Сбойчаков А.М., Пупасов-Максимов А.М. Моделирование распространения упругих волн в твердых телах со случайными включениями: подход на основе машинного обучения // Транспортное, горное и строительное машиностроение: наука и производство. – 2024. – № 24. – С. 30-36.

УДК 004.942, 519.711.3, 531/534 https://doi.org/10.26160/2658-3305-2024-24-30-36

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ УПРУГИХ ВОЛН В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ СО СЛУЧАЙНЫМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ: ПОДХОД НА ОСНОВЕ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ

Сбойчаков А.М.[1], Пупасов-Максимов А.М.[2]
[1]Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва;
[2]Federal University of Juiz de Fora, Brasil, Juiz de Fora

Ключевые слова: волновые уравнения в механике, неоднородные материалы, деформация твердых тел, упругие волны, численное моделирование, метод Дайсона-Швингера, машинное обучение.
Аннотация. Эта статья представляет подход на основе машинного обучения для моделирования распространения упругих волн в твердых телах с неоднородными включениями. Основной фокус исследования направлен на анализ стохастических уравнений в частных производных и их усредненных форм, что имеет важное значение для понимания физических свойств материалов и их реакции на внешние воздействия. Применение метода Дайсона-Швингера для усреднения функций Грина позволяет сохранить информацию о внутренних корреляциях в материале, что является критически важным для практических приложений в геофизике и материаловедении. Использование машинного обучения в этом контексте открывает новые возможности для точного и эффективного моделирования динамических процессов в случайно неоднородных средах, предлагая перспективные методы для исследований и разработки новых технологий в механике деформируемых твердых тел.

MODELING THE PROPAGATION OF ELASTIC WAVES IN SOLIDS WITH RANDOM INCLUSIONS: A MACHINE LEARNING-BASED APPROACH

Sboychakov A.M.[1], Pupasov-Maksimov A.M.[2]
[1]National Research University "Moscow Power Engineering Institute", Moscow;
[2]Federal University of Juiz de Fora, Brazil, Juiz de Fora

Keywords: wave equations in mechanics, inhomogeneous materials, deformation of solids, elastic waves, numerical modeling, Dyson-Schwinger method, machine learning.
Abstract. This article presents a machine learning-based approach for modeling the propagation of elastic waves in solids with inhomogeneous inclusions. The main focus of the study is directed towards the analysis of stochastic partial differential equations and their averaged forms, which are crucial for understanding the physical properties of materials and their response to external influences. The application of the Dyson-Schwinger method for averaging Green's functions allows preserving information about internal correlations in the material, which is critically important for practical applications in geophysics and materials science. The use of machine learning in this context opens new possibilities for precise and efficient modeling of dynamic processes in randomly inhomogeneous media, offering promising methods for research and development of new technologies in the mechanics of deformable solids.

Введение

Современные научные исследования и практические задачи во многих областях техники требуют эффективного и точного моделирования процессов, протекающих в случайно неоднородных средах. Изучение таких сред, особенно в контексте геофизики и материаловедения, нередко влечет за собой сложности из-за высокой степени стохастичности и сложности математического описания. В данной работе мы сосредотачиваем внимание на важности адекватного восстановления стохастических уравнений в частных производных и их усредненных форм, что является ключом к пониманию и предсказанию поведения таких сред.

Основной акцент в работе сделан на разработке и анализе методов машинного обучения, направленных на упрощение и ускорение процесса решения стохастических задач. Применение машинного обучения в этом контексте не только обеспечивает повышение вычислительной эффективности, но и способствует глубокому пониманию физических процессов, происходящих в сложных неоднородных средах.

Важным аспектом исследования является использование метода Дайсона-Швингера [1], который позволяет сохранять информацию о корреляциях в системе при переходе к усредненным моделям. Это особенно важно для практических применений [2, 3], где усредненные модели часто используются для описания макроскопических физических величин, таких как скорость звуковых волн, рассеяние, дисперсия, средняя проницаемость и теплопроводность. Такой подход позволяет не только упрощать сложные уравнения, но и сохранять информацию о важных физических характеристиках системы.

