

## ТЕМПЕРАТУРНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ ТОНКОЙ УПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ

*Хоа Ван Донг<sup>1</sup>, Во Ань Хиеу<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),  
Москва;*

<sup>2</sup>*Академия военных наук и технологий, Ханой, Вьетнам*

**Ключевые слова:** принцип сжатых отображений, теорема о неподвижной точке, упругость, пластина, полное решение, метод Сен-Венана–Пикара–Банаха, граничные условия, краевой эффект.

**Аннотация.** На уравнениях теории упругости итерационно-асимптотическим методом получено аналитическое решение для прямоугольной полосы при действии термоэластичной нагрузки. Сведение задачи от трехмерной к постановке с новыми неизвестными – функциями двух координат, – выполнено путем интегрирования по координате толщины. Построенный при этом итерационный процесс позволяет находить методом последовательных приближений выражения (в интегро-дифференциальной форме) для искомых величин исходной задачи как функции новых основных неизвестных, причем начальным приближением являются сами новые неизвестные. Преобразование уравнений, полученных на первом цикле интегрирования, выполнено в предположении существования компонент решения, обладающих различными асимптотиками – основного напряженного состояния (медленно изменяющегося согласно форме приложенной нагрузки) и быстро изменяющегося (типа краевого эффекта). Малый параметр, по которому выполнено преобразование – параметр тонкостенности. Для случая термомеханического нагружения получены разрешающие соотношения для новых неизвестных; вид оператора уравнения для медленно меняющейся неизвестной, отвечающей функции прогибов в теории пластин, соответствует классическому. В конечной аналитической форме найдено решение для случая нагружения температурным полем. Характерной чертой примененного метода является свобода решения от ограничений начального задания его формы.

## TEMPERATURE DEFORMATION OF A THIN ELASTIC PLATE

*Hoa Van Dong<sup>1</sup>, Vo Anh Hieu<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>*Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow;*

<sup>2</sup>*Academy of Military Science and Technology, Hanoi, Vietnam*

**Keywords:** principle of compressed mappings, fixed point theorem, elasticity, plate, complete solution, Saint-Venant–Picard–Banach method, boundary conditions, edge effect.

**Abstract.** An analytical solution for a rectangular strip under the action of a thermomechanical load is obtained using the equations of the theory of elasticity by an iterative-asymptotic method. The reduction of the problem from a three-dimensional one to a formulation with new unknowns – functions of two coordinates – is performed by integrating along the thickness coordinate. The iterative process constructed in this case allows us to find expressions (in integro-differential form) by successive approximations for the desired quantities of the initial problem as a function of new basic unknowns, and the initial approximation is the new unknowns themselves. The transformation of the equations obtained in the first integration cycle is carried out under the assumption of the existence of solution components with different asymptotics – the basic stress state (slowly changing according to the shape of the applied load) and rapidly changing (type of edge effect). The small parameter for which the conversion is performed is the thinness parameter. For the case of thermomechanical loading, the resolving relations for new unknowns are obtained; The form of the equation operator for a slowly changing unknown corresponding to the deflection function in plate theory corresponds to the classical one. A solution has been found in the final analytical form for the case of temperature field loading. A characteristic feature of the applied method is the freedom of the solution from the limitations of the initial task of its form.

### Введение

Из литературы известен ряд моделей описания механики тонкостенных тел. Достижение их достаточной простоты, обеспечивающей получение решения аналитически, в значительной степени сопряжено с принятием упрощающих гипотез, накладывающих ограничения на поведение среды. При этом в теории при уменьшении размерности задачи в качестве эталона сохраняются уравнения и решение (когда оно возможно) для трехмерной задачи [1].

Переход к решению в усилиях по подобию принятых в сопротивлении материалов делает задачу более доступной для получения результата, но связанное с этим понижение порядка дифференциальных уравнений приводит к потере граничных условий и противоречиям [2-4]. Применение принципа Сен-Венана для устранения возникающих разрывов в решениях также может иметь ограничение [5].

Технические подходы к интегрированию системы дифференциальных уравнений, как, например, обычно применяемые задание наперед вида функции решения (либо ее части) и разложение решения в ряды также по сути являются внешними приемами относительно разрешаемых с их помощью соотношений. Отдельная составляющая такого решения по построению имеет характер частного решения; рассмотрение суммы значительного количества членов ряда связано с трудностями аналитического контроля.

Метод, излагаемый в работе на примере задачи о термомеханическом нагружении прямоугольной тонкой пластины, имеет своей направленностью освобождение как от допущений, предопределяющих поведение среды, так и от определяющих вид решения в силу технических приемов его отыскания.

Метод, получивший название метода Сен-Венана–Пикара–Банаха [6], основан на идее Сен–Венана [7] решения системы уравнений путем задания части неизвестных и вычисления через них остальных неизвестных, на идее Пикара [8] решения уравнения первого порядка методом последовательных приближений и теореме о неподвижной точке Банаха [9] (называемой также принципом сжатых отображений).

## Материалы и методы исследований

### 1. Построение решения

В качестве исходных возьмем уравнения теории упругости [7] в декартовых координатах  $x^* y^* z^*$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x^*}{\partial x^*} + \frac{\partial \tau_{xz}^*}{\partial z^*} + \frac{\partial \tau_{xy}^*}{\partial y^*} &= 0, \quad \frac{\partial \sigma_y^*}{\partial y^*} + \frac{\partial \tau_{yz}^*}{\partial z^*} + \frac{\partial \tau_{xy}^*}{\partial x^*} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_z^*}{\partial z^*} + \frac{\partial \tau_{xz}^*}{\partial x^*} + \frac{\partial \tau_{yz}^*}{\partial y^*} = 0, \\ \tau_{xy}^* &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v^*}{\partial x^*} \right), \quad E\varepsilon_x = \sigma_x^* - \nu(\sigma_y^* + \sigma_z^*), \quad \varepsilon_x = \frac{\partial u^*}{\partial x^*}, \\ \tau_{xz}^* &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial u^*}{\partial z^*} + \frac{\partial w^*}{\partial x^*} \right), \quad E\varepsilon_y = \sigma_y^* - \nu(\sigma_x^* + \sigma_z^*), \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v^*}{\partial y^*}, \\ \tau_{yz}^* &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial u^*}{\partial z^*} + \frac{\partial w^*}{\partial x^*} \right), \quad E\varepsilon_z = \sigma_z^* - \nu(\sigma_x^* + \sigma_y^*), \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w^*}{\partial z^*}. \end{aligned}$$

относительно 12 неизвестных:  $\sigma_x^*, \sigma_y^*, \sigma_z^*$  (нормальные напряжения),  $\tau_{xz}^*, \tau_{yz}^*, \tau_{xy}^*$  (касательные напряжения),  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$  (линейные деформации),  $u^*, v^*, w^*$  (перемещения в направлениях, соответствующих направлениям координатных осей). Размерные перемещения и напряжения отмечены звездочкой. Срединную плоскость пластины разместим в пространстве таким образом, что  $0 \leq x^* \leq a$ ,  $0 \leq y^* \leq b$  и  $-h \leq z^* \leq h$ , где  $2a$  – длина,  $2b$  – ширина и  $2h$  – толщина пластины.

