

ВАРИАЦИОННЫЕ ПОДХОДЫ В ЗАДАЧАХ ФОРМИРОВАНИЯ РЕЖИМОВ ДИНАМИЧЕСКОГО ГАШЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА В УСЛОВИЯХ ВИБРАЦИОННЫХ НАГРУЖЕНИЙ СИЛОВОЙ ПРИРОДЫ

Елисеев А.В.

Иркутский государственный университет путей сообщения, Иркутск

Ключевые слова: структурное математическое моделирование, механическая колебательная система, динамическое гашение колебаний, структурный подход, динамическое гашение колебаний, передаточная функция, оптимальное динамическое состояние, вариационный функционал.

Аннотация. Рассматривается проблема изменения динамического состояния технического объекта в условиях вибрационных нагружений. Решаются задачи оценки, формирования и коррекции динамических состояний технических объектов с расчетными схемами в виде механических колебательных систем, образованных твердым телом. Используются методы структурного математического моделирования, основанные на сопоставлении механическим колебательным системам структурным схем эквивалентных в динамическом отношении систем автоматического управления. Рассматриваются вопросы взаимосвязи задач определения режимов динамического гашения с вариационными задачами. Установлено, что для определения частоты динамического гашения колебаний могут быть построены вариационные функционалы, для которых минимум достигается на частоте динамического гашения колебаний. Проведены вычислительные эксперименты для установления особенностей вариационных функционалов в зависимости от весовых коэффициентов.

VARIATIONAL APPROACHES IN THE PROBLEMS OF FORMATION OF MODES OF DYNAMIC DAMPING OF VIBRATIONS OF A SOLID BODY UNDER CONDITIONS OF VIBRATIONAL LOADS OF A FORCEFUL NATURE

Eliseev A.V.

Irkutsk State Transport University, Irkutsk

Keywords: structural mathematical modeling, mechanical oscillatory system, dynamic vibration damping, structural approach, dynamic vibration damping, transfer function, optimal dynamic state, variational functional.

Abstract. Approaches to changing the dynamic states of technical objects under conditions of vibration loads are being developed. The problems of evaluation, formation and correction of dynamic states of technical objects with structural schemes in the form of mechanical oscillatory systems formed by a solid are considered. The methods of structural mathematical modeling based on the comparison of mechanical oscillatory systems with structural schemes of dynamically equivalent automatic control systems are used. The issues of interrelation of the tasks of determining the modes of dynamic quenching with variational tasks are investigated. It is shown that to determine the modes of dynamic damping of vibrations of a solid body, the tasks of minimizing the amplitudes of vibrations of a solid body can be used. It is established that in order to determine the frequency of dynamic vibration damping, variational functionals can be constructed for which the minimum is achieved at the frequency of dynamic vibration damping. The results of computational experiments to display the features of variational functionals depending on the weight coefficients are presented.

Введение. Вибрационные и колебательные эффекты находят применение в широком круге технологических процессов, связанных с обработкой сред, материалов и изделий [1]. Подавляющее большинство вибрационных и колебательных эффектов, имеющих существенное значение в отраслях промышленности, моделируются с помощью расчётных схем в виде механических колебательных систем [2].

В качестве обобщенного подхода рассматривается структурный подход, основанный на сопоставлении механическим колебательным системам эквивалентных в динамическом отношении система автоматического управления [3, 4].

Для развития методологии построения математических моделей динамических состояний, отображающих совокупность требований к техническому объекту, используется

вариационный подход, позволяющий из всей совокупности динамических состояний, удовлетворяющих совокупности необходимых требований, выбрать оптимальный динамический эффект, доставляющий минимум вариационному функционалу, учитывающему критерий оптимальности в рамках рассматриваемой задачи [5]. Модельным примером приложения развиваемого подхода служит стенд для вибрационных испытаний лопастей вертолетов [6-10]. Технологии вибрационных испытаний могут быть найдены в работе [11]. Пример математической модели можно найти в работе [12]. Комплексный подход к проведению серий вибрационных испытаний отображен в работе [13]. Проблема моделирования работы виброиспытательных стендов может быть рассмотрена в рамках методологии решения задач виброзащиты и виброизоляции [14-16]. В рамках теории вибрационной защиты подобная задача может быть рассмотрена как определение режима динамического гашения колебаний [17].

В рамках структурного метода расчетная схема вибрационного испытательного стенда может быть представлена в виде твердого тела, отображающего испытательный образец, и вибровозбудителя, представленного точкой приложения внешнего силового возмущения. В качестве требований к программе испытаний образца может выступать амплитуда колебания крайней точки. В свою очередь, в качестве критерия оптимальности рассмотрена амплитуда колебания вибровозбудителя. В частности, источник внешнего возмущения реализован как вибровозбудитель, а образец лопасти выполняет роль динамического гасителя колебаний, к амплитудам движения точек которого, предъявлены определенные требования.

По мере роста числа степеней свободы механических колебательных систем структурный подход, направленный на учет динамических особенностей в аналитической форме, сталкиваются с рядом трудностей, в частности, связанных с определением режимов динамического гашения колебаний с помощью определения корней многочленов, находящихся в числителях передаточных функций и т.д.

Возможным выходом их ситуации является развитие вариационных подходов, направленных на поиск решений в минимальных значениях определенных вариационных функционалов, отображающих энергетические особенности системы [18-21]. Вариационные подходы хорошо себя зарекомендовали в решении широкого класса задач с большим числом степеней свободы и учетом различных систем условий.

Вместе с тем, вариационные подходы носят абстрактный, универсальный характер и не адаптированы к задачам оценки, формирования и коррекции динамических состояний технических объектов, находящихся в условиях вибрационных нагружений.

Статья посвящена развитию вариационного подхода, проявляющегося в разработке математических моделей с большим числом степеней свободы, к задачам оценки, формирования и коррекции динамических состояний механических колебательных систем, находящихся в условиях вибрационных нагружений.

Основные положения. Постановка задачи. Рассматривается расчетная схема вибрационного стенда в виде твердого тела на упругих опорах, находящихся в условиях вибрационного нагружения силовой природы (рис. 1) [23, 24].