Результаты нашего исследования показывают, что предложенный подход может быть использован для точного и эффективного моделирования процессов в случайно неоднородных средах, что открывает новые возможности для понимания и предсказания их поведения. Особое внимание уделено разработке методов, которые могут быть адаптированы к конкретным задачам и условиям, что делает их применимыми в широком спектре научных и практических областей.

В целом, представленная работа вносит важный вклад в развитие методов машинного обучения и их применение в области численного моделирования стохастических процессов. Это не только обеспечивает новые возможности для исследования сложных физических систем, но и открывает перспективы для разработки новых технологий и улучшения существующих методов в различных областях науки и техники.

Усреднение уравнений для случайных сред

Важность решения стохастических дифференциальных уравнений как в теоретическом понимании прямых задач, так и в практическом анализе усредненных характеристик различных систем отмечается многими авторами. Статья Messenger и Bortz [4] затрагивает тему слабых формулировок систем идентификации динамических систем для частных дифференциальных уравнений, что является ключевым элементом для понимания стохастических процессов. Garnier и Sølna [5] провели анализ четвертого порядка моментов для частично когерентных электромагнитных пучков в случайных средах, что помогает в изучении световых волн в неоднородных средах. Работа Gu и Komorowski [6] рассматривает гауссовы флуктуации, возникающие из случайного уравнения Шрёдингера, что способствует пониманию квантовых явлений в случайных средах.

Помимо упомянутых выше, линейные уравнения в частных производных со случайными пространственными вариациями коэффициентов могут моделировать различные геофизические проблемы. Так, к примеру, Guo и соавторы [7] представляют метод интерполяции геофизических данных с использованием стохастических частных дифференциальных уравнений для поиска золота в Даяошане, Китай, что демонстрирует практическое применение стохастических методов в геологии. Исследование Ikeda и коллег [8] посвящено разработке методов расчета эффективных упругих свойств песчаника без использования сегментации, что важно для геофизического моделирования. Аналитическое решение таких задач невозможно, а численное может оказаться очень дорогостоящим. Конкретная реализация случайного размещения включений не оказывает существенного влияния на макроскопические физические свойства [9]. Представляют практический интерес усредненные модели, описывающие макроскопические физические величины (скорость звуковых волн, рассеяние, дисперсия, средняя проницаемость, средняя теплопроводность).

В качестве базовой модели мы рассмотрим уравнение для распространения волн в одномерной среде, состоящей из двух типов слоев с постоянными упругости k_1, k_2:

$$[\rho\partial_t^2 - \hat{k}(x)\partial_t^2]\hat{u}(x,t) = f(x,t), \tag{1}$$

здесь ρ – плотность среды, которую мы предположим постоянной.

Случайное расположение слоев определяет кусочно-постоянную функцию $\hat{k}(x) = k_1$ или k_2, если точка x находится в слое из материала первого или второго типа, соответственно.

Рисунок 1 иллюстрирует возможную реализацию случайного расположения слоев, где толщины слоев являются случайной функций (пример одномерной реализации случайно-неоднородной пористой среды).

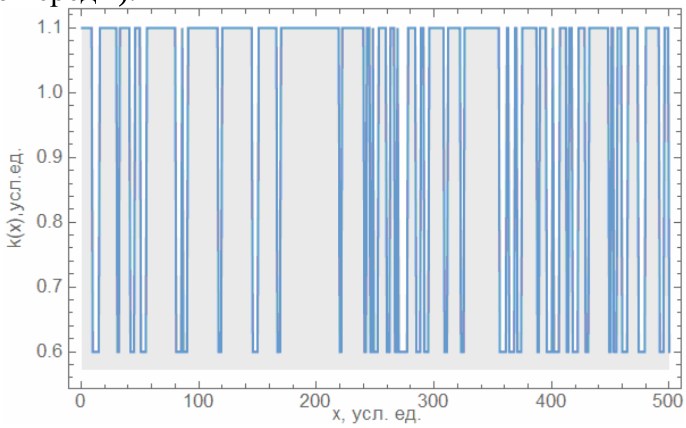

Рис. 1. Пример реализации случайного распределения двух типов слоев, график функции $\hat{k}(x)$

