрия равна нулю, если асимметрия существенно отличается от 0, то распределение несимметрично. Нормальное и равномерное распределения абсолютно симметричны. Асимметрия распределения с длинным правым хвостом положительна. Если распределение имеет длинный левый хвост, то его асимметрия отрицательна. [29]

Эксцесс – мера остроты пика распределения [29]. Если распределение нормальное, то эксцесс равен 0. Если эксцесс положителен, то пик заострен, если отрицателен, то пик закруглен.

Табл. 5. Описательные статистики логнормальных распределений физико-механических свойств

ФМС	Объем выборки	Среднее зн.	Медиана	Мин. знач.	Макс. знач.	Стандарт. откл.	Асимметрия	Эксцесс
ln UCS	221	3,29	3,26	1,79	4,69	0,55	-0,117	-0,064
$e^{\ln UCS}$	-	26,96	26,10	5,96	108,40	1,73	-	-
ln UTS	79	1,39	1,46	0,17	2,26	0,49	-0,536	-0,329
$e^{\ln UTS}$	-	4,02	4,29	1,19	9,60	1,64	-	-
ln *E*	27	3,46	3,50	2,78	4,15	0,28	-0,029	0,911
$e^{\ln E}$	-	31,84	33,25	16,10	63,44	1,32	-	-
ln *ν*	29	-1,44	-1,43	-1,77	-1,02	0,19	0,163	-0,681
$e^{\ln \nu}$	-	0,24	0,24	0,17	0,36	1,21	-	-
ln TXT5	20	4,08	4,16	3,29	4,79	0,39	-0,320	0,242
$e^{\ln TXT5}$	-	59,06	64,04	26,85	120,00	1,48	-	-
ln TXT10	20	4,39	4,39	3,76	5,03	0,34	-0,010	-0,001
$e^{\ln TXT10}$	-	80,41	80,51	42,84	153,48	1,41	-	-

Согласно примененных к нормальным и логнормальным распределениям описательных статистик сделаны следующие выводы.

1. Значения асимметрии и эксцесса у UCS, *E*, TXT5 и TXT10 подтверждают, что их распределения в большей степени удовлетворяют логнормальному закону распределения.

2. Степень асимметрии у распределения UTS более чем в 2 раза меньше, чем у распределения натурального логарифма UTS, при этом значение эксцесса остается в допустимых пределах (меньше ±1) [22]. Таким образом, для показателя UTS принимаем нормальное распределение.

3. Степень асимметрии и эксцесса у нормального распределения логарифмов *ν* меньше, чем у нормального распределения *ν*, поэтому для показателя *ν* принимаем нормальное распределение логарифмов.

Результаты

В результате проведенного исследования с помощью статистической обработки данных испытаний образцов горной породы были определены ФМС кимберлитовой брекчии, наиболее точно описывающие исследуемый участок рудного массива.

Принятые значения ФМС участка рудного массива приведены в таблице 6.

Табл. 6. Значения физико-механических свойств кимберлита исследуемого участка рудного массива

Физико-механические свойства	UCS (прочность на одноосное сжатие), МПа	UTS (прочность на одноосное растяжение), МПа	*E* (модуль упругости), ГПа	*ν* (коэффициент Пуассона)	TXT5 (прочность на трехосное сжатие при *P* = 5 МПа), МПа	TXT10 (прочность на трехосное сжатие при *P* = 10 МПа), МПа
Значения ФМС	26,96	4,42	31,84	0,24	59,06	80,41

Выводы

Согласно примененных к нормальным и логнормальным распределениям критериев согласия сделаны следующие выводы.

1. Распределения показателей прочности на трехосное сжатие ТХТ5 и ТХТ10, а также показателей модуля упругости E и коэффициента Пуассона ν по критериям Шапиро-Уилка (W) и Эппса-Палли (T) можно отнести как к нормальному, так и к логнормальному (значение p-уровня более 0,05).

2. По гистограммам (рис. 2,б и рис. 3,б), а также по численным значениям критериев W и T распределения ТХТ5 и ТХТ10 больше соответствуют логнормальному распределению.

3. Распределение показателя модуля упругости E по критериям W и T по гистограммам (рис. 2,д и рис. 3,д), а также по численным значениям вышеуказанных критериев принимаем логнормальным (уровень значимости р по критерию W почти в 2 раза выше для логнормального распределения).