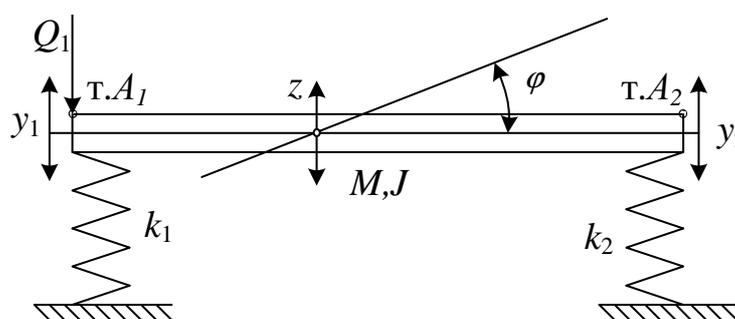


Рис. 1. Расчетная схема вибрационного испытательного стенда; y_1, y_2 – координаты точек A_1 и A_2 ; M, J – масса и момент инерции твердого тела; k_1, k_2 – жесткости упругих элементов

Механическая колебательная система, образованная твердым телом, с массой M и моментом инерции J . К точке твердого тела приложено внешнее силовое возмущение Q_1 гармонической формы. Внешнее силовое возмущение отображает вибровозбудитель образца. В соответствии с возможной программой вибрационных испытаний предполагается, что амплитуда образца должна соответствовать фиксированному значению. В свою очередь, могут быть заданы условия на вибрационный возбудитель, заключающиеся в том, что его амплитуда колебаний должна быть по возможности минимальной.

Система в условиях внешних возмущений совершает малые установившиеся колебания относительно положения статического равновесия. В зависимости от частоты силового возмущения можно добиться, чтобы точка A_2 совершала колебания с некоторой заданной амплитудой, при условии, что в точка A_1 реализуется режим динамического гашения колебаний. Изменением амплитуды внешнего силового возмущения можно увеличить амплитуду колебания точка A_2 образца A_1A_2 . Частота и амплитуда внешнего возмущения является совокупностью средств настройки и регулирования динамического состояния твердого тела.

Для решения комплексных задач широкое распространение получили вариационные подходы, направленные на учет широкой совокупности данных с помощью формирования вариационных функционалов, экстремальные значения которых позволяют находить решения задач в эквивалентной постановке [25]. Примером может служить функционал, представляющий собой сумму взвешенного с помощью весового коэффициента квадрата амплитуды координаты точки твердого тела и квадрата величины отклонения текущей амплитуды колебания твердого тела от нормативной величины, заданной программой испытаний.

Задача заключается в установлении особенностей взаимосвязи между решениями задач определения режимов динамического гашения колебаний твердого тела и решением задач в вариационной постановке на основе процедуры минимизации специального функционала.

Структурная математическая модель. На основе формализма уравнений Лагранжа 2-ого рода с помощью потенциальной и кинетической энергии в виде:

$$T = \frac{1}{2}M\dot{z}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2; \quad (1)$$

$$\Pi = \frac{1}{2}k_1\dot{y}_1^2 + \frac{1}{2}k_2\dot{y}_2^2. \quad (2)$$

Рассмотрим связь обобщенных координат системы:

$$\varphi = c(y_1 - y_2); \quad (3)$$

$$z = ay_1 + by_2, \quad (4)$$

где $a = \frac{l_2}{l_1+l_2}$, $b = \frac{l_1}{l_1+l_2}$, $c = \frac{1}{l_1+l_2}$, l_1, l_2 – расстояния от центра тяжести до точек A_1 и A_2 .

В обобщенных координатах y_1, y_2 выражения кинетической и потенциальной энергии примут вид:

$$T = \frac{1}{2}M(a\dot{y}_1 + b\dot{y}_2)^2 + \frac{1}{2}Jc^2(\dot{y}_2 - \dot{y}_1)^2; \quad (5)$$

$$\Pi = \frac{1}{2}k_1\dot{y}_1^2 + \frac{1}{2}k_2\dot{y}_2^2. \quad (6)$$

Система уравнений Лагранжа 2-ого рода в переменных y_1, y_2 имеет вид :

$$\begin{pmatrix} Ma^2 + Jc^2 & Mab - Jc^2 \\ Mab - Jc^2 & Mb^2 + Jc^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Система дифференциальных уравнений под действием интегральных преобразований Лапласа принимает вид:

$$\begin{pmatrix} (Ma^2 + Jc^2)p^2 + k_1 & (Mab - Jc^2)p^2 \\ (Mab - Jc^2)p^2 & (Mb^2 + Jc^2)p^2 + k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{Q}_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{Q}_1$ – изображения Лапласа, $p = j\omega$ – комплексная переменная, $j = \sqrt{-1}$ [22].

Система алгебраических уравнений (8) может быть представлена в виде структурной схемы (рис. 2).

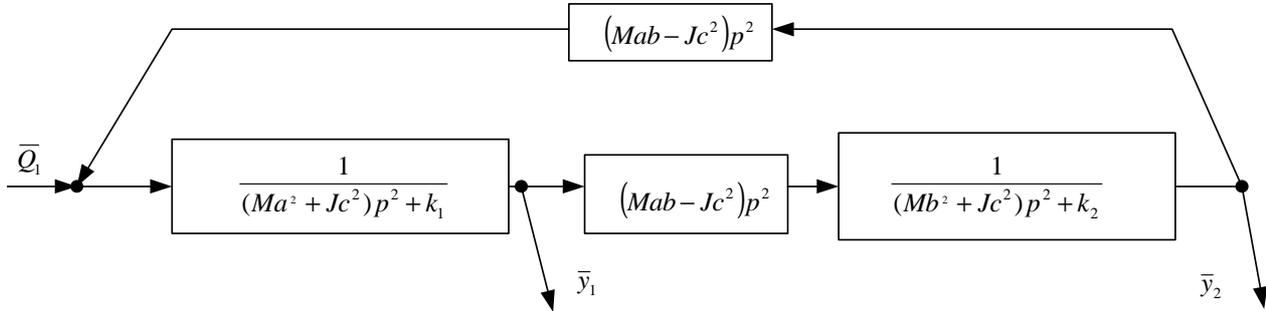


Рис. 2. Структурная схема системы, представленной на рисунке 1

На основе структурной схемы могут быть построены передаточные функции, отображающие динамические податливости системы:

$$W_1(p) = \frac{\bar{y}_1}{\bar{Q}_1} = \frac{(Mb^2 + Jc^2)p^2 + k_2}{A(p)}; \quad (9)$$

$$W_2(p) = \frac{\bar{y}_2}{\bar{Q}_1} = \frac{(Mab - Jc^2)p^2}{A(p)}, \quad (10)$$

где $A(p) = ((Mb^2 + Jc^2)p^2 + k_2)((Ma^2 + Jc^2)p^2 + k_1) - ((Mab - Jc^2)p^2)^2$ – характеристический многочлен системы.

Частота динамического гашения колебаний координаты y_1 находится из условий равенства нулю знаменателя передаточной функции (9) совпадает с парциальной частотой:

$$\omega_{02}^2 = \frac{k_2}{Mb^2 + Jc^2}. \quad (11)$$

Амплитудно-частотная характеристика передаточной функции $W_1(p)$ отображает режим динамического гашения колебаний координаты y_1 в виде частоты, в которой график пересекает ось абсцисс (рис. 3).