Введем безразмерные координаты  $x = x^*/a$ ,  $y = y^*/a$ ,  $z = z^*/h$ , и перемещения  $u = u^*/h$ ,  $v = v^*/h$ ,  $w = w^*/h$  вдоль осей  $x^*, y^*, z^*$ ; безразмерные напряжения  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$  получим отнесением размерных величин к модулю упругости  $E$ . Размеры пластины в плоскости соизмеримы между собой  $a, b: \varepsilon^0$  (где  $\varepsilon = h/a$  – малый параметр тонкостенности, применяемый для асимптотических оценок). Безразмерные уравнения в этих переменных, запишем в следующем порядке [11]:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\varepsilon \frac{\partial w}{\partial x} + 2(1+\nu) \tau_{xz}, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = -\varepsilon \frac{\partial w}{\partial y} + 2(1+\nu) \tau_{yz}, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = -\varepsilon \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} - \varepsilon \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y},$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha T, \quad \varepsilon_y = \varepsilon \frac{\partial v}{\partial y} + \alpha T, \quad \tau_{xy} = \frac{1}{2(1+\nu)} \left( \varepsilon \frac{\partial u}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad (1.2)$$

$$\sigma_x = \frac{1}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) + \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_z - \frac{\alpha T}{1-\nu},$$

$$\sigma_y = \frac{1}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) + \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_z - \frac{\alpha T}{1-\nu}, \quad (1.3)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1-\nu-2\nu^2}{1-\nu} \sigma_z - \frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha T,$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = -\varepsilon \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \varepsilon \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}, \quad \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = -\varepsilon \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - \varepsilon \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = \varepsilon_z, \quad (1.4)$$

добавив при их получении в физических выражениях для  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\varepsilon_z$  отвечающие за температурную деформацию члены  $\alpha T$  [12], где  $\alpha = \alpha(x, y, z)$  – коэффициент линейного температурного расширения материала,  $T = T(x, y, z)$  – температура относительно некоторой начальной, при которой ее вклад в напряженно-деформированное состояние считается отсутствующим.

Производные по  $z$  в тех уравнениях, где они присутствуют, вынесены в левую часть. Имеющие множителями малый параметр члены вынесены в правую часть уравнений с тем, чтобы вычисленная через предыдущую величину следующая величина приобретала малый множитель. Соотношения упругости для нормальных напряжений и деформаций преобразованы так, чтобы было возможным в записанной последовательности уравнений последовательное определение неизвестных с умножением. Предположим, что в уравнениях (1.1) величины  $w$ ,  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$  известны. Тогда после интегрирования по  $z$  получаем перемещения  $u$ ,  $v$  и поперечное напряжение  $\sigma_z$ . Формулы (1.2) позволяют определить деформации  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  пластины в плоскости  $xu$  по известным  $u$ ,  $v$  и напряжению  $\tau_{xy}$ . Соотношения упругости (1.3), в правых частях которых стоят теперь известные величины, дают напряжения в плоскости  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и поперечную деформацию  $\varepsilon_z$ . Уравнения (1.4) путем прямого интегрирования по  $z$  при известных к этому моменту правых частях позволяют определить  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$ ,  $w$ .

В действительности величины  $w$ ,  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$  неизвестны, но их можно задать как некоторые величины начального приближения  $w_0$ ,  $\tau_{xz0}$ ,  $\tau_{yz0}$ , и описанный процесс вычисления представить как итерационный:

$$u_{(0)} = -\varepsilon \int \frac{\partial w_0}{\partial x} dz + 2(1+\nu) \int \tau_{xz0} dz + u_0(x, y),$$

$$v_{(0)} = -\varepsilon \int \frac{\partial w_0}{\partial y} dz + 2(1+\nu) \int \tau_{yz0} dz + v_0(x, y),$$

$$\sigma_{z(0)} = \int \left( -\varepsilon \frac{\partial \tau_{xz0}}{\partial x} - \varepsilon \frac{\partial \tau_{yz0}}{\partial y} \right) dz + \sigma_{z0}(x, y),$$

$$\varepsilon_{x(0)} = \varepsilon \frac{\partial u_{(0)}}{\partial x} + \alpha T, \quad \varepsilon_{y(0)} = \varepsilon \frac{\partial v_{(0)}}{\partial y} + \alpha T,$$

$$\tau_{xy(0)} = \frac{1}{2(1+\nu)} \left( \varepsilon \frac{\partial u_{(0)}}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial v_{(0)}}{\partial x} \right),$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{x(0)} &= \frac{1}{1-\nu^2} (\varepsilon_{x(0)} + \nu \varepsilon_{y(0)}) + \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_{z(0)} - \frac{\alpha T}{1-\nu}, \\
\sigma_{y(0)} &= \frac{1}{1-\nu^2} (\varepsilon_{y(0)} + \nu \varepsilon_{x(0)}) + \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_{z(0)} - \frac{\alpha T}{1-\nu}, \\
\varepsilon_{z(0)} &= \frac{1-\nu-2\nu^2}{1-\nu} \sigma_{z(0)} - \frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_{x(0)} + \varepsilon_{y(0)}) + \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha T, \\
\tau_{xz(1)} &= \int \left( -\varepsilon \frac{\partial \sigma_{x(0)}}{\partial x} - \varepsilon \frac{\partial \tau_{xy(0)}}{\partial y} \right) dz + \tau_{xz0}(x, y), \\
\tau_{yz(1)} &= \int \left( -\varepsilon \frac{\partial \sigma_{y(0)}}{\partial y} - \varepsilon \frac{\partial \tau_{xy(0)}}{\partial x} \right) dz + \tau_{yz0}(x, y), \\
w_{(1)} &= \int \varepsilon_{z(0)} dz + w_0(x, y), \\
u_{(1)} &= -\varepsilon \int \frac{\partial w_{(1)}}{\partial x} dz + 2(1+\nu) \int \tau_{xz(1)} dz + u_{(0)}, \\
v_{(1)} &= -\varepsilon \int \frac{\partial w_{(1)}}{\partial y} dz + 2(1+\nu) \int \tau_{yz(1)} dz + v_{(0)}, \\
\sigma_{z(1)} &= \int \left( -\varepsilon \frac{\partial \tau_{xz(0)}}{\partial x} - \varepsilon \frac{\partial \tau_{yz(0)}}{\partial y} \right) dz + \sigma_{z(0)}(x, y), \\
\varepsilon_{x(1)} &= \varepsilon \frac{\partial u_{(1)}}{\partial x} + \varepsilon_{x(0)}, \quad \varepsilon_{y(1)} = \varepsilon \frac{\partial v_{(1)}}{\partial y} + \varepsilon_{y(0)}, \\
\tau_{xy(1)} &= \frac{1}{2(1+\nu)} \left( \varepsilon \frac{\partial u_{(1)}}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial v_{(1)}}{\partial x} \right),
\end{aligned} \tag{1.5}$$

и так далее.