4. Распределение показателя коэффициента Пуассона ν по критериям W и T по гистограммам (рис. 2,г и 3,г), а также по численным значениям вышеуказанных критериев следует принять логнормальным (уровень значимости р по критерию W почти в 2 раза выше для логнормального распределения).

5. Следует отметить, что у показателей ν (рис. 2,г и 3,г) и UTS (рис. 2,в и 3,в) до логарифмирования наблюдалась правосторонняя асимметрия, которая после преобразования стала левосторонней, что не в полной мере удовлетворяет ни логнормальному закону, ни логнормальному. Поэтому для выбора наиболее подходящего закона распределения для этих ФМС были рассмотрены описательные статистики (табл. 4 и 5).

6. Для распределений показателей ТХТ5 и ТХТ10, E и ν были также рассчитаны критерии типа Колмогорова-Смирнова (d), поправка Лильефорса и Пирсона (χ^2), которые также показали соответствие распределений показателей ФМС нормальному и логнормальному распределениям, но применение их не рекомендуется в связи малым объемом статистических совокупностей ФМС.

7. Распределения показателей прочности на одноосное сжатие UCS и растяжение UTS по критериям типа Колмогорова-Смирнова, по поправке Лильефорса и критерию Пирсона и уровню значимости удовлетворяют логнормальному распределению, при этом проверка на нормальное распределение показателя UCS критерий χ^2 показала низкий уровень значимости ($p < 0.05$), а у показателя UTS низкий уровень значимости показала поправка Лильефорса.

8. Для распределений показателей UCS и UTS были также рассчитаны критерии W и T, в соответствие с которыми не следует принимать нормальный закон распределения для данных показателей ФМС. Но применение W и T не рекомендуется в связи большим объемом статистических совокупностей UCS и UTS.

Список литературы

1. Легостаева Я.Б., Гололобова А.Г., Попов В.Ф., Макаров В.С. Геохимические свойства и трансформация микроэлементного состава почв при разработке коренных месторождений алмазов Якутии // Записки Горного института. – 2023. – Т. 260. – С. 212-225. – DOI: 10.31897/PMI.2023.35.
2. Симаков С.К., Стегницкий Ю.Б. О наличии постмагматической стадии формирования алмазов в кимберлитах // Записки Горного института. – 2022. – Т. 255. – С. 319-326. – DOI: 10.31897/PMI.2022.22.
3. Евдокимов С.И., Герасименко Т.Е. Определение рационального расхода пара при флотации апатит-нефелиновых руд паровоздушной смесью // Записки Горного института. – 2022. – Т. 256. – С. 567-578. – DOI: 10.31897/PMI.2022.62.
4. Быкова Е.Н., Хайкин М.М., Шабаева Ю.И., Белобородова М.Д. Развитие методологии экономической оценки земельных участков для добычи и переработки твердых полезных ископаемых // Записки Горного института. – 2023. – Т. 259. – С. 52-67. – DOI: 10.31897/PMI.2023.6.
5. Кабанов Е.И., Туманов М.В., Сметанин В.С., Романов К.В. Инновационный подход к профилактике травм на горнодобывающих предприятиях на основе управления человеческим фактором // Записки Горного института. – 2023. – Т. 263. – С. 774-784.
6. Németh A., Török Á. Statistical analysis of heat-induced rock physics and mineralogical alteration processes of monzogranite samples from Bátaapáti, Hungary // GEM-International Journal on Geomathematics. 2023, vol. 14, no. 1, p. 23. doi.org/10.1007/s13137-023-00234-9.