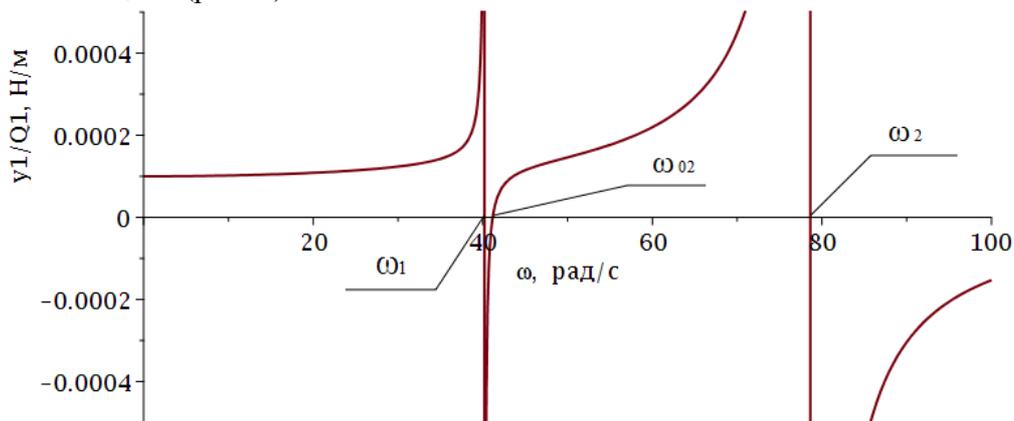


Рис. 3. Амплитудно-частотная характеристика передаточной функции $W_1(p)$; ω_{02} – частота динамического гашения колебаний координаты y_1 ; ω_1, ω_2 – собственные частоты

По мере увеличения количества степеней свободы механической колебательной системы могут возникнуть известные сложности, связанные определением режимов динамического гашения.

Вместе с тем, для определения частоты динамического гашения колебаний могут быть использованы вариационные подходы, позволяющие находить эквивалентные решения для системы с многими степенями свободы.

Вариационная постановка задач для определения частот динамического гашения. Рассматривается новая система, созданная на основе алгебраической системы в изображениях Лапласа (8):

$$\begin{pmatrix} -(Ma^2 + Jc^2)\omega^2 + k_1 & -(Mab - Jc^2)\omega^2 \\ -(Mab - Jc^2)\omega^2 & -(Mb^2 + Jc^2)\omega^2 + k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{y}_1 \\ \hat{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{Q}_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

где \hat{Q}_1 – обозначает амплитуду внешним гармонических колебаний, а \hat{y}_1, \hat{y}_2 – амплитуды вынужденных установившихся колебаний системы.

Для каждой частоты ω внешнего возмущения Q_1 может быть поставлена задача найти такую амплитуду \hat{Q}_1 , чтобы амплитуда колебаний \hat{y}_2 координаты y_2 совпадала с некоторым заданным нормативным значением y_{02} . При этом необходимо, чтобы значение взвешенного с учетом весового коэффициента α квадрата амплитуды колебания координаты в точке приложения силового возмущения в сумме с квадратом отклонения амплитуды \hat{y}_2 от величины y_{02} достигало минимального значения. Формальная постановка задачи имеет вид:

$$\Phi(\hat{q}, \alpha, \omega, \hat{y}_1, \hat{y}_2) = \alpha \hat{y}_1^2 + (\hat{y}_2 - y_{02})^2 \rightarrow \min_{\hat{q}}, \quad (13)$$

где \hat{q} представляет собой величину \hat{Q}_1 в компактной форме записи.

Для определения решения \hat{q}^* задачи (13) необходимо найти решение:

$$\Phi'_{\hat{q}} = 0, \quad (14)$$

где

$$\hat{y}_1 = \frac{-(Mb^2 + Jc^2)\omega^2 + k_2}{A(-\omega^2)} \hat{q}; \quad (15)$$

$$\hat{y}_2 = \frac{-(Mab - Jc^2)\omega^2}{A(-\omega^2)} \hat{q}, \quad (16)$$

Для определения производной вариационного функционала (14) учтем, что

$$(\hat{y}_1)'_{\hat{q}} = \frac{-(Mb^2 + Jc^2)\omega^2 + k_2}{A(-\omega^2)} = \hat{W}_1; \quad (17)$$

$$(\hat{y}_2)'_{\hat{q}} = \frac{-(Mab - Jc^2)\omega^2}{A(-\omega^2)} = \hat{W}_2, \quad (18)$$

где \hat{W}_1, \hat{W}_2 обозначения для соответствующих производных.

Найдем производную (14) в виде

$$\Phi'_{\hat{q}} = 2\alpha \hat{y}_1 (\hat{y}_1)'_{\hat{q}} + 2(\hat{y}_2 - y_{02}) (\hat{y}_2)'_{\hat{q}} = 0. \quad (19)$$

В обозначениях \hat{W}_1, \hat{W}_2 (17), (18) выражение (19) приводится к виду:

$$\alpha \hat{W}_1^2 \hat{q} + \hat{W}_2^2 \hat{q} = y_{02} \hat{W}_2. \quad (20)$$

Амплитуда критического силового возмущения \hat{q}^* , доставляющего минимум вариационному функционалу (13), имеет вид:

$$\hat{q}^* = \frac{\hat{W}_2}{\alpha \hat{W}_1^2 + \hat{W}_2^2} y_{02}. \quad (21)$$

Соответствующие силовому возмущению \hat{q}^* критические амплитуды имеют вид:

$$\hat{y}_1^* = \frac{\hat{W}_1 \hat{W}_2}{\alpha \hat{W}_1^2 + \hat{W}_2^2} y_{02}; \quad (22)$$

$$\hat{y}_2^* = \frac{\hat{W}_2^2}{\alpha \hat{W}_1^2 + \hat{W}_2^2} y_{02}. \quad (23)$$

Минимальное значение вариационного функционала имеет выражение:

$$\Phi^*(\hat{q}^*, \alpha, \omega, \hat{y}_1^*, \hat{y}_2^*) = \frac{\alpha \hat{W}_2^2}{\alpha \hat{W}_1^2 + \hat{W}_2^2} y_{02}^2. \quad (24)$$

Наравне с вариационным функционалом Φ (13) может быть рассмотрена функция невязки для учета отклонения текущей амплитуды колебания координаты от нормативного значения:

$$\hat{\phi}(\hat{q}, \alpha, \omega, \hat{y}_1, \hat{y}_2) = (\hat{y}_2 - y_{02})^2. \quad (25)$$

Критическое значение функции невязки (25) имеет выражение:

$$\hat{\phi}(\hat{q}, \alpha, \omega, \hat{y}_1, \hat{y}_2) = \left(\frac{\alpha \hat{W}_2^2}{\alpha \hat{W}_1^2 + \hat{W}_2^2} \right)^2 y_{02}^2. \quad (26)$$

Критическое значение функции невязки зависит от весового коэффициента α и частоты внешнего возмущения ω . При $\alpha \rightarrow 0$ имеем соответствующие предельные значения критических координат:

$$\hat{y}_1^* \rightarrow \frac{\hat{W}_1}{\hat{W}_2} y_{02}; \quad (27)$$

$$\hat{y}_2^* \rightarrow y_{02}. \quad (28)$$

По мере уменьшения весового коэффициента $\alpha \rightarrow 0$ критическое значение амплитуды колебания координаты y_2 приближается к нормативному значению y_{02} . В свою очередь, амплитуды колебаний координаты y_1 приближается к величине \hat{W}_1/\hat{W}_2 , которая зависит от частоты ω внешнего возмущения Q_1 .