Подход Дайсона-Швингера

Метод усреднения основан на формальных решениях линейных уравнений с помощью ряда возмущений для функции Грина [10]. Введем линейный дифференциальный оператор $\hat{L}$, определяющий неоднородное стохастическое дифференциальное уравнение в частных производных

$$\hat{L}\hat{u} = f, \hat{u} = \hat{G}f . \tag{2}$$

Стандартный подход заключается в том, чтобы рассматривать ансамбль реализаций $\hat{L}$ и проводить усреднение по такому ансамблю. Для каждой из реализаций существует фундаментальное решение, или функция Грина $\hat{G}$. Суть подхода Дайсона заключается в том, что необходимо производить усреднение не оператора $\hat{L}$, а функции Грина $\hat{G}$. Однако, в явном виде найти $\hat{G}$ для произвольной реализации, а затем провести усреднение не представляется возможным. Поэтому с помощью метода теории возмущений функция Грина вычисляется в виде ряда. Невозмущенная задача, для которой можно найти функцию Грина явно, в простейшем случае соответствует дифференциальному уравнению той же структуры, но с постоянными коэффициентами. Такая невозмущённая задача возникает в результате перехода к усредненному оператору

$$L_0 = \left\langle \hat{L} \right\rangle, \hat{L} = L_0 + \hat{V} . \tag{3}$$

После этого решение для функции Грина выражается в виде ряда

$$\hat{G} = \left(L_0 + \hat{V}\right)^{-1} = \left(I + G_0\hat{V}\right)^{-1} G_0 = G_0 - G_0\hat{V}G_0 + \ldots, \tag{4}$$

включающего в себя функцию Грина для усредненного оператора G_0, и случайные возмущения $\hat{V}$,

$$L_0 u_0 = f, u_0 = G_0 f . \tag{5}$$

Таким образом, средний отклик u на возмущение f в данной задаче находится по формуле

$$u = \left\langle \left(L_0 + \hat{V}\right)^{-1} \right\rangle f . \tag{6}$$

Этот подход сохраняет информацию обо всех корреляциях и приводит к системе интегро-дифференциальных уравнений. Средний отклик u удовлетворяет уравнению Дайсона

$$L_0 u = f + \Sigma u, \Sigma \approx \left\langle \hat{V}\hat{G}\hat{V} \right\rangle, \tag{7}$$

в котором дополнительно к среднему оператору L_0 добавляется так называемый оператор корреляции Σ. Для вычисления оператора Σ используется диаграммная техника, позволяющая частично просуммировать бесконечные ряды. Тем не менее, в большинстве приложений рассматривается только первая поправка (борновское приближение)

$$\Sigma \approx \left\langle \hat{V}\hat{G}_0\hat{V} \right\rangle. \qquad (8)$$

В таком приближении развивать диаграммную технику не требуется и для вычисления Σ можно воспользоваться первыми поправками в (4).