Нижним индексом 0 обозначены произвольные функции (координат  $x$ , и  $y$ ) интегрирования. Индекс в скобках соответствует номеру приближения в итерационном процессе.

Видно, что все искомые неизвестные выражаются через шесть неизвестных  $u_0(x, y)$ ,  $v_0(x, y)$ ,  $\sigma_{z0}(x, y)$ ,  $w_0(x, y)$ ,  $\tau_{xz0}(x, y)$ ,  $\tau_{yz0}(x, y)$ , которые назовем основными. Они при вычислении интегралов будут умножаться на поперечную координату  $z$  с соответствующим интегрированию степенным показателем:

$$\begin{aligned}
u_{(0)} &= -\varepsilon \frac{\partial w_0}{\partial x} z + 2(1+\nu) \tau_{xz0} z + u_0(x, y), \\
v_{(0)} &= -\varepsilon \frac{\partial w_0}{\partial y} z + 2(1+\nu) \tau_{yz0} z + v_0(x, y), \\
\sigma_{z(0)} &= -\varepsilon \frac{\partial \tau_{xz0}}{\partial x} z - \varepsilon \frac{\partial \tau_{yz0}}{\partial y} z + \sigma_{z0}(x, y), \\
\varepsilon_{x(0)} &= -\varepsilon^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} z + 2\varepsilon(1+\nu) \frac{\partial \tau_{xz0}}{\partial x} z + \varepsilon \frac{\partial u_0}{\partial x} + \alpha T, \\
\varepsilon_{y(0)} &= -\varepsilon^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} z + 2\varepsilon(1+\nu) \frac{\partial \tau_{yz0}}{\partial y} z + \varepsilon \frac{\partial v_0}{\partial y} + \alpha T, \\
\tau_{xy(0)} &= -\frac{1}{1+\nu} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} z + \varepsilon \frac{\partial \tau_{xz0}}{\partial y} z + \varepsilon \frac{\partial \tau_{yz0}}{\partial x} z + \frac{1}{2(1+\nu)} \left( \varepsilon \frac{\partial u_0}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial v_0}{\partial x} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{x(0)} &= -\frac{1}{1-\nu^2} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} z - \frac{\nu}{1-\nu^2} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} z + \frac{2-\nu}{1-\nu} \varepsilon \frac{\partial \tau_{xz0}}{\partial x} z + \\
&\quad + \frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon \frac{\partial \tau_{yz0}}{\partial y} z + \frac{1}{1-\nu^2} \varepsilon \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\nu}{1-\nu^2} \varepsilon \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_{z0} - \frac{\alpha T}{1-\nu}, \\
\sigma_{y(0)} &= -\frac{1}{1-\nu^2} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} z - \frac{\nu}{1-\nu^2} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} z + \frac{2-\nu}{1-\nu} \varepsilon \frac{\partial \tau_{yz0}}{\partial y} z + \\
&\quad + \frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon \frac{\partial \tau_{xz0}}{\partial x} z + \frac{\nu}{1-\nu^2} \varepsilon \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{1-\nu^2} \varepsilon \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_{z0} - \frac{\alpha T}{1-\nu}, \\
\varepsilon_{z(0)} &= \varepsilon \frac{1+\nu}{\nu-1} \left( \frac{\partial \tau_{xz0}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz0}}{\partial y} \right) z + \frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon^2 \Delta w_0 z - \frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) + \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha T, \\
\tau_{xz(1)} &= \left( \frac{1}{1-\nu^2} \varepsilon^3 \Delta \frac{\partial w_0}{\partial x} - \frac{2-\nu}{1-\nu} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tau_{xz0}}{\partial x^2} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tau_{xz0}}{\partial y^2} - \frac{1}{1-\nu} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tau_{yz0}}{\partial x \partial y} \right) \frac{z^2}{2} + \\
&\quad + \left[ -\frac{1}{1-\nu^2} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - \frac{1}{2(1-\nu)} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2(1+\nu)} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} - \frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon \frac{\partial \sigma_{z0}}{\partial x} \right] z + \\
&\quad + \frac{\varepsilon}{1-\nu} \int_0^z \frac{\partial(\alpha T)}{\partial x} dz + \tau_{xz0}(x, y), \\
\tau_{yz(1)} &= \left( \frac{1}{1-\nu^2} \varepsilon^3 \Delta \frac{\partial w_0}{\partial y} - \frac{2-\nu}{1-\nu} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tau_{yz0}}{\partial y^2} - \frac{1}{1-\nu} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tau_{xz0}}{\partial x \partial y} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tau_{yz0}}{\partial x^2} \right) \frac{z^2}{2} + \\
&\quad + \left[ -\frac{1}{1-\nu^2} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} - \frac{1}{2(1-\nu)} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2(1+\nu)} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} - \frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon \frac{\partial \sigma_{z0}}{\partial y} \right] z + \\
&\quad + r \frac{\varepsilon}{1-\nu} \int_0^z \frac{\partial(\alpha T)}{\partial y} dz + \tau_{yz0}(x, y), \\
\sigma_{z(1)} &= \left[ -\frac{1}{1-\nu^2} \varepsilon^4 \Delta^2 w_0 + \frac{2-\nu}{1-\nu} \varepsilon^3 \Delta \left( \frac{\partial \tau_{xz0}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz0}}{\partial y} \right) \right] \frac{z^3}{6} + \frac{1}{1-\nu^2} \varepsilon^3 \Delta \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) \frac{z^2}{2} + \\
&\quad + \frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon^2 \Delta \sigma_{z0} \frac{z^2}{2} - \varepsilon \left( \frac{\partial \tau_{xz0}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz0}}{\partial y} \right) z - \frac{\varepsilon^2}{1-\nu} \Delta \int_0^z \int_0^z \alpha T dz dz + \sigma_{z0}(x, y), \\
w_{(1)} &= \frac{1}{1-\nu} \left[ \nu \varepsilon^2 \Delta w_0 - (1+\nu) \varepsilon \left( \frac{\partial \tau_{xz0}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz0}}{\partial y} \right) \right] \frac{z^2}{2} + \\
&\quad + \left[ \frac{1-\nu-2\nu^2}{1-\nu} \sigma_{z0} + \frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) \right] z + \frac{1+\nu}{1-\nu} \int_0^z \alpha T dz + w_0(x, y), \dots
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Здесь  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  – оператор Лапласа.