Характеристика

$$\frac{\hat{W}_1}{\hat{W}_2} = \frac{-(Mb^2 + Jc^2)\omega^2 + k_2}{-(Mab - Jc^2)\omega^2} \quad (29)$$

обращается в ноль на парциальной частоте

$$\omega_{02}^2 = \frac{k_2}{Mb^2 + Jc^2}. \quad (30)$$

Приведение функции невязки (27) к виду

$$\hat{\phi} = \frac{\alpha^2}{\left(\alpha + \left(\frac{\hat{W}_2}{\hat{W}_1} \right)^2 \right)^2} y_{02}^2 \quad (32)$$

позволяет сделать вывод, что локальный минимум функции невязки достигается на частоте динамического гашения колебаний, которая совпадает с парциальной частотой ω_{02} , так как обращается в ноль как положительная функция.

Особенности экстремальных характеристик. Рассматривается модельная механическая колебательная система с конкретными значениями параметров $M = 10$ кг, $J = 10$ кг·м, $k_1 = \text{Н/м}$, $k_2 = \text{Н/м}$. В качестве требований к амплитуде колебаний рассматривается величина $y_{02} = 0,005$ м.

1. Критическая координата \hat{y}_1^* имеют форму зависимости от частоты ω в виде графиков, представленных на рисунке 4.

Для произвольного положительного $\alpha > 0$ весового коэффициента график координаты \hat{y}_1^* обращается в ноль на частоте ω_{02} . На рисунке 5 представлены графики функций

координат \hat{y}_1^* , зависящих от весового коэффициента α , рассчитанных для конечной совокупности частот ω .

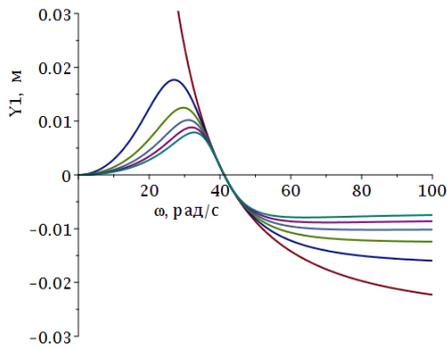


Рис. 4. Критическая координата \hat{y}_1^* в зависимости от частоты: представлены кривые для различных значений весового коэффициента α

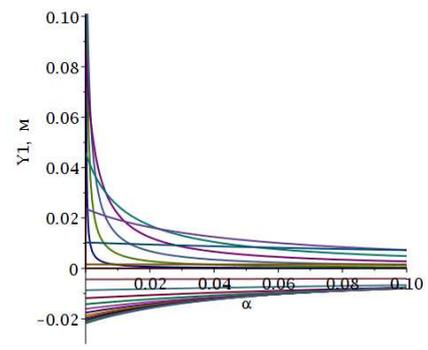


Рис. 5. Зависимость координат \hat{y}_1^* как функция от α весового коэффициента для конечной совокупности частот ω

Особенности зависимости координаты \hat{y}_1^* определяются значением частот существенным образом. Зависимость координат \hat{y}_1^* от двух свободных переменных ω и α может быть представлена в виде двумерной поверхности (рис. б).

Особенности данного графика является возрастание амплитуды \hat{y}_1^* по мере приближения $\alpha \rightarrow 0$ и $\omega \rightarrow 0$. Вместе с тем, для произвольного α на частоте $\omega = \omega_{02}$ амплитуда обращается в ноль.

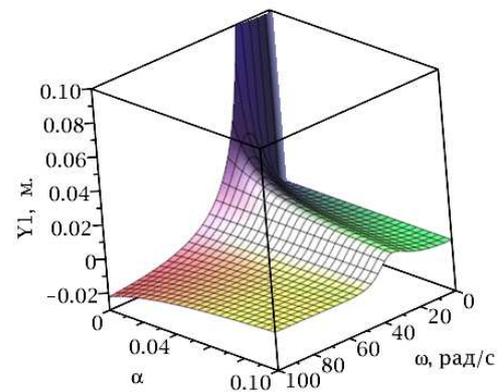


Рис. б. Зависимость амплитуды \hat{y}_1^* колебания координаты y_1 от частоты ω и весового коэффициента α

2. Особенности зависимости амплитуды \hat{y}_2^* от частоты ω для различных фиксированных значений весового коэффициента α представлены на рисунке 7.

Ключевой особенностью графиков (рис. 7) является наличие экстремального значения координат, совпадающего с требуемой величиной y_{02} , на фиксированной частоте ω_{02} . Если же фиксировать частоту внешнего возмущения и построить графики зависимости амплитуды \hat{y}_2^* от весового коэффициента α , то можно обнаружить, что в независимости от частоты ω внешнего возмущения приближение $\alpha \rightarrow 0$ влечет приближение амплитуды $\hat{y}_2^* \rightarrow y_{02}$ (рис. 8).

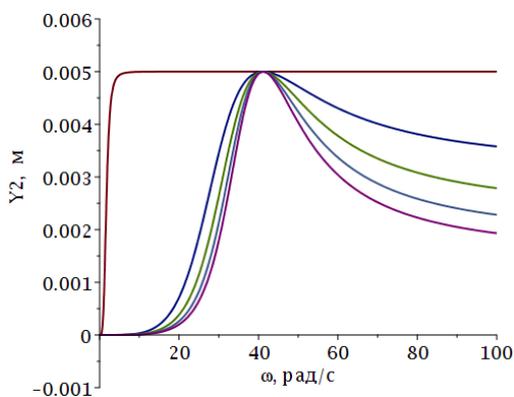


Рис. 7. Зависимость амплитуды \hat{y}_2^* колебаний координат y_2 от частоты ω для различных значений весового коэффициента α

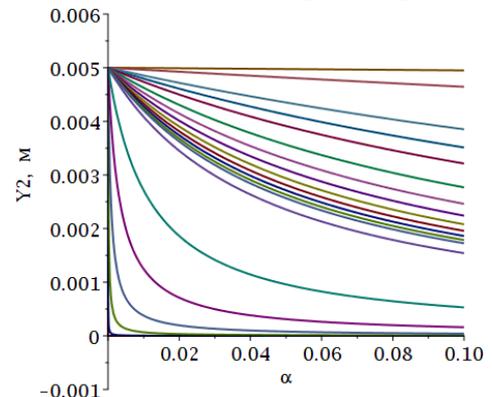


Рис. 8. Зависимость амплитуды \hat{y}_2^* от весового коэффициента α для различных значений частоты ω

Величина амплитуды \hat{y}_2^* как функция двух независимых переменных представлена в виде поверхности на рисунке 9.