Оператор корреляции волнового уравнения со случайными неоднородностями

В случае двухкомпонентной среды оператор корреляции пропорционален парной корреляционной функции включений [1, 9]

$$[\rho\partial_t^2 - \kappa\partial_t^2]u(x,t) - \int \Sigma(x-y,t-\tau)u(y,\tau)dyd\tau = f(x,t), \qquad (9)$$

где $\Sigma(x-y,t-\tau)$ является оператором корреляции (оператором поляризации или массовым оператором в квантовой теории поля) и также зависит от $u(x,t)$. Следовательно, это уравнение нелинейное. Однако, обычно оператор корреляции записывается в виде ряда возмущений по отношению к начальной функции Грина и возмущению усредненного волнового оператора. Тогда рассматривается только приближение первого порядка. В этом приближении оператор корреляции является обобщенной функцией, построенной из двухточечной функции корреляции включений и начальной функции Грина. Таким образом, $\Sigma(x,t)$ исчезает, когда x и ct больше радиуса корреляции. Естественным выбором для параметризации $\Sigma(x,t)$ является гауссова двухточечная функция корреляции.

Рассмотрение распространения волн в случайно-неоднородной слоистой среде позволяете выяснить физический смысл замены уравнения (5) уравнением типа Дайсона (7), (9). Во-первых, учет корреляционного оператора приводит к изменению закона дисперсии. Во-вторых, уравнение (5) не учитывает многократные переотражения между слоями – оно просто описывает распространение волн в однородной среде с некоторой средней скоростью, в то время как уравнение (9) содержит слагаемое с корреляционным оператором, которое приводит к размытию волнового фронта (как усредненный эффект многократных переотражений (см. рис. 2). В-третьих, для двумерных и трехмерных задач корреляционная функция может учесть анизотропию включений или их распределения (в то время как в усредненном напрямую уравнении эффекты от анизотропии включений или их распределения исчезают).

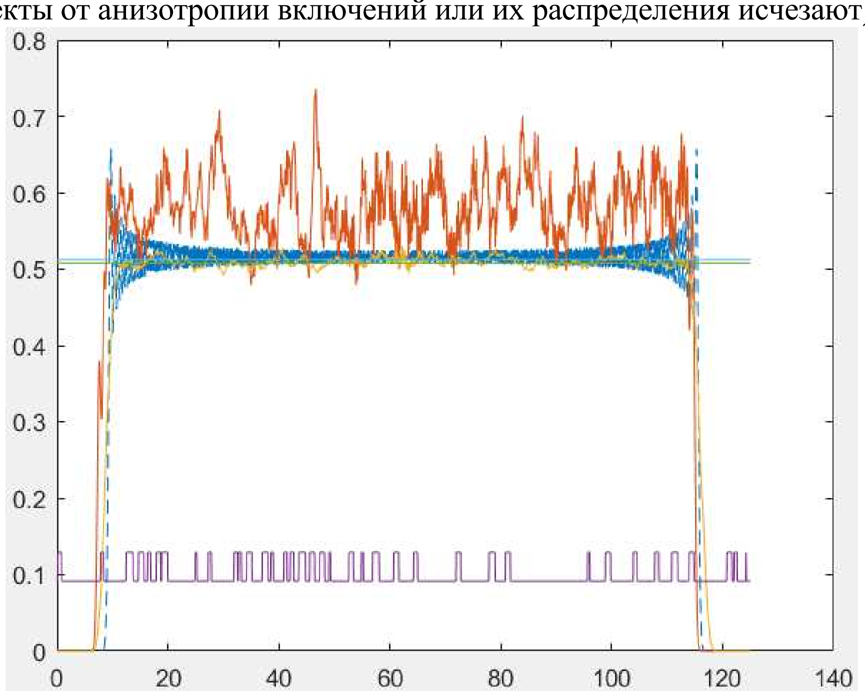

Рис. 2. Сравнение решения волнового уравнений для одной реализации (оранжевая кривая), усреднения решений по реализациям (желтая кривая), решения для усредненной среды (синяя кривая); фиолетовая кривая соответствует $\hat{k}(x)$ для одной из реализаций; решения соответствуют дельта-образному возмущению при x = 70 в начальный момент времени

