

## ПРИБЛИЖЕННОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА С ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ

*Алексеев А.В., Луценко Е.А.*

*Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева,  
Самара*

**Ключевые слова:** кинетический момент, динамическая асимметрия, вязкая жидкость, уравнения движения, метод Ван-дер-Поля.

**Аннотация.** Рассматривается движение относительно центра масс или около неподвижной точки свободного твердого тела, имеющего малую динамическую асимметрию, со сферической полостью, заполненной жидкостью большой вязкости. Приводится математическая модель движения системы с описанием входящих в нее параметров. Большая вязкость жидкости в полости и малая асимметрия тела характеризуются малым параметром. Для преобразованных дифференциальных уравнений движения после замены переменных строится приближенное аналитическое решение асимптотическим методом Ван-дер-Поля. Производится сравнение полученных решений с аналогичными, полученными ранее, и с численным, а также осуществляется оценка и анализ погрешности. Делается вывод о том, что точность метода Ван-дер-Поля на небольших интервалах времени ниже, чем точность метода Пуанкаре. Однако решение методом Ван-дер-Поля точнее показывает амплитуду колебаний, а также сами аналитические зависимости гораздо лучше поддаются анализу.

## APPROXIMATE ANALYTICAL SOLUTION OF DYNAMIC EQUATIONS OF MOTION OF A BODY WITH VISCOUS LIQUID

*Alekseev A.V., Lutsenko E.A.*

*Samara National Research University, Samara*

**Keywords:** kinetic moment, dynamic asymmetry, small parameter, analytical solution, Van-der-Pol's method.

**Abstract.** The motion with respect to the centre of mass or about a fixed point of a free solid body having a small dynamic asymmetry with a spherical cavity filled with a fluid of high viscosity is considered. A mathematical model of the motion of the system with a description of its constituent parameters is given. The large viscosity of the fluid in the cavity and the small asymmetry of the body are characterised by a small parameter. For the transformed differential equations of motion after replacement of variables, an approximate analytical solution is constructed by the asymptotic Van-der-Pol method. The obtained solutions are compared with similar solutions obtained earlier and with the numerical one, and the error is evaluated and analysed. It is concluded that the accuracy of the Van-der-Pol method at small time intervals is lower than that of the Poincaré method. However, the solution of the Van-der-Pol method more accurately shows the amplitude of oscillations, as well as the analytical dependencies themselves are much better analysed.

### Введение

Задача исследования движения систем твердых тел, содержащих полости с жидкостью, не теряет своей актуальности. Одним из наиболее распространенных приложений данной проблемы является необходимость учета влияния жидкого топлива на пространственное движение ракетно-космических систем, в которых объем топлива может быть весьма существенным. Возмущения, появляющиеся из-за наличия жидкости, вызываются возможными всплесками, перетеканием, трением, возникающим между жидкостью и стенками резервуара. Кроме того, при наличии вращений твердого тела жидкость вовлекается в движение с некоторым запаздыванием, что влияет на распределение кинетического момента внутри системы.

Достаточно большое число работ посвящено построению уравнений движения твердых тел с полостями, заполненными вязкой или идеальной жидкостью [1-4]. По составленным уравнениям осуществляется анализ устойчивости различных движений, в основном, вращений относительно неподвижной оси.

Меньшее количество работ посвящено аналитическим решениям уравнений движения. Связано это со сложностью системы: существенная нелинейность, интегродифференциальная структура, наличие распределенных параметров, добавление уравнений движения сплошных сред в частных производных и т.д. В связи с этим, возникает необходимость приводить исходные математические модели к упрощенным, позволяющим находить аналитические решения. Одним из первых методик приведения полной системы к упрощенной предложил Ф.Л. Черноусько [4]. Математическая модель, построенная в скалярном виде на основании предложенного им метода, представлена в работах [5, 6].

Данная работа является логическим продолжением и развитием статьи [7], в которой методом Пуанкаре получено приближенное аналитическое решение динамических уравнений движения относительно центра масс (неподвижной точки) динамически несимметричного твердого тела со сферической полостью, заполненной вязкой жидкостью (рис. 1).

Однако полученные в [7] решения не позволяют в полной мере проанализировать влияние параметров системы на движение в связи с достаточной громоздкостью формул, а также довольно быстрым расхождением зависимостей параметров движения от времени. В связи с этим возникает задача получения аналитических решений в более удобном для анализа виде, например, методом Ван-дер-Поля, и сравнения с результатами, полученными ранее в [7].