Особенностью поверхности \hat{y}_2^* является равенство амплитуд \hat{y}_2^* в своих экстремальных значениях величине необходимых амплитуд y_{02} .

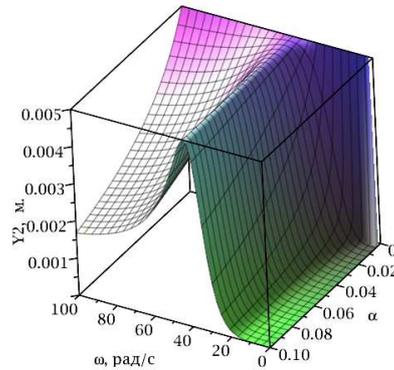


Рис. 9. Амплитуда \hat{y}_2^* в зависимости от частоты ω и весового коэффициента α

3. Критическая сила Q_1 , которая определяет критические амплитуды колебаний, также может быть представлена в зависимости от частоты ω внешнего возмущения для различных значений коэффициента связности α (рис. 10).

Особенности графиков критических силовых возмущений является равенство нулю критических сил на собственных частотах ω_1 и ω_2 системы. В свою очередь, зависимость критической силы от α для различных частот внешнего возмущения представлен на рисунке 11. Зависимость критической силы Q_1 от частот ω внешнего возмущения и весового коэффициента α имеет вид, представленный на рисунке 12.

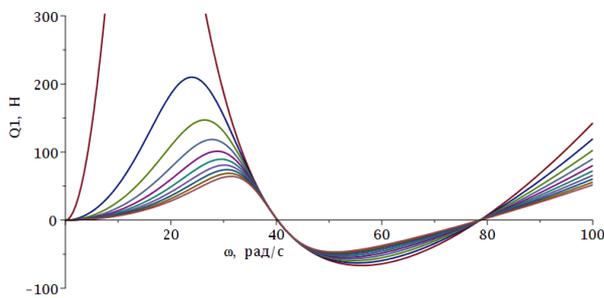


Рис. 10. Критическая сила в зависимости от частоты внешнего возмущения для различных значений весового коэффициента α

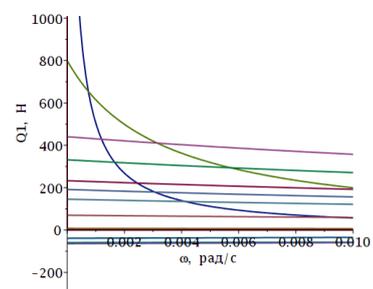


Рис. 11. Зависимость критической силы Q_1 от весового коэффициента α для различных фиксированных частот ω

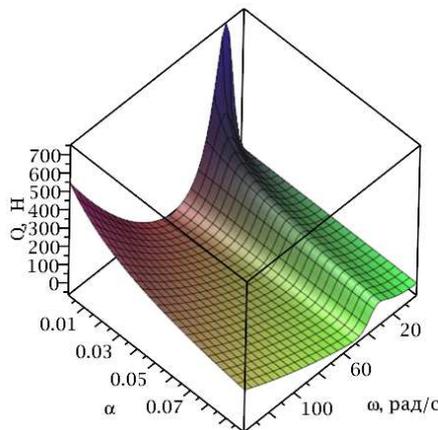


Рис. 12. Критическая сила в зависимости от весового коэффициента α и частоты внешнего возмущения ω

4. Может быть определен критический вариационный функционал в зависимости от частоты внешнего возмущения для различных значений весового коэффициента α (рис. 13).

Необходимо обратить внимание, что критический вариационный функционал (то же, что вариационный функционал, рассчитанный для критических сил и амплитуд), рассматриваемый как функция частоты ω , достигает минимальное значение в точке равной частоте динамического гашения колебаний ω_{02} ; в зависимости от весового коэффициента α вариационный функционал обладает свойствами монотонности (рис. 14). В свою очередь, в зависимости от двух переменных α и ω вариационный функционал графически может быть представлен в виде поверхности, представленной на рисунке 15.

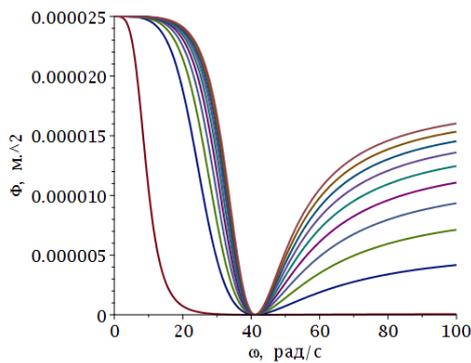


Рис.13. Вариационный функционал в зависимости от частоты внешнего возмущения для различных значений коэффициента α

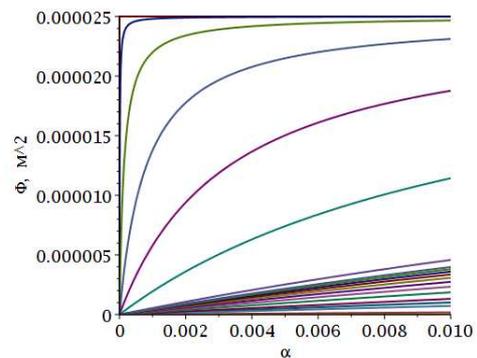


Рис.14. Вариационный функционал в зависимости от весового коэффициента α для различных фиксированных значений частоты ω

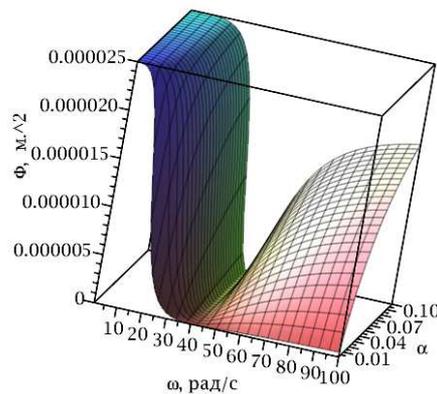


Рис. 15. Критический вариационный функционал в зависимости от частоты ω внешнего возмущения и весового коэффициента α

Для фиксированного небольшого значения весового коэффициента α минимум значений критического вариационного функционала, рассматриваемого как функция частоты ω , может быть найден численными методами, к примеру, методом Ньютона.