Процесс последовательных вычислений может быть продолжен. Видно, что получаемые путем наращения выражения имеют вид асимптотических рядов по параметру тонкостенности  $\varepsilon$ , который может быть положен сколь угодно малой величиной.

Имея аналитические выражения для всех искомым неизвестных задачи, можно приступить к выполнению граничных условий на длинных и коротких сторонах заданной прямоугольной области.

## 2. Граничные условия на лицевых сторонах пластины. Разрешающие соотношения для основных неизвестных задачи

Классическая теория пластин допускает решение задачи только в случае действия нормальной распределенной нагрузки на срединную поверхность пластины [13]. Если на обеих лицевых сторонах пластины действует распределенная нагрузка, граничные условия могут быть записаны следующим образом:

$$\begin{aligned}\sigma_z &= Z_+(x, y), \quad \tau_{xz} = X_+(x, y), \quad \tau_{yz} = Y_+(x, y), \quad \text{при } z = 1, \\ \sigma_z &= Z_-(x, y), \quad \tau_{xz} = X_-(x, y), \quad \tau_{yz} = Y_-(x, y), \quad \text{при } z = -1,\end{aligned}$$

где  $X_-, X_+, Y_+, Y_-, Z_-, Z_+$  – безразмерные функции, полученные из размерных делением размерных на модуль упругости материала  $E$ . Предполагается, что они заданы медленно меняющимися функциями координат  $x, y$ .

Условия будем выполнять величинами первого приближения  $\tau_{xz(1)}, \tau_{yz(1)}, \sigma_{z(1)}$  из формул (1.6), считая, что они обладают достаточной точностью. Складывая и вычитая попарно уравнения для одноименных величин, получим отдельные соотношения относительно группы неизвестных  $w_0, \tau_{xz0}, \tau_{yz0}$ :

$$\begin{aligned}& \frac{1}{1-\nu^2} \varepsilon^3 \Delta \frac{\partial w_0}{\partial x} - \frac{2-\nu}{1-\nu} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tau_{xz0}}{\partial x^2} - \frac{1}{1-\nu} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tau_{yz0}}{\partial x \partial y} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tau_{xz0}}{\partial y^2} + 2\tau_{xz0} = \\ & = X_+ + X_- - \frac{\varepsilon}{1-\nu} \left( \int_0^1 \frac{\partial(\alpha T)}{\partial x} dz + \int_0^{-1} \frac{\partial(\alpha T)}{\partial x} dz \right),\end{aligned}\tag{2.1}$$

$$\begin{aligned}& \frac{1}{1-\nu^2} \varepsilon^3 \Delta \frac{\partial w_0}{\partial y} - \frac{2-\nu}{1-\nu} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tau_{yz0}}{\partial y^2} - \frac{1}{1-\nu} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tau_{xz0}}{\partial x \partial y} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tau_{yz0}}{\partial x^2} + 2\tau_{yz0} = \\ & = Y_+ + Y_- - \frac{\varepsilon}{1-\nu} \left( \int_0^1 \frac{\partial(\alpha T)}{\partial y} dz + \int_0^{-1} \frac{\partial(\alpha T)}{\partial y} dz \right),\end{aligned}\tag{2.2}$$

$$\begin{aligned}& -\frac{1}{1-\nu^2} \varepsilon^4 \Delta^2 w_0 + \varepsilon \left( \frac{2-\nu}{1-\nu} \varepsilon^2 \Delta - 6 \right) \left( \frac{\partial \tau_{xz0}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz0}}{\partial y} \right) = \\ & = 3(Z_+ - Z_-) + \frac{3\varepsilon^2}{1-\nu} \Delta \int_{-1}^1 \int \alpha T dz dz,\end{aligned}\tag{2.3}$$

и относительно неизвестных  $u_0, v_0, \sigma_{z0}$ :

$$\begin{aligned}& -\frac{1}{1-\nu^2} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - \frac{1}{2(1-\nu)} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2(1+\nu)} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} - \frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon \frac{\partial \sigma_{z0}}{\partial x} = \\ & = \frac{1}{2}(X_+ - X_-) - \frac{\varepsilon}{2(1-\nu)} \int_{-1}^1 \frac{\partial(\alpha T)}{\partial x} dz,\end{aligned}\tag{2.4}$$

$$\begin{aligned}& -\frac{1}{1-\nu^2} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} - \frac{1}{2(1-\nu)} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2(1+\nu)} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} - \frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon \frac{\partial \sigma_{z0}}{\partial y} = \\ & = \frac{1}{2}(Y_+ - Y_-) - \frac{\varepsilon}{2(1-\nu)} \int_{-1}^1 \frac{\partial(\alpha T)}{\partial y} dz,\end{aligned}\tag{2.5}$$

$$\begin{aligned}& \frac{1}{1-\nu^2} \varepsilon^4 \Delta \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) + \frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon^2 \Delta \sigma_{z0} + 2\sigma_{z0} = \\ & = Z_+ + Z_- + \frac{\varepsilon^2}{1-\nu} \Delta \left( \int_0^1 \int_0^z \alpha T dz dz + \int_0^{-1} \int_0^z \alpha T dz dz \right).\end{aligned}\tag{2.6}$$

Видно, что плоская задача теории упругости для пластины, описываемая уравнениями (2.4)-(2.6), никак не связана с антиплоской, определенной соотношениями (2.1)-(2.3).

Отбрасывая в уравнениях (2.1), (2.2) вторые производные от  $\tau_{xz0}$  и  $\tau_{yz0}$  по сравнению с  $\tau_0$  как величины  $O(\varepsilon^2)$  и третьи производные от них же в уравнении (2.3) по сравнению с первыми производными также как величины  $O(\varepsilon^2)$ , получим уравнения для медленно меняющихся величин  $w_0^s$  и  $\tau_0^s$  (медленно меняющимися полагаются величины, обозначаемые индексом  $s$ , дифференцирование которых по пространственной координате не меняет их асимптотического порядка, измеряемого степенью малого параметра  $\varepsilon$ ), зависящие от координат  $x, y$

$$\frac{1}{1-\nu^2} \varepsilon^3 \frac{\partial}{\partial x} \Delta w_0^s + 2\tau_{xz0}^s = X_+ + X_- - \frac{\varepsilon}{1-\nu} \left( \int_0^1 \frac{\partial(\alpha T)}{\partial x} dz + \int_0^{-1} \frac{\partial(\alpha T)}{\partial x} dz \right),$$

$$\frac{1}{1-\nu^2} \varepsilon^3 \frac{\partial}{\partial y} \Delta w_0^s + 2\tau_{yz0}^s = Y_+ + Y_- - \frac{\varepsilon}{1-\nu} \left( \int_0^1 \frac{\partial(\alpha T)}{\partial y} dz + \int_0^{-1} \frac{\partial(\alpha T)}{\partial y} dz \right),$$

$$-\frac{1}{1-\nu^2} \varepsilon^4 \Delta^2 w_0^s - 6\varepsilon \left( \frac{\partial \tau_{xz0}^s}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz0}^s}{\partial y} \right) = 3(Z_+ - Z_-) + \frac{3\varepsilon^2}{1-\nu} \Delta \int_{-1}^1 \int_0^z \alpha T dz dz$$