7. Blair S.C., Cook N.G.W. Analysis of compressive fracture in rock using statistical techniques: Part I. A non-linear rule-based model // International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences. 1998, vol. 35, no. 7, pp. 837-848. doi.org/10.1016/S0148-9062(98)00008-4.
8. Лемешко Б.Б., Попов А.А., Селезнев В.В. Критерии проверки отклонения распределения от нормального закона. Руководство по применению. – М.: ИНФРА-М Publ., 2023. – 353 с. – DOI: 10.12737/1896110.
9. Кобзарь А.И. Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 816 с.
10. Vasicek O. A Test for Normality Based on Sample Entropy // Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological). 1976, vol. 38, no. 1, pp. 54-59. doi.org/10.1002/9781119186229.ch35.
11. Зыков С.В., Незнанов А.А, Максименкова О.В. Критерии отклонения распределения случайных величин от нормального в математическом обеспечении программных систем поддержки измерений в образовании // Программные системы: Теория и приложения. – 2018. – Т. 9, № 4. – С. 199-218. – DOI: 10.25209/2079-3316-2018-9-4-199-218.
12. Aly E.E., Csorgo M. Quadratic nuisance parameter-free goodness-of-fit tests in the presence of location and scale parameters // Canadian Journal of Statistics. 1985, vol. 13, pp. 53-70.
13. Filliben J.J. The Probability Plot Correlation Coefficient Test for Normality // Technometrics. 1975, vol. 17, no. 1, pp. 111-117.
14. LaBrecque J. Goodness-of-fit tests based on nonlinearity in probability plots // Technometrics. 1977, vol. 19, pp. 293-306.
15. Locke C., Spurrier J. D. The use of U-statistics for testing normality against nonsymmetrical alternative // Biometrika. 1976, vol. 63, no. 1, pp. 143-147.
16. Oja H. Two location and scale-free goodness-of-fit tests // Biometrika. 1981, vol. 68, no. 3, pp. 637-640.
17. David H.A., Hartley H.O., Pearson E.S. The distribution of the ratio, in a single normal sample, of range to standard deviation // Biometrika. 1954, vol. 41, pp. 482-493.
18. Spiegelhalter D.J.A test for normality against symmetric alternatives // Biometrika. 1977, vol. 64, no 2, pp. 415-418.
19. Гапеева В.Д., Цыбенко В.А. Отсеивание грубых погрешностей результатов измерений с помощью различных критериев в среде Excel // Молодой ученый. – 2021. – № 49 (391). – С. 20-27.
20. Афанасьев В.П., Бабенко В.В., Герасимчук А.В., Зинчук Н.Н., Романов Н.Н., Черный Е.Д. Обработка геологической информации на микрокалькуляторах. – М.: Недра, 1988. – 134 с.
21. Гржибовский А.М. Выбор статистического критерия для проверки гипотез // Экология человека. – 2008. – № 11. – С. 48-57.
22. Гржибовский А.М., Иванов С.В., Горбатова М.А. Описательная статистика с использованием пакетов статистических программ Statistica и SPSS // Наука и здравоохранение. – 2016. – №. 1. – С. 7-23.
23. ГОСТ Р 8.736-2011. Государственная система обеспечения единства измерений. Измерения прямые многократные. Методы обработки результатов измерений. Основные положения: национальный стандарт Российской Федерации: дата введения 2011-13-12 / Федеральное агентство по техническому регулированию и метрологии. – Изд. официальное. – М.: Стандартинформ, 2019. – 26 с.
24. Лемешко Б.Ю., Лемешко С.Б. О сходимости распределений статистик и мощности критериев однородности Смирнова и Лемана-Розенблатта // Измерительная техника. – 2005. – № 12. – С. 9-14.
25. Гафарова Л.М., Завьялова И.Г., Мустафин Н.Н. Об особенностях применения критерия согласия Пирсона $\chi 2$ // Экономические и социально-гуманитарные исследования. – 2015. – № 4(8). – С. 63-67.
26. Орлов А.И. Непараметрические критерии согласия Колмогорова, Смирнова, омега-квадрат и ошибки при их применении // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета. – 2014. – № 97. – С. 31-45.
27. Александровская Л.Н., Кириллин А.В. Рекомендации по применению ряда критериев проверки отклонения распределения вероятностей от нормального закона в практике инженерного статистического анализа // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. – 2017. – Т. 19, № 1-1. – С. 82-90.
28. ГОСТ Р ИСО 5479-2002. Статистические методы. Проверка отклонения распределения вероятностей от нормального распределения: государственный стандарт Российской Федерации: дата введения 2002-22-01 / Госстандарт России. – Изд. официальное. – М.: Госстандарт, 2019. – 26 с.
29. Боровиков В. STATISTICA. Искусство анализа данных на компьютере: Для профессионалов. 2-е изд. – СПб.: Питер, 2003. – 688 с.
30. Стецкова В.В, Зотова С.А., Светличная В.Б., Матвеева Т.А Критерий Пирсона: сущность и применение метода на практике // Студенческий научный форум-2017. IX Международная студенческая электронная научная конференция. – Саратов: РАЕ, 2017. – С. 2017037806.
31. Molin P., Abdi H. New Table and Numerical Approximations for Kolmogorov-Smirnov/Lilliefors/van Soest Normality Tes. – Dijon: University of Bourgogne, 1998. – 12 p.
32. Лемешко Б.Ю., Лемешко С.Б. Сравнительный анализ критериев проверки отклонения распределения от нормального закона // Метрология. – 2005. – №2. – С. 3-24.
33. Унгуряну Т.Н., Гржибовский А.М. Краткие рекомендации по описанию, статистическому анализу и представлению данных в научных публикациях // Экология человека. – 2011. – №. 5. – С. 55-60.