Вычислительный эксперимент. Для сравнения частоты динамического гашения колебаний, определенной на основе аналитического выражения для корня многочлена, образующего числитель передаточной функции, с частотой, являющейся точкой минимума вариационного функционала, проведен численный эксперимент, заключающийся в использовании метода Ньютона для поиска точки минимума.

В частности, критическая сила составила значение $Q_1 = -9.32$ Н, частота динамического гашения, определенная аналитически, имеет значение $\omega_{02} = 41,16934848$ рад/с. Обобщенные координаты во временной области, соответствующие режиму динамического гашения колебаний, представлены на рисунке 16. В частности, режим динамического гашения колебаний реализуется по координате y_1 (рис. 16,а), амплитуда колебаний координаты y_2 (рис. 6,б) соответствует заданному значению y_{02} (линия 1).

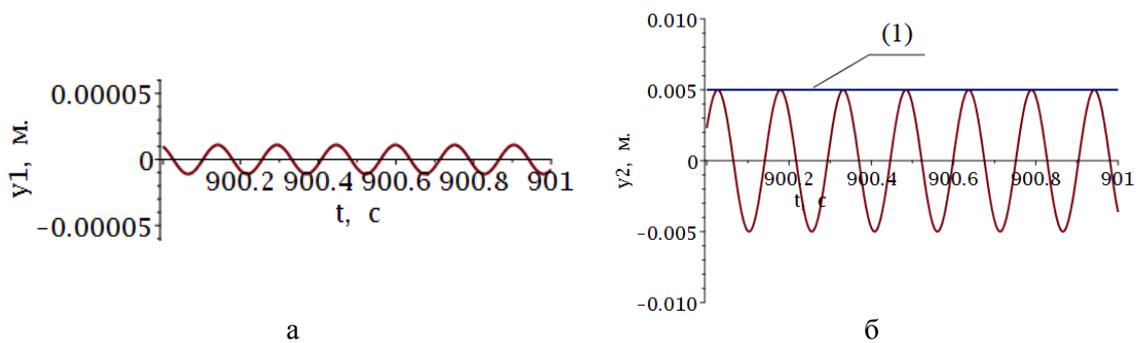


Рис. 16. Режимы, соответствующие критическому силовому возмущению Q_1 для точного значения частоты динамического гашения ω_{02} : а – обобщенная координата y_1 , б – обобщенная координата y_2 , 1 – значение требуемой амплитуды y_{02}

Для сравнения представлен результат определения режимов динамического гашения для частоты, которая определена в результате решения задачи в вариационной постановке (рис. 17). Частота динамического гашения, определенная в результате минимизации критического вариационного функционала методом Ньютона, составляет величину $\omega_{opt} = 41,16909048$ рад/с.

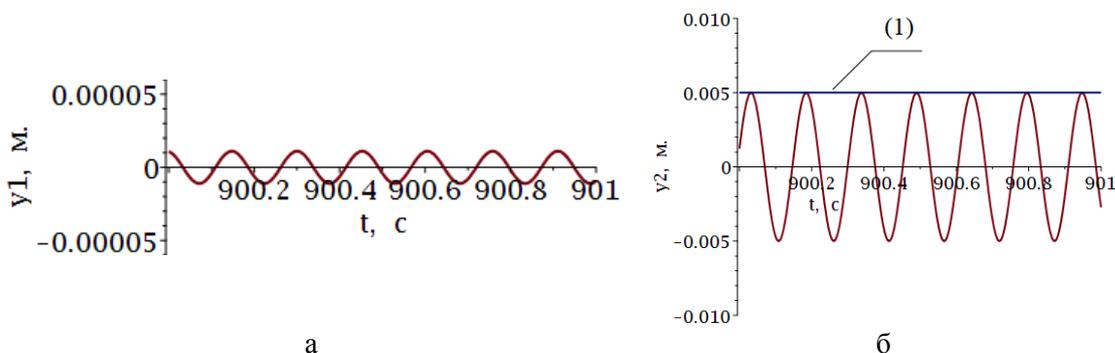


Рис. 17. Режимы, соответствующие критическому силовому возмущению Q_1 для частоты динамического гашения ω_{opt} , найденной в результате минимизации функции невязки: а – обобщенная координата y_1 , б – обобщенная координата y_2 , 1 – значение требуемой амплитуды y_{02}

Таким образом, в рамках модельного примера показано, что частота динамического гашения может быть найдена в результате решения вариационной задачи.

IV. Обсуждение. Считается, что свойства линейных систем, находящихся в условиях вибрационных нагрузений «в принципиальном плане исчерпывающим образом изучены», а теория нелинейных колебаний «представляется неисчерпаемой» [1].

Вместе с тем, в рамках развития системных представлений о механических колебательных системах, можно высказать предположение, что произвольная линейная система основывается или порождается линейной системой с учетом определенной нелинейной особенности или нелинейного фактора. Примером образования нелинейной системы на основе линейной является учет неударживающих связей.

Развитие системной методологии, ориентированной на переход от линейных систем к нелинейным с учетом «фактора» нелинейности, предполагает разработку научно-методических основ оценки, коррекции и формирования динамических состояний линейных механических колебательных систем в условиях внешних силовых или кинематических возмущений; такой подход предполагает развитие обобщенных понятий и представлений о свойствах механических колебательных систем.

Для исследования линейных систем могут быть отмечены два подхода – структурный подход, основанный на анализе характеристик динамических взаимодействий в частотной области, и дифференциальный подход, основанный на построении решений дифференциальных уравнений во временной области.

Особенностью структурного математического моделирования является рассмотрение установившихся форм колебаний обобщенных координат механической колебательной системы. Принципиальное отличие структурных подходов с использованием интегральных преобразований от методов дифференциальных уравнений заключается в том, что решение представляется в частотной области или в виде амплитуд установившихся форм колебаний, а подход дифференциальных уравнений приводит к определению функций во временной области, представляющих собой комбинации тригонометрических, экспоненциальных и степенных функций.

Структурные подходы обладают рядом преимуществ и недостатков по сравнению с методами обыкновенных дифференциальных уравнений. В рамках системной методологии структурный подход обладает рядом преимуществ, проявляющихся в формировании, развитии и использовании обобщенных понятий, отображающих рычажные связи, упругие связи, реакции. В совокупности с динамическими аналогиями подобный подход позволяет развивать обобщенные представления в различных отраслях механики; подобно тому, как понятие механического рычага в виде стержня было перенесено на гидравлический рычаг.