и уравнения с малым параметром при старших производных (типа краевого эффекта)

$$-\frac{2-\nu}{1-\nu} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tau_{xz0}^q}{\partial x^2} - \frac{1}{1-\nu} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tau_{yz0}^q}{\partial x \partial y} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tau_{xz0}^q}{\partial y^2} + 2\tau_{xz0}^q = 0,$$

$$-\frac{2-\nu}{1-\nu} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tau_{yz0}^q}{\partial y^2} - \frac{1}{1-\nu} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tau_{xz0}^q}{\partial x \partial y} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tau_{yz0}^q}{\partial x^2} + 2\tau_{yz0}^q = 0,$$

$$\frac{2-\nu}{1-\nu} \varepsilon^3 \Delta \left( \frac{\partial \tau_{xz0}^q}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz0}^q}{\partial y} \right) - 6\varepsilon \left( \frac{\partial \tau_{xz0}^q}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz0}^q}{\partial y} \right) = 0$$

для быстро меняющихся величин (обозначенных индексом  $q$ , дифференцирование которых приводит к увеличению их асимптотического порядка, то есть изменению, асимптотически пропорциональному малому параметру  $\varepsilon$  в отрицательной степени) определенных на координатах  $x/\varepsilon, y/\varepsilon$ .

Системы уравнений (2.7), (2.8) и (2.9), (2.10) являются независимыми между собой в силу произвола параметра  $\varepsilon$ . Уравнения (2.9), (2.10) могут быть использованы для выполнения не удовлетворённых решением уравнений (2.7), (2.8) граничных условий на торцевых сторонах пластины и для устранения возможных разрывов решений этих же уравнений.

Исключив  $\tau_{xz0}^s$  и  $\tau_{yz0}^s$  с помощью уравнений (2.7) из уравнения (2.8), имеем разрешающее уравнение для  $w_0^s$

$$\varepsilon^2 \Delta \left[ \frac{2}{1-\nu^2} \varepsilon^2 \Delta w_0^s + \frac{3}{1-\nu} \left( \int_0^1 \alpha T dz + \int_0^{-1} \alpha T dz - \int_{-1}^1 \int_0^z \alpha T dz dz \right) \right] =$$

$$= 3(Z_+ - Z_-) + 3\varepsilon \frac{\partial}{\partial x} (X_+ + X_-) + 3\varepsilon \frac{\partial}{\partial y} (Y_+ + Y_-).$$

Первый член в левой части совпадает с классическим уравнением изгиба пластины. Правая часть содержит внешнюю нагрузку на лицевых поверхностях. Также в уравнении учтено температурное воздействие, влияющее на коробление пластины. Изменяемость прогиба  $w_0^s$  определяется изменяемостью нагрузок и температурных членов, которая предполагается малой.

В уравнениях (2.4)-(2.6) быстро меняющихся решений из-за наличия членов  $\frac{\nu}{1-\nu}\varepsilon^2\Delta\sigma_{z0}+2\sigma_{z0}$  не возникает, поскольку напряжение  $\sigma_z$  на лицевых поверхностях является заданным и не предусматривает наличие быстро меняющейся компоненты. Поэтому величина  $\frac{\nu}{1-\nu}\varepsilon^2\Delta\sigma_{z0}$  может быть отброшена по сравнению с величиной  $2\sigma_{z0}$  как величина  $O(\varepsilon^2)$ . После этого из уравнения (2.6) следует оценка  $\sigma_{z0}:\varepsilon^3u_0 \wedge \varepsilon^3v_0$ . На основании этой оценки производные  $\varepsilon\frac{\partial\sigma_{z0}}{\partial x}$ ,  $\varepsilon\frac{\partial\sigma_{z0}}{\partial y}$  оказываются величинами  $O(\varepsilon^4)$  по сравнению, скажем, с величинами  $\varepsilon^2\frac{\partial^2u_0}{\partial x^2}$ ,  $\varepsilon^2\frac{\partial^2v_0}{\partial y^2}$  и могут быть отброшены. В соответствии с этим уравнения (2.4)-(2.6) приводятся к виду

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{1-\nu^2}\varepsilon^2\frac{\partial^2u_0}{\partial x^2}-\frac{1}{2(1-\nu)}\varepsilon^2\frac{\partial^2v_0}{\partial x\partial y}-\frac{1}{2(1+\nu)}\varepsilon^2\frac{\partial^2u_0}{\partial y^2}= \\ & =\frac{1}{2}(X_+-X_-)-\frac{\varepsilon}{2(1-\nu)}\int_{-1}^1\frac{\partial(\alpha T)}{\partial x}dz, \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{1-\nu^2}\varepsilon^2\frac{\partial^2v_0}{\partial y^2}-\frac{1}{2(1-\nu)}\varepsilon^2\frac{\partial^2u_0}{\partial x\partial y}-\frac{1}{2(1+\nu)}\varepsilon^2\frac{\partial^2v_0}{\partial x^2}= \\ & =\frac{1}{2}(Y_+-Y_-)-\frac{\varepsilon}{2(1-\nu)}\int_{-1}^1\frac{\partial(\alpha T)}{\partial y}dz, \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\frac{1}{1-\nu^2}\varepsilon^3\Delta\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\partial v_0}{\partial y}\right)+2\sigma_{z0}=Z_++Z_-+\frac{\varepsilon^2}{1-\nu}\Delta\left(\int_0^1\int_0^z\alpha Tdzdz+\int_0^{-1}\int_0^{-z}\alpha Tdzdz\right). \quad (2.14)$$