Изначально, в работах [1, 9] уравнения типа Дайсона использовались для получения качественных характеристик явлений, протекающих в случайно-неоднородных средах. В настоящее время, с развитием методов численных расчетов [11], исследователи предпочитают моделировать конкретные реализации и извлекать максимально полную информацию о решении. Однако, для сравнения с экспериментом на практике доступны лишь некоторые усредненных характеристики, которые, конечно, можно извлечь из детального решения $\hat{u}(x,t)$. При этом, многие такие характеристики можно было бы получить из уравнения типа (7). В свою очередь, для построения и калибровки моделей с детальным учетом стохастических неоднородностей доступна только экспериментальная информация об усредненном решении $u(x,t)$, которое можно получить с помощью физических измерительных приборов. В данной работе мы предлагаем рассмотреть уравнения Дайсона (7), (9) [12, 13] как базовую модель, которая можете быть откалибрована по результатам физических измерений. Таким образом мы приходим к постановке обратной задачи для уравнения типа Дайсона.

Результаты

Используя уравнение Дайсона (9) в качестве модели, пространственно-временные данные позволяют нам определить параметры однородной части и параметры корреляционной части с помощью процедуры инверсии. Для одномерного уравнения такая процедура позволяет определить среднюю скорость распространения волн, плотность включений и корреляционный радиус включений. Кроме того, задача линейной регрессии является низкоразмерной и численные эксперименты мы проводили с помощью стандартных функций пакетов математических вычислений. При переходе к многомерным дифференциальным уравнениям размерность задачи значительно возрастает, поэтому мы планируем воспользоваться методами разреженной идентификации нелинейных динамических систем PY-SINDy [4] для машинного обучения включив туда интегральную часть с линейной параметризацией оператора корреляции. Результаты представлены ниже (рис. 3).

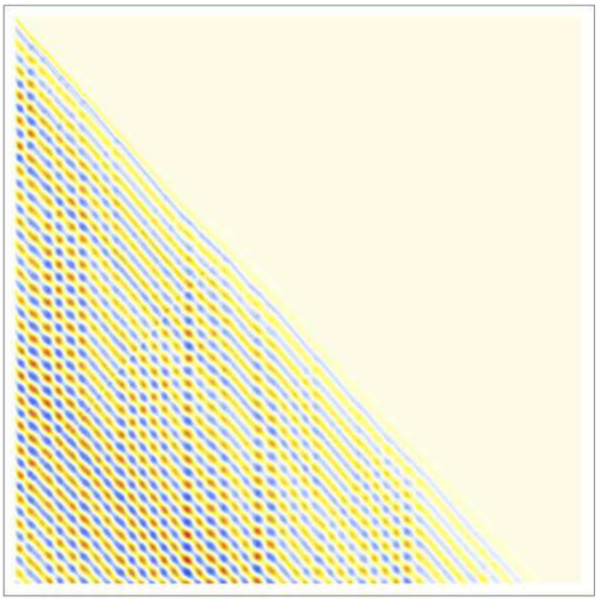

Рис. 3. u_{data}, вычисленные для прохождения волны через слоистую среду

Заключение

Исследование, представленное в данной работе, демонстрирует значительный потенциал применения методов машинного обучения [11, 14-17] в анализе и моделировании сложных стохастических систем. Полученные результаты могут быть применены в различных отраслях, где исследователи сталкиваются с распространением упругих волн в случайно-неоднородных средах. Примером таких практических задач могут быть цифровые исследования кернов (Digital Rock), снижение влияния шума, вызванного карстовыми образованиями в верхней части разреза, при сейсмических исследованиях регионов с таким строением. Основываясь на методе Дайсона-Швингера, мы не только смогли упростить математическое описание стохастических процессов, но и сохранили важную информацию о корреляциях в системе. Это открывает новые перспективы для понимания физических процессов, происходящих в случайно неоднородных средах, и разработки новых технологий для их исследования и мониторинга.