Рассматривая линейные системы, можно полагать, что научно-методическая база, основанная на структурных подходах, в основе которых лежат представления о режимах динамического гашения, резонансах и взаимном распределении парциальных и собственных частот, получила распространение в задачах моделирования особенностей технических объектов на стадиях проектирования.

Особую роль в механических колебательных системах играют неустойчивающие взаимодействия между элементами системы. Неустойчивающие связи являются характерным фактором нелинейности, преобразующим линейную систему в нелинейную.

В качестве подхода, способного обеспечить переход от линейных свойства к нелинейным системам, может быть выбран вариационный подход, ориентированный на решения задач, сформулированных в вариационной постановке.

Заключение

Рассмотрен вариационный подход к решению задач оценки, формирования и коррекции динамических состояний технических объектов, находящихся в условиях вибрационных нагрузений.

В качестве модельной прикладной задачи рассмотрена задача разработки математической модели виброиспытательного стенда с расчетной схемой в виде механической колебательной системы, образованной твердым телом на упругих опорах, совершающим вынужденные колебания в условиях силовых возмущений.

Рабочий режим виброиспытательного стенда интерпретируется в рамках теории виброзащиты и виброизоляции как режим динамического гашения; амплитуда колебания точки приложения внешнего силового возмущения, выполняющего функцию вибровозбудителя, на частоте динамического гашения равна нулю; твердое тело служит вибрационным гасителем колебаний; частота динамического гашения колебаний определяется из условий равенства нулю числителя передаточной функции.

Наравне с решением задачи в рамках методологии теории виброзащиты и виброизоляции сформулирована вариационная постановка задачи, определяющая решение в минимальном значении специального функционала.

Установлено, что решение вариационной задачи совпадает с частотой динамического гашения, что может рассматриваться как потенциальная возможность развития вариационного подхода, позволяющего определять динамические эффекты, удовлетворяющие совокупности условий. Данный подход может быть обобщен на системы с большим числом степеней свободы.

Научная новизна заключается в разработке вариационного подхода к решению задач оценки, коррекции и формирования динамических состояний технических объектов в условиях вибрационного нагружения.

Таким образом, разработана научно-методическая основа вариационного подхода к оценке, формированию и коррекции динамических состояний технических объектов, находящихся в условиях вибрационного нагружения.

Список литературы

1. Блехман И.И. Теория вибрационных процессов и устройств. Вибрационная механика и вибрационная техника. – СПб.: ИД «Руда и Металлы», 2013. – 640 с.
2. Clarence W. de Silva. Vibration. Fundamentals and Practice. – Boca Raton, London, New York, Washington, D.C.: CRC Press, 2000. – 957 p.
3. Eliseev S.V., Eliseev A.V. Theory of Oscillations. Structural Mathematical Modeling in Problems of Dynamics of Technical Objects. – Cham: Springer International Publishing, 2020. – 521 p.
4. Eliseev A.V. Structural Mathematical Modeling Applications in Technological Machines and Transportation Vehicles. – Hershey, PA: IGI Global, 2023. – 288 p.
5. Елисеев А.В., Кузнецов Н.К. Оптимальные вибрационные поля в задачах моделирования динамических состояний технических объектов // *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don)*. – 2024. – №24(1). – С. 7-22.
6. Патент №2052787 РФ. Стенд для динамических испытаний конструкций балочного типа воздушного винта летательного аппарата / П.С. Шелковников. – Заявка № 5060683/28 от 29.06.1992; опубл. 20.01.1996.
7. Патент №2102713 РФ. Стенд для динамических испытаний элементов воздушного винта летательного аппарата / П.С. Шелковников. – Заявка № 96106180/28 от 29.03.1996; опубл. 20.01.1998.
8. Патент №2137108 РФ. Стенд для динамических испытаний элементов воздушного винта летательного аппарата / В.И. Новиков, Ю.М. Горегляд, С.М. Рогов, И.В. Рыбочкин. – Заявка № 98103046/28 от 20.02.1998; опубл. 10.09.1999.
9. Патент №2163714 РФ. Стенд для усталостных испытаний образцов лопастей воздушного винта летательного аппарата / Б.С. Сиротинский, Ф.Х. Нетфуллов, В.М. Пчелкин, Н.И. Дорошенко. – Заявка №99123202/28 от 03.11.1999; опубл. 27.02.2001.
10. Патент №2767594 РФ. Способ усталостных испытаний лопастей воздушного винта и установка для его осуществления / К.С. Щербань, Д.С. Федоров, В.М. Син. – Заявка №2021112652 от 30.04.2021; опубл. 17.03.2022.
11. Испытательная техника. В 2-х томах. Справочник. Том 1 / Под ред. В.В.Клюева. – М.: Машиностроение, 1982. – 528 с.
12. Шамшура С.А. Математическая модель оборудования циклических испытаний лонжеронов лопастей вертолетов // *Вестник Ростовского государственного университета путей сообщения*. – 2008. – № 3(31). – С. 12-20.
13. Бохоева Л.А., Рогов В.Е., Курохтин В.Ю., Перевалов А.В., Чермошнцева А.С. Определение ресурсных характеристик изделий авиационной техники на основе стендовых испытаний с использованием компьютерных технологий на примере лопасти винта вертолета // *Системы. Методы. Технологии*. – 2015. – № 4(28). – С. 36-42.
14. Елисеев С.В., Резник Ю.Н., Хоменко А.П., Засядко А.А. Динамический синтез в обобщенных задачах виброзащиты и виброизоляции технических объектов. – Иркутск: ИГУ, 2008. – 523 с.
15. Елисеев С.В., Хоменко А.П. Динамическое гашение колебаний: концепция обратной связи и структурные методы математического моделирования. – Новосибирск: Наука, 2014. – 357 с.
16. Karnovsky I.A., Lebed E. Theory of Vibration Protection. – Springer, Switzerland, 2016. – 708 p.
17. Елисеев С.В., Кузнецов Н.К., Каимов Е.В., Нгуен Д.Х. Рабочий орган вибрационных машин как динамический гаситель колебаний // *Вестник Иркутского государственного технического университета*. – 2016. – № 4(111). – С. 24-39.
18. Василенко В.А. Сплайн-функции: теория, алгоритмы, программы. – Новосибирск: Наука, 1983. – 216 с.
19. Bezhaev A.Yu. Vasilenko V.A. Variational Theory of Splines. – Kluwer: Academic, Plenum Publishers, 2001. – 208 p. – doi.org/10.1007/978-1-4757-3428-7.
20. Рожено А.И. Теория и алгоритмы вариационной сплайн-аппроксимации. – Новосибирск: Изд. ИВМиМГ СО РАН, 205. – 244 с.
21. Василенко В.А., Елисеев А.В. Абстрактные сплайны с натяжением как функции параметров энергетического оператора // *Сибирский журнал вычислительной математики*. – 1998. – №1(4). – С. 301-311. – URL: www.mathnet.ru/links/be5b8fe7cfea1927a6fff34630f7de33/sjvm311.pdf.
22. Лурье А.И. Операционное исчисление и применение в технических приложениях. – М.: Наука, 1959. – 368 с.
23. Елисеев А.В. Частотная функция и функция демпфирования в оценке динамических процессов в механических колебательных системах с симметрией // *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don)*. – 2020. – Т. 20, № 4. – С. 360-369.
24. Елисеев А.В., Вьюнг К.Ч. Некоторые возможности управления одномерным вибрационным полем технологической машины // *Современные технологии. Системный анализ. Моделирование*. – 2016. – №1(49). – С. 33-41.
25. Елисеев А.В., Мамаев Л.А., Ситов И.С. Некоторые подходы к обоснованию схемы инерционного возбуждения в технологических вибрационных машинах // *Системы. Методы. Технологии*. – 2015. – №4(28). – С. 15-24.