Продифференцировав по  $x$  уравнение (2.12), по  $y$  уравнение (2.13), и сложив с (2.14), определим:

$$\begin{aligned} 2\sigma_{z0}^s & =Z_++Z_-+\frac{1}{2}\varepsilon\left(\frac{\partial X_+'}{\partial x}-\frac{\partial X_-'}{\partial x}\right)+\frac{1}{2}\varepsilon\left(\frac{\partial Y_+'}{\partial y}-\frac{\partial Y_-'}{\partial y}\right)+ \\ & +\frac{\varepsilon^2}{1-\nu}\left[\int_0^1\int_0^z\frac{\partial^2(\alpha T)}{\partial x^2}dzdz+\int_0^1\int_0^z\frac{\partial^2(\alpha T)}{\partial y^2}dzdz+\int_0^{-1}\int_0^{-z}\frac{\partial^2(\alpha T)}{\partial x^2}dzdz+\right. \\ & \left.+\int_0^{-1}\int_0^{-z}\frac{\partial^2(\alpha T)}{\partial y^2}dzdz\right]-\frac{\varepsilon^2}{2(1-\nu)}\int_{-1}^1\frac{\partial^2(\alpha T)}{\partial x^2}dz-\frac{\varepsilon^2}{2(1-\nu)}\int_{-1}^1\frac{\partial^2(\alpha T)}{\partial y^2}dz. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Рассматривая случай коробления пластины при действии только температурного поля, и принимая величину  $\alpha T$  в качестве базы асимптотической оценки, из (2.7), (2.11) видно:  $w_0^s:\varepsilon^{-2}\alpha T$ ,  $\tau_{xz0}^s, \tau_{yz0}^s:\varepsilon^3w_0^s$ . В свою очередь, для соотношения (2.15) с учетом (2.12) и (2.13) следует:  $\sigma_{z0}^s:\varepsilon^2\alpha T$ ,  $u_0^s, v_0^s:\varepsilon^3\sigma_{z0}^s$ . Асимптотические оценки быстро меняющихся составляющих могут быть найдены в характерной для них области – на уравнениях, задающих условия на торцах полосы.

### 3. Граничные условия на торцевых поверхностях. Аналитический и численный результаты

Рассматриваемые обычно в теории упругости виды граничных условий могут быть заданы на торцевых поверхностях пластины при помощи приближенных соотношений (1.6), определяющих компоненты напряженно-деформированного состояния через основные неизвестные, выражения для которых найдены.

Рассмотрим для примера случай свободной по всем четырем краям квадратной пластины. На каждом краю  $x = \{0;1\}$  и  $y = \{0;1\}$  все напряжения должны обращаться в ноль:

$$\begin{aligned}\tau_{xy}(y, z) = \sigma_x(y, z) = \tau_{xz}(y, z) = 0, \text{ при } x = \{0;1\}, \\ \tau_{xy}(x, z) = \sigma_y(x, z) = \tau_{yz}(x, z) = 0, \text{ при } y = \{0;1\}.\end{aligned}\quad (3.1)$$

Примем поверхностную нагрузку отсутствующей, коэффициент линейного температурного расширения пластины постоянной величиной ( $\alpha = const$ ) и температуру линейно меняющейся по толщине:

$$\alpha T(x, y, z) = \alpha t(x, y)z. \quad (3.2)$$

Записав условия (3.1) с помощью формул  $\tau_{xy(0)}, \sigma_{x(0)}, \sigma_{y(0)}, \tau_{xz(1)}, \tau_{yz(1)}$  (1.6) с учетом выражения (3.2), потребовав в этих выражениях обращения в ноль множителей при каждой степени  $z$ , получим шесть условий на торцевых поверхностях пластины  $x = \{0;1\}$

$$-\frac{1}{1+\nu}\varepsilon^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + \varepsilon \frac{\partial \tau_{xz0}}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial \tau_{yz0}}{\partial x} = 0, \quad (3.3)$$

$$-\frac{1}{1-\nu^2}\varepsilon^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - \frac{\nu}{1-\nu^2}\varepsilon^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \frac{2-\nu}{1-\nu}\varepsilon \frac{\partial \tau_{xz0}}{\partial x} + \frac{\nu}{1-\nu}\varepsilon \frac{\partial \tau_{yz0}}{\partial y} - \frac{\alpha t}{1-\nu} = 0, \quad (3.4)$$

$$\frac{1}{1-\nu^2}\varepsilon^3 \Delta \frac{\partial w_0}{\partial x} - \frac{2-\nu}{1-\nu}\varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tau_{xz0}}{\partial x^2} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tau_{xz0}}{\partial y^2} - \frac{1}{1-\nu}\varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tau_{yz0}}{\partial x \partial y} + \frac{\alpha}{2(1-\nu)}\varepsilon \frac{\partial t}{\partial x} = 0, \quad (3.5)$$

$$\tau_{xz0} = 0, \quad (3.6)$$

$$\varepsilon \frac{\partial u_0}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial v_0}{\partial x} = 0, \quad \frac{1}{1-\nu^2}\varepsilon \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\nu}{1-\nu^2}\varepsilon \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_{z0} = 0, \quad (3.7)$$

$$-\frac{1}{1-\nu^2}\varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - \frac{1}{2(1-\nu)}\varepsilon^2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2(1+\nu)}\varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} - \frac{\nu}{1-\nu}\varepsilon \frac{\partial \sigma_{z0}}{\partial x} = 0$$

и шесть условий на торцевых поверхностях  $y = \{0;1\}$ , имеющих аналогичную форму. Уравнения (2.12)-(2.14) вместе с условиями (3.7) на коротких торцевых сторонах пластины образуют плоскую задачу относительно неизвестных  $u_0, v_0, \sigma_{z0}$ , тогда как уравнения (2.7), (2.9)-(2.11) с граничными условиями (3.3)-(3.6) образуют антиплоскую задачу относительно неизвестных  $w_0^s, \tau_{xz0}^s, \tau_{yz0}^s, \tau_{xz0}^q, \tau_{yz0}^q$ . Видно, что задачи нахождения плоского и антиплоского напряженно-деформированного состояния разделяются.

Если в (3.2) положить  $t = const$  система уравнений (2.12)-(2.14) становится однородной, и ее дополняют однородные условия (3.7). Следовательно, система имеет только тривиальное решение  $u_0 = v_0 = \sigma_{z0} = 0$ .

Система уравнений антиплоской задачи (2.7), (2.11) принимает вид:

$$\frac{1}{1-\nu^2}\varepsilon^3 \frac{\partial}{\partial x} \Delta w_0^s + 2\tau_{xz0}^s = 0, \quad \frac{1}{1-\nu^2}\varepsilon^3 \frac{\partial}{\partial y} \Delta w_0^s + 2\tau_{yz0}^s = 0, \quad (3.8)$$

$$\varepsilon^2 \Delta \left[ \frac{2}{1-\nu^2} \varepsilon^2 \Delta w_0^s + \frac{2\alpha t}{1-\nu} \right] = 0 \quad (3.9)$$

при граничных условиях (3.3)-(3.6).