34. Гржибовский А.М. Типы данных, проверка распределения и описательная статистика // Экология человека. – 2008. – № 1. – С. 52-60.

References

1. Legostaeva Ya.B., Gololobova A.G., Popov V.F., Makarov V.S. Geochemical properties and transformation of the microelement composition of soils during the development of primary diamond deposits in Yakutia // Journal of Mining Institute. 2023, vol. 260, pp. 212-225. DOI: 10.31897/PMI.2023.35.
2. Simakov S.K., Stegnitskiy Yu.B. On the presence of the postmagmatic stage of diamond formation in kimberlites // Journal of Mining Institute. 2022, vol. 255, pp. 319-326. DOI: 10.31897/PMI.2022.22.
3. Evdokimov S.I., Gerasimenko T.E. Determination of rational steam consumption in steam-air mixture flotation of apatite-nepheline ores // Journal of Mining Institute. 2022, vol. 256, pp. 567-578. DOI: 10.31897/PMI.2022.62.
4. Bykowa E.N., Khaykin M.M., Shabaeva Y.I., Beloborodova M.D. Development of methodology for economic evaluation of land plots for the extraction and processing of solid minerals // Journal of Mining Institute. 2023, vol. 259, pp. 52-67. DOI: 10.31897/PMI.2023.6
5. Kabanov E.I., Tumanov M.V., Smetanin V.S., Romanov K.V. An innovative approach to injury prevention in mining companies through human factor management // Journal of Mining Institute. 2023, vol. 263, pp. 774-784.
6. Németh A., Török Á. Statistical analysis of heat-induced rock physics and mineralogical alteration processes of monzogranite samples from Bátaapáti, Hungary // GEM-International Journal on Geomathematics. 2023, vol. 14, no. 1, p. 23. doi.org/10.1007/s13137-023-00234-9.
7. Blair S.C., Cook N.G.W. Analysis of compressive fracture in rock using statistical techniques: Part I. A non-linear rule-based model // International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences. 1998, vol. 35, no. 7, pp. 837-848. doi.org/10.1016/S0148-9062(98)00008-4.
8. Lemeshko B.B., Popov A.A., Seleznev V.V. Criteria for checking the deviation of the distribution from the normal law. Application Guide. – M.: INFRA-M Publ., 2023. – 353 p. – DOI: 10.12737/1896110.
9. Kobzar A.I. Applied mathematical statistics. For engineers and scientists. – M.: FIZMATLIT, 2006. – 816 p.
10. Vasicek O. A Test for Normality Based on Sample Entropy // Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological). 1976, vol. 38, no. 1, pp. 54-59. doi.org/10.1002/9781119186229.ch35.
11. Zykov S.V., Neznanov A.A., Maksimenkova O. V. Tests for normality as mathematical support for educational measurement software // Program Systems: Theory and Applications. 2018, vol. 9, no. 4, pp. 199-218. DOI: 10.25209/2079-3316-2018-9-4-199-218.
12. Aly E.E., Csorgo M. Quadratic nuisance parameter-free goodness-of-fit tests in the presence of location and scale parameters // Canadian Journal of Statistics. 1985, vol. 13, pp. 53-70.
13. Filliben J.J. The Probability Plot Correlation Coefficient Test for Normality // Technometrics. 1975, vol. 17, no. 1. pp. 111-117.
14. LaBrecque J. Goodness-of-fit tests based on nonlinearity in probability plots // Technometrics. 1977, vol. 19, pp. 293-306.
15. Locke C., Spurrier J. D. The use of U-statistics for testing normality against nonsymmetrical alternative // Biometrika. 1976, vol. 63, no. 1, pp. 143-147.
16. Oja H. Two location and scale-free goodness-of-fit tests // Biometrika. 1981, vol. 68, no. 3, pp. 637-640.
17. David H.A., Hartley H.O., Pearson E.S. The distribution of the ratio, in a single normal sample, of range to standard deviation // Biometrika. 1954, vol. 41, pp. 482-493.
18. Spiegelhalter D.J.A test for normality against symmetric alternatives // Biometrika. 1977, vol. 64, no 2, pp. 415-418.
19. Gapeeva V.D., Cybenko V.A. Screening of gross errors of measurement results using various criteria in Excel environment // Young scientist. 2021, vol. 49, no. 391, pp. 20-27.
20. Afanas`ev V.P., Babenko V.V., Gerasimchuk A.V., Zinchuk N.N., Romanov N.N., Cherny`j E.D. Processing of geological information on microcalculators. – M.: Nedra, 1988. – 134 p.
21. Grzhibovskij A.M. Selection of statistical criterion for hypothesis testing // Human ecology. 2008, no. 11, pp. 48-57.
22. Grzhibovskij A.M., Ivanov S.V., Gorbatova M.A. Descriptive statistics using Statistica and SPSS statistical software packages // Science and healthcare. 2016, no. 1, pp. 7-23.
23. GOST R 8.736-2011. State System for Ensuring Uniformity of Measurements. Direct multiple measurements. Methods of measurement results processing. Basic provisions: National Standard of the Russian Federation: date of introduction 2011-13-12 / Federal Agency for Technical Regulation and Metrology. – Official edition. – M.: Standartinform, 2019. – 26 p.
24. Lemeshko B.Yu., Lemeshko S.B. Statistical distribution convergence and homogeneity test power for Smirnov and Lehmann–Rosenblatt tests // Measuring equipment. 2005, vol. 12, pp. 9-14.
25. Gafarova L.M., Zav`yalova I.G., Mustafin N.N. On the peculiarities of application of Pearson's $\chi 2$ criterion of agreement // Economic and socio-humanitarian studies. 2015, vol. 4, no. 8. pp. 63-67.
26. Orlov A.I. Nonparametric goodness-of-fit Kolmogorov, Smirnov, omega-square tests and the errors in their application // Polythematic online electronic scientific journal of the Kuban State Agrarian University. 2014, vol. 97, pp. 31-45.