Список литературы

1. Курьянов Ю.А., Кухаренко Ю.А., Рок В.Е. Теоретические модели в сейсмоакустике поротрещиноватых упругих сред. – Москва: Государственный научный центр Российской Федерации – ВНИИгеосистем, 2002. – 202 с.
2. Гончарук В.А., Сбойчаков А.М., Власов С.Н., Поляк П.Л., Кухаренко Ю.А. Уравнения движения нелинейной упругой случайно неоднородной среды // Нелинейная динамика. – 2009. – Т. 5, №2. – С. 205-213.
3. Garnier J. Multiscale analysis of wave propagation in random media // Proceedings of the International Congress of Mathematicians: Rio de Janeiro. – 2018. – P. 2877-2902.
4. Messenger D.A., Bortz D.M. Weak SINDy for Partial Differential Equations // Journal of Computational Physics. 2021, vol. 443, p. 110525. DOI: 10.1016/j.jcp.2021.110525.
5. Garnier J., Sølna K. Fourth-order moments analysis for partially coherent electromagnetic beams in random media // Waves in Random and Complex Media. 2023, vol. 33.5-6, pp. 1346-1365.
6. Gu Y., Komorowski T. Gaussian fluctuations from random Schrödinger equation // Communications in Partial Differential Equations. 2021, vol. 46.2, pp. 201-232. DOI: 10.1080/03605302.2020.1836493.
7. Guo Z., Hu X., Liu J., Liu C., Xiao J. Geophysical Field Data Interpolation Using Stochastic Partial Differential Equations for Gold Exploration in Dayaoshan, Guangxi, China // Minerals. 2018, vol. 9.1, p. 14. DOI: 10.3390/min9010014.
8. Ikeda K., Goldfarb E.J., Tisato N. Calculating effective elastic properties of Berea sandstone using the segmentation less method without targets // Journal of Geophysical Research: Solid Earth. 2020, vol. 125.6, p. e2019JB018680.
9. Татарский В.И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. – М.: Наука, 1969. – 548 с.
10. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Том 1. – М.-Л.: ГТТИ, 1933. – 525 с.
11. Brunton S.L., Proctor J.L., Kutz J.N. Discovering governing equations from data by sparse identification of nonlinear dynamical systems // Proceedings of the National Academy of Sciences. 2016, vol. 113, no. 15, pp. 3932-3937.
12. Mattuck R.D. A Guide to Feynman Diagrams in the Many-body Problem: Second Edition. – Courier Corporation, Science, 2012. – 464 p.
13. Кухаренко Ю.А., Сбойчаков А.М., Власов С.Н., Поляк П.Л. Связь эффективных параметров сейсмических волн со свойствами трещиноватой среды // Материалы Второй Международной сейсмологической школы «Современные методы обработки и интерпретации сейсмологических данных». – Обнинск: ГС РАН, 2007. С. 126-130.
14. Kaye J., Golez D. Low rank compression in the numerical solution of the nonequilibrium Dyson equation // SciPost Physics. 2021, vol. 10(4), p. 91.
15. Novikov A.V., Posvyanskii D.V. The use of Feynman diagrammatic approach for well test analysis in stochastic porous media // Computational Geosciences. 2020, vol. 24(2), pp. 921-931.
16. Samuel H.R., Brunton S.L., Proctor J.L., Nathan Kutz J. Data-driven discovery of partial differential equations // Science advances. 2017, vol. 3, no. 4, p. e1602614.
17. Pengzhan Jin L.L., Pang G., Zhang Zh., Karniadakis G. Em. Learning nonlinear operators via DeepONet based on the universal approximation theorem of operators // Nature Machine Intelligence. 2021, vol. 3, no. 3, pp. 218-229.