References

1. Blekhman I.I. Theory of vibration processes and devices. Vibration mechanics and vibration technology. – SPb.: Publ. house "Ore and Metals", 2013. – 640 p.
2. Clarence W. de Silva. Vibration. Fundamentals and Practice. – Boca Raton, London, New York, Washington, D.C.: CRC Press, 2000. – 957 p.
3. Eliseev S.V., Eliseev A.V. Theory of Oscillations. Structural Mathematical Modeling in Problems of Dynamics of Technical Objects. – Cham: Springer International Publishing, 2020. – 521 p.
4. Eliseev A.V. Structural Mathematical Modeling Applications in Technological Machines and Transportation Vehicles. – Hershey, PA: IGI Global, 2023. – 288 p.
5. Eliseev A.V., Kuznetsov N.K. Optimal vibration fields in problems of modeling dynamic states of technical objects // Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don). 2024, no. 24(1), pp. 7-22.
6. Patent No. 2052787 RU. Stand for dynamic testing of structures of the beam type of an aircraft propeller / P.S. Shelkovnikov. – Appl. No. 5060683/28 from 29.06.1992; publ. on 20.01.1996.
7. Patent No. 2102713 RU. Stand for dynamic testing of aircraft propeller elements / P.S. Shelkovnikov. – Appl. No. 96106180/28 from 29.03.1996; publ. 20.01.1998.
8. Patent No. 2137108 RU. Stand for dynamic testing of aircraft propeller elements / V.I. Novikov, Yu.M. Goreglyad, S.M. Rogov, I.V. Rybochkin. – Appl. No. 98103046/28 from 20.02.1998; publ. 10.09.1999.
9. Patent No. 2163714 RU. Stand for fatigue tests of samples of aircraft propeller blades / B.S. Sirotnsky, F.H. Netfullov, V.M. Pchelkin, N.I. Doroshenko. – Appl. No. 99123202/28 from 03.11.1999; publ. 27.02.2001.
10. Patent No. 2767594 RU. Method of fatigue testing of propeller blades and an installation for its implementation / K.S. Shcherban, D.S. Fedorov, V.M. Sin. – Appl. No. 2021112652 from 30.04.2021; publ. 17.03.2022.
11. Testing equipment. In 2 volumes. Guide. Volume 1 / Edited by V.V. Klyuev. – M.: Mechanical Engineering, 1982. – 528 p.
12. Shamshura S.A. Mathematical model of equipment for cyclic testing of helicopter blade spars // Bulletin of the Rostov State University of Railway Engineering. 2008, no. 3(31), pp. 12-20.
13. Bokhoeva L.A., Rogov V.E., Kurokhtin V.Yu., Perevalov A.V., Chermoshentseva A.S. Determination of the resource characteristics of aircraft products based on bench tests using computer technology on the example of a helicopter propeller blade // System. Methods. Technologies. 2015, no. 4(28), pp. 36-42.
14. Eliseev S.V., Reznik Yu.N., Khomenko A.P., Zasyadko A.A. Dynamic synthesis in generalized problems of vibration protection and vibration isolation of technical objects. – Irkutsk: IGU, 2008. – 523 p.
15. Eliseev S.V., Khomenko A.P. Dynamic vibration damping: feedback concept and structural methods of mathematical modeling. – Novosibirsk: Science, 2014. – 357 p.
16. Karnovsky I.A., Lebed E. Theory of Vibration Protection. – Springer, Switzerland, 2016. – 708 p.
17. Eliseev S.V., Kuznetsov N.K., Kaimov E.V., Nguyen D.H. The working organ of vibrating machines as a dynamic vibration dampener // Bulletin of the Irkutsk State Technical University. 2016, no. 4(111), pp. 24-39.
18. Vasilenko V.A. Spline functions: theory, algorithms, programs. – Novosibirsk: Science, 1983. – 216 p.
19. Bezhaev A.Yu. Vasilenko V.A. Variational Theory of Splines. – Kluwer: Academic, Plenum Publishers, 2001. – 208 p. – doi.org/10.1007/978-1-4757-3428-7.
20. Rozhenko A.I. Theory and algorithms of variational spline approximation. – Novosibirsk: Publ. house IVMiMG SB RAS, 205. – 244 p.
21. Vasilenko V.A., Eliseev A.V. Abstract tension splines as functions of parameters of an energy operator // Siberian Journal of Computational Mathematics. 1998, no. 1(4), pp. 301-311. URL: www.mathnet.ru/links/be5b8fe7cfea1927a6fff34630f7de33/sjvm311.pdf.
22. Lurie A.I. Operational calculus and application in technical applications. – M.: Science, 1959. – 368 p.
23. Eliseev A.V. Frequency function and damping function in the assessment of dynamic processes in mechanical oscillatory systems with symmetry // Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don). 2020, vol. 20, no. 4, pp. 360-369.
24. Eliseev A.V., Vyong K.Ch. Some possibilities of controlling a one-dimensional vibrational field of a technological machine // Modern technologies. System analysis. Modeling. 2016, no. 1(49), pp. 33-41.
25. Eliseev A.V., Mamaev L.A., Sitov I.S. Some approaches to substantiating the scheme of inertial excitation in technological vibration machines // Systems. Methods. Technologies. 2015, no. 4(28), pp. 15-24.

Сведения об авторах:

Елисеев Андрей Владимирович – кандидат технических наук, доцент кафедры математики
eavsh@ya.ru

Information about authors:

Eliseev Andrey Vladimirovich – candidate of technical sciences, associate professor of Department of mathematics

Получена 11.04.2024