27. Aleksandrovskaya L.N., Kirillin A.V. Recommendations for the use some of tests for the probability distribution of deviation from the normal distribution law in practice of the statistical engineering analysis // News of Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences. 2017, vol. 19, no. 1, pp. 82-90.
28. GOST R ISO 5479-2002. Statistical methods. Tests for departure of the probability distribution from the normal distribution: from 22th January 2002 / Gosstandart of Russia. – Official edition. – M.: Gosstandart, 2019. – 26 p.
29. Borovikov V. STATISTICA. The Art of Analyzing Data on the Computer: For Professionals. 2nd ed. – SPb.: Piter, 2003. – 688 p.
30. Steczkova V.V, Zotova S.A., Svetlichnaya V.B., Matveeva T.A Pearson criterion: the nature and application of the method in practice // Student Scientific Forum-2017. IX International Student Electronic Scientific Conference. – Saratov: RAE, 2017. – P. 2017037806.
31. Molin P., Abdi H. New Table and Numerical Approximations for Kolmogorov-Smirnov/Lilliefors/van Soest Normality Tes. – Dijon: University of Bourgogne, 1998. – 12 p.
32. Lemeshko B.Yu., Lemeshko S.B. Comparative analysis of criteria for testing the deviation of the distribution from the normal law distribution deviation from the normal law // Metrology. 2005, vol. 2, pp. 3-24.
33. Unguryanu T.N., Grjibovski A.M. Brief recommendations on description, analysis and presentation of data in scientific papers // Human ecology. 2011, vol. 5, pp. 55-60.
34. Grjibovski A.M. Data types, control of distribution and descriptive statistics // Human ecology. 2008, vol. 1, pp. 52-60.

Сведения об авторах:	*Information about authors:*
Веселова Анастасия Владимировна – аспирант	**Veselova Anastasia Vladimirovna –** postgraduate student
Протосеня Анатолий Григорьевич – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой СГПиПС	**Protosenya Anatoly Grigorievich –** doctor of technical sciences, professor, head of the department of CME&US
s225061@stud.spmi.ru	

Получена 21.03.2024