Частное решение найдем из уравнения (3.9) в квадратных скобках. Для этого введем замену аргументов  $\xi = x + iy, \zeta = x - iy$ . С помощью преобразований

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \zeta}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = i \frac{\partial}{\partial \xi} - i \frac{\partial}{\partial \zeta}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \zeta}$$

уравнение приобретает вид:

$$4\varepsilon^2 \frac{\partial^2 w_0^s}{\partial \xi \partial \zeta} = -(1+\nu) \alpha t.$$

Из него после двойного интегрирования находим частное решение (обозначаемое индексом  $(p)$ )

$$w_0^{s(p)} = -\frac{1}{4} \varepsilon^{-2} (1+\nu) \alpha t (x^2 + y^2). \quad (3.10)$$

Решение  $w_0^s$  возьмем как сумму частного и общего решений уравнения (3.10):

$$w_0^s = -\frac{1}{4} \varepsilon^{-2} (1+\nu) \alpha t (x^2 + y^2) + C_{wx3} x^3 + C_{wx2} x^2 + C_{wx1} x + C_{wy3} y^3 + C_{wy2} y^2 + C_{wy1} y + C_{w0} \quad (3.11)$$

(символом  $C$  с индексами будем обозначать произволы интегрирования).

Однородная система (2.9), (2.10) определяет быстро изменяющееся решение типа краевого эффекта. Применительно к  $\varepsilon$ -окрестности границ  $x = \{0;1\}$ , в этих уравнениях можно положить несущественными компоненты касательных напряжений, направленные вдоль границ и отбросить производные по  $y$  в силу их малой изменчивости:

$$-\frac{2-\nu}{1-\nu} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tau_{xz0}^q}{\partial x^2} + 2\tau_{xz0}^q = 0, \quad -\frac{2-\nu}{1-\nu} \varepsilon^2 \frac{\partial^3 \tau_{xz0}^q}{\partial x^3} + 6 \frac{\partial \tau_{xz0}^q}{\partial x} = 0. \quad (3.12)$$

Проинтегрировав второе уравнение по  $x$ , получим:

$$-\frac{2-\nu}{1-\nu} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tau_{xz0}^q}{\partial x^2} + 6\tau_{xz0}^q = C,$$

где  $C$  – произвольная константа. Вычитая из этого соотношения первое уравнение, найдем  $4\tau_{xz0}^q = C$ . Однако, медленно изменяющееся решение уже учтено системой (2.7)-(2.8), и при нахождении быстро изменяющегося решения из двух асимптотически подобных уравнений (3.12) достаточно одного. В частности, быстро изменяющееся решение второго уравнения

$$\tau_{xz0}^q = \begin{cases} C_{\tau_{xz1}} \exp\left(k \frac{x}{\varepsilon}\right), & \text{при } x \geq 0, \\ C_{\tau_{xz2}} \exp\left(-k \frac{(1-x)}{\varepsilon}\right), & \text{при } x \leq 1, \end{cases} \quad \text{где } k = \sqrt{\frac{6(1-\nu)}{2-\nu}}. \quad (3.13)$$

Оно может быть использовано для удовлетворения потерянных граничных условий и сглаживания разрывов в медленно меняющихся классических решениях. Аналогичным образом определяется величина  $\tau_{yz0}^q$  у границ  $y = \{0;1\}$ . Следует отметить, что в выражении (3.13) произволы интегрирования по способу получения представляют собой функции пространственных координат:  $y$  – для  $\tau_{xz0}^q$  и  $x$  – для  $\tau_{yz0}^q$ .

Подстановка выражения (3.11) в уравнения (3.8) для определения медленно изменяющихся составляющих касательных напряжений и последующее выполнение граничных условий (3.3)-(3.6) с учетом (3.13) дает следующий результат (при определении констант интегрирования дополнительно наложены условия, исключающие перемещения тела как жесткого целого):

$$w_0(x, y) = \frac{1}{2} \varepsilon^{-2} \alpha t_0 (x - x^2 + y - y^2), \quad \tau_{yz0}(x, y) = 0, \quad \tau_{xz0}(x, y) = 0;$$

также ранее было получено:

$$\sigma_{z0}(x, y) = 0, \quad v_0(x, y) = 0, \quad u_0(x, y) = 0.$$

## Результаты

Следует отметить, что найденные решения для основных неизвестных имеют характер приближенных, поскольку построены они на приближенных соотношениях для граничных условий, выполняемых на выражениях (1.6) выбранной итерации. Итоговые выражения для искомых компонент напряженно-деформированного состояния с помощью формул (1.6) для

выбранного приближения  $w_{(1)}, u_{(0)}, v_{(0)}, \sigma_{x(1)}, \sigma_{y(1)}, \sigma_{z(1)}, \tau_{xy(1)}, \tau_{yz(1)}, \tau_{zx(1)}, \varepsilon_{x(1)}, \varepsilon_{y(1)}, \varepsilon_{z(1)}$  записываются следующим образом (здесь равенства понимаются как асимптотические):

$$\begin{aligned} w(x, y, z) &= -\frac{\nu}{1-\nu} \alpha t_0 z^2 + \frac{1}{2} \varepsilon^{-2} \alpha t_0 (x - x^2 + y - y^2), \\ u(x, y, z) &= \frac{1}{2} \varepsilon^{-1} \alpha t_0 (2x-1) z, \quad v(x, y, z) = \frac{1}{2r} \varepsilon^{-1} \alpha t_0 (2y-1) z, \\ \sigma_x &= \sigma_y = \sigma_z = 0, \quad \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0, \\ \varepsilon_x &= \alpha t_0 z, \quad \varepsilon_y = \alpha t_0 z, \quad \varepsilon_z = \alpha t_0 z. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Полученные зависимости позволяют получить по ним численный результат. Так, для стальной пластины толщиной  $2h = 0,1$  м, имеющей размеры в плане  $a = b = 1$  м, характеризующейся коэффициентом линейного теплового расширения  $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ , и коэффициентом Пуассона  $\nu = 0,3$  для температурного поля, распределение которого по толщине имеет вид, показанный на рисунке 1, картина прогибов показана на рисунке 2. В качестве температуры, при которой тепловые деформации отсутствуют, принято значение  $22^\circ\text{C}$  при  $z = 0$ . Результат укладывается в классическое представление о температурном короблении свободной незакрепленной пластины [14]. Также, как это видно из формул (3.14), решение учитывает переменный по толщине характер деформаций.