References

1. Kuryanov Yu.A., Kukharenko Yu.A., Rok V.E. Theoretical Models in Seismoacoustics of Porous and Fractured Elastic Media. – M.: State Scientific Center of the Russian Federation – VNIIGeosystems, 2002. – 202 p.
2. Goncharuk V.A., Sboychakov A.M., Vlasov S.N., Polyak P.L., Kukharenko Yu.A. Equations of Motion for Nonlinear Elastic Randomly Inhomogeneous Media // Nonlinear Dynamics. 2009, vol. 5, no. 2, pp. 205-213.
3. Garnier J. Multiscale analysis of wave propagation in random media // Proceedings of the International Congress of Mathematicians: Rio de Janeiro. – 2018. – P. 2877-2902.
4. Messenger D.A., Bortz D.M. Weak SINDy for Partial Differential Equations // Journal of Computational Physics. 2021, vol. 443, p. 110525. DOI: 10.1016/j.jcp.2021.110525.
5. Garnier J., Sølna K. Fourth-order moments analysis for partially coherent electromagnetic beams in random media // Waves in Random and Complex Media. 2023, vol. 33.5-6, pp. 1346-1365.
6. Gu Y., Komorowski T. Gaussian fluctuations from random Schrödinger equation // Communications in Partial Differential Equations. 2021, vol. 46.2, pp. 201-232. DOI: 10.1080/03605302.2020.1836493.

7. Guo Z., Hu X., Liu J., Liu C., Xiao J. Geophysical Field Data Interpolation Using Stochastic Partial Differential Equations for Gold Exploration in Dayaoshan, Guangxi, China // Minerals. 2018, vol. 9.1, p. 14. DOI: 10.3390/min9010014.
8. Ikeda K., Goldfarb E.J., Tisato N. Calculating effective elastic properties of Berea sandstone using the segmentation less method without targets // Journal of Geophysical Research: Solid Earth. 2020, vol. 125.6, p. e2019JB018680.
9. Tatarsky V.I. Wave Propagation in a Turbulent Atmosphere. – M.: Science, 1969. – 548 p.
10. Courant R., Hilbert D. Methods of Mathematical Physics, Vol. 1. – M.-L.: Gostekhizdat, 1933. – 525 p.
11. Brunton S.L., Proctor J.L., Kutz J.N. Discovering governing equations from data by sparse identification of nonlinear dynamical systems // Proceedings of the National Academy of Sciences. 2016, vol. 113, no. 15, pp. 3932-3937.
12. Mattuck R.D. A Guide to Feynman Diagrams in the Many-body Problem: Second Edition. – Courier Corporation, Science, 2012. – 464 p.
13. Kukharenko Yu.A., Sboychakov A.M., Vlasov S.N., Polyak P.L. The Relationship of Effective Parameters of Seismic Waves with Properties of Fractured Media // Proceedings of the Second International Seismological School "Modern Methods of Processing and Interpretation of Seismological Data". – Obninsk: GS RAS, 2007. – P. 126-130.
14. Kaye J., Golez D. Low rank compression in the numerical solution of the nonequilibrium Dyson equation // SciPost Physics. 2021, vol. 10(4), p. 91.
15. Novikov A.V., Posvyanskii D.V. The use of Feynman diagrammatic approach for well test analysis in stochastic porous media // Computational Geosciences. 2020, vol. 24(2), pp. 921-931.
16. Samuel H.R., Brunton S.L., Proctor J.L., Nathan Kutz J. Data-driven discovery of partial differential equations // Science advances. 2017, vol. 3, no. 4, p. e1602614.
17. Pengzhan Jin L.L., Pang G., Zhang Zh., Karniadakis G. Em. Learning nonlinear operators via DeepONet based on the universal approximation theorem of operators // Nature Machine Intelligence. 2021, vol. 3, no. 3, pp. 218-229.

Сведения об авторах:	*Information about authors:*
Сбойчаков Алексей Максимович – аспирант	**Sboychakov Aleksey Maksimovich** – postgraduate student
Пупасов-Максимов Андрей Михайлович – кандидат физико-математических наук, профессор	**Pupasov Maksimov Andrey Mikhailovich** – candidate of physical and mathematical sciences, professor
mathtyper@gmail.com	

Получена 04.12.2023