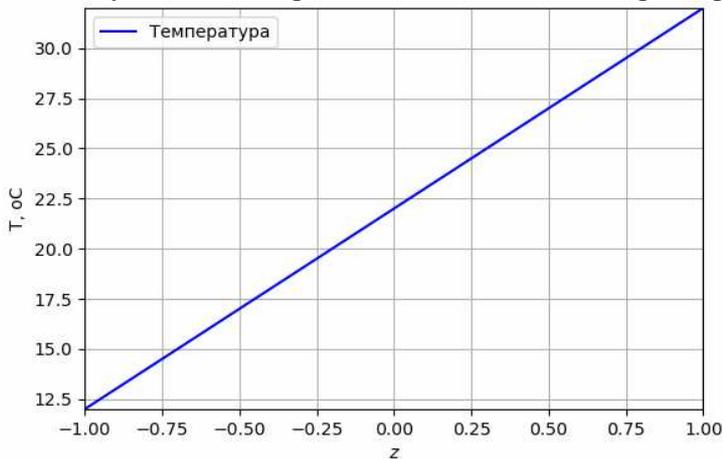


Рис. 1. Распределение поля температуры по толщине пластины

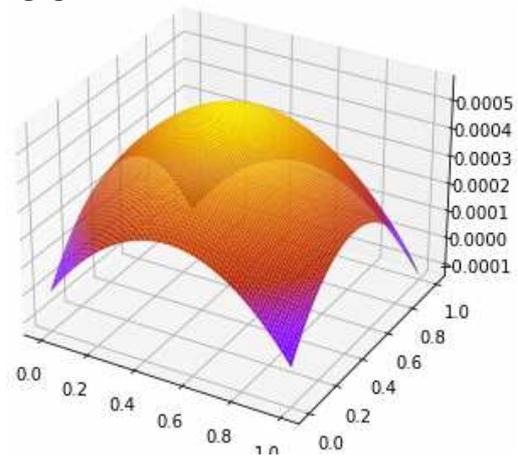


Рис. 2. Вертикальные перемещения точек срединной поверхности пластины, м, в зависимости от безразмерных координат  $x, y$

### Заключение

1. На уравнениях теории упругости без применения дополнительных гипотез о поведении среды и виде искомых функций решена аналитически методом Сен-Венана–Пикара–Банаха пространственная задача о напряженно-деформированном состоянии прямоугольной пластины при термомеханическом воздействии.

2. Получены выражения для всех компонент напряженно-деформированного состояния, определенные через функции, являющиеся основными неизвестными задачи. Выражения имеют вид асимптотических рядов по малому параметру тонкостенности, и получаются в ходе последовательного интегрирования преобразованной системы уравнений итерационно.

3. Для случая механической нагрузки, заданной на лицевых поверхностях и медленно меняющейся в пространстве получено аналитически решение для основных неизвестных задачи с точностью до констант интегрирования. Решение в общем случае имеет асимптотический характер. Вычисления проведены на выражениях начальной итерации.

4. Константы интегрирования определены аналитически для случая свободной по краям квадратной пластины. Характер результата отвечает классическому решению задачи о прогибе при температурном воздействии.

### Список литературы

1. Гольденвейзер А.Л. Теория тонких упругих оболочек. – М.: Гостехиздат, 1953. – 544 с.
2. Friedrichs K.O. Asymptotic phenomena in mathematical physics // Bulletin of the American Mathematical Society. 1955, vol. 61, no. 6, pp. 485-504.
3. Васильев В.В. О теории тонких пластин // Известия РАН. Механика твердого тела. – 1992. – № 3. – С. 26-47.
4. Tovstik P., Tovstik T. On the 2D models of plates and shells including the transversal shear // ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2007, vol. 87, no. 2, pp. 160-171.
5. Gregory R.D., Wan F.Y. Decaying states of plane strain in a semi-infinite strip and boundary conditions for plate theory // Journal of Elasticity. Springer. 1984, vol. 14, no. 1, pp. 27-64.
6. Зверьяев Е.М. Метод Сен-Венана–Пикара–Банаха интегрирования уравнений теории упругости тонкостенных систем // Прикладная математика и механика. – 2019. – Т. 83, № 5-6. – С. 823-833.
7. Ляв А. Математическая теория упругости. – М.-Л.: Объединённое научно-техническое издание НКТП СССР, 1935. – 674 с.
8. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1976. – 576 с.
9. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1976. – 543 с.
10. Пикун В.В. Современное состояние теории оболочек и перспективы ее развития // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2000. – № 2. – С. 153-168.
11. Зверьяев Е.М., Пыхтин А.В., Хоа В.Д. Пространственная задача для прямоугольной упругой пластины // Строительная механика и расчет сооружений. – 2021. – № 4. – С. 2-11.
12. Лебедев Н.Н. Температурные напряжения в теории упругости. – Л.-М.: ОНТИ, 1937. – 110 с.
13. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. – М.: Наука, 1966. – 636 с.
14. Боли Б., Уэйнер Д. Теория температурных напряжений. – М.: Мир, 1964. – 512 с.

### References

1. Goldenweiser A.L. Theory of thin elastic shells. – М.: Gostekhizdat, 1953. – 544 p.
2. Friedrichs K.O. Asymptotic phenomena in mathematical physics // Bulletin of the American Mathematical Society. 1955, vol. 61, no. 6, pp. 485-504.
3. Vasiliev V.V. On the theory of thin plates // News of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of solids. 1992, no. 3, pp. 26-47.
4. Tovstik P., Tovstik T. On the 2D models of plates and shells including the transversal shear // ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2007, vol. 87, no. 2, pp. 160-171.
5. Gregory R.D., Wan F.Y. Decaying states of plane strain in a semi-infinite strip and boundary conditions for plate theory // Journal of Elasticity. Springer. 1984, vol. 14, no. 1, pp. 27-64.
6. Zveryaev E.M. Saint-Venant – Picard – Banach method for integrating equations of the theory of elasticity of thin-walled systems // Applied Mathematics and Mechanics. 2019, vol. 83, no. 5-6, pp. 823-833.
7. Lyav A. Mathematical theory of elasticity. – М.-L.: United scientific and technical publication of the NKTP USSR, 1935. – 674 p.
8. Kamke E. Handbook of ordinary differential equations. – М.: Science, Main editorial office of physical and mathematical literature, 1976. – 576 p.
9. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Elements of the theory of functions and functional analysis. – М.: Science, 1976. – 543 p.
10. Pikul V.V. Current state of shell theory and prospects for its development // News of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of solids. 2000, no. 2, pp. 153-168.
11. Zveryaev E.M., Pykhtin A.V., Khoa V.D. Spatial problem for a rectangular elastic plate // Structural mechanics and calculation of structures. 2021, no. 4, pp. 2-11.
12. Lebedev N.N. Temperature stresses in the theory of elasticity. – Л.-М.: ONTI, 1937. – 110 p.
13. Timoshenko S.P., Voinovsky-Krieger S. Plates and shells. – М.: Science, 1966. – 636 p.
14. Boli B., Weiner D. Theory of temperature stresses. – М.: World, 1964. – 512 p.

#### Сведения об авторах:

**Хоа Ван Донг** – аспирант  
**Во Ань Хиену** – кандидат технических наук  
dong.hoavan@yandex.ru

#### Information about authors:

**Hoa Van Dong** – postgraduate student  
**Vo Anh Hieu** – candidate of technical sciences

Получена 08.02.2024