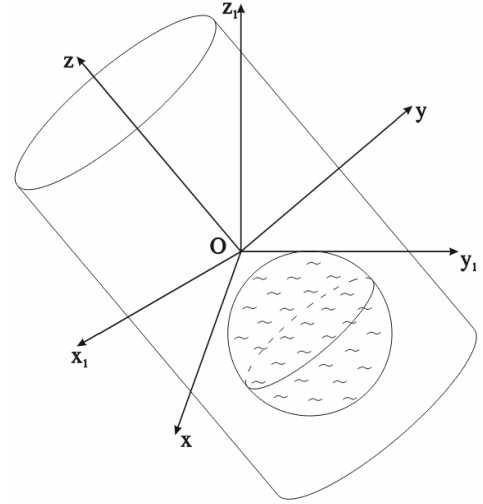


Рис. 1. Расчетная схема

### 1. Математическая модель

За основу математической модели возьмем динамические уравнения движения относительно неподвижной точки твердого тела со сферической полостью. Согласно [4, 5] они будут выглядеть:

$$\begin{aligned}
 A\dot{p} + (C - A - \mu C)qr &= -\rho\nu^{-1}D \left( A^{-1} \left[ (A + \mu C - C)(\dot{q}r + q\dot{r}) \right] + \right. \\
 &\quad \left. + qC^{-1}[-\mu Cpq] - r(A + \mu C)^{-1} \left[ (C - A)pr \right] \right); \\
 (A + \mu C)\dot{q} + (A - C)pr &= -\rho\nu^{-1}D \left( (A + \mu C)^{-1} \left[ (C - A)(\dot{p}r + p\dot{r}) \right] + \right. \\
 &\quad \left. + rA^{-1} \left[ (A - C + \mu C)qr \right] - pC^{-1}[-\mu Cpq] \right); \\
 C\dot{r} + \mu Cpq &= -\rho\nu^{-1}D \left( C^{-1}[-\mu C(\dot{p}q + p\dot{q})] + \right. \\
 &\quad \left. + p(A + \mu C)^{-1} \left[ (C - A)pr \right] - qA^{-1} \left[ (A - C + \mu C)qr \right] \right),
 \end{aligned} \tag{1}$$

где  $A, C$  – моменты инерции твердого тела относительно главных осей инерции, а третий момент инерции  $B$  представлен в виде  $B = A + \mu C$ ,  $\mu$  – малый параметр;  $p, q, r$  – проекции вектора угловой скорости на оси связанной системы координат  $Oxyz$ ;  $\rho$  – плотность жидкости,  $\nu$  – кинематическая вязкость жидкости,  $D$  – параметр полости, характеризующий диссипацию жидкости, для сферической полости определяемый согласно [4] по формуле  $D = 8\pi R^7/525$ ,  $R$  – радиус полости.

Рассмотрим случай, когда твердое тело обладает малой динамической асимметрией ( $0 < \mu \ll 1$ ). Так как рассматривается случай большой кинематической вязкости жидкости, величина  $\rho\nu^{-1}D$  является малой, что согласно [4] позволяет пренебречь членами второго порядка малости. После учета ограничений и преобразований уравнения (1) примут вид:

$$\begin{cases} \dot{p} - aqr = \mu(1-a)[qr - bA^{-1}apr^2]; \\ \dot{q} + apr = \mu(1-a)a[pr - bA^{-1}qr^2]; \\ \dot{r} = \mu[-pq + bC^{-1}a(p^2 + q^2)r], \end{cases} \quad (2)$$

где  $a = (A-C)A^{-1}$ , а  $b$  – ограниченная постоянная порядка 1, которая характеризуется выражением  $\rho v^{-1}D = \mu b$ .

## 2. Метод Ван-дер-Поля

Решим систему дифференциальных уравнений (2) методом Ван-дер-Поля [8-10]. Введём замену переменных:

$$p = x \cos y, \quad q = x \sin y, \quad r = z. \quad (3)$$

Тогда уравнения (2) примут вид:

$$\begin{cases} \dot{x} \cos y - x\dot{y} \sin y - axz \sin y = \mu(1-a)[xz \sin y - bA^{-1}axz^2 \cos y]; \\ \dot{x} \sin y + x\dot{y} \cos y + axz \cos y = \mu(1-a)a[xz \cos y - bA^{-1}xz^2 \sin y]; \\ \dot{z} = \mu[-x^2 \cos y \sin y + bC^{-1}ax^2z]. \end{cases} \quad (4)$$

Выразим из (4) старшие производные переменных:

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu(1-a)xz[(1+a) \sin y \cos y - bA^{-1}az]; \\ \dot{y} = -az - \mu(1-a)z[\sin^2 y - a \cos^2 y]; \\ \dot{z} = \mu x^2[-\cos y \sin y + bC^{-1}az]. \end{cases} \quad (5)$$

Уравнения (5) показывают, что производные по времени переменных  $x$  и  $z$  имеют порядок малого параметра  $\mu$ , а переменной  $y$  – порядок единицы. Следовательно, согласно [8], величины переменных  $x$  и  $z$  являются медленными, а величина переменной  $y$  – быстрой. Следуя методике, изложенной в [8], произведем процедуру усреднения по быстрой переменной  $y$ :

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu(1-a)xz[(1+a) \sin y \cos y - bA^{-1}az] dy; \\ \dot{y} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (-az - \mu(1-a)z[\sin^2 y - a \cos^2 y]) dy; \\ \dot{z} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu x^2[-\cos y \sin y + bC^{-1}az] dy. \end{cases} \quad (6)$$

Вычисляя интегралы в (6), получим укороченные уравнения Ван-дер-Поля:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\mu(1-a)bA^{-1}axz^2; \\ \dot{y} = -az - 0,5\mu(1-a)^2z; \\ \dot{z} = \mu bC^{-1}ax^2z. \end{cases} \quad (7)$$

Решая систему дифференциальных уравнений (7), получим:

$$\begin{cases} x = \sqrt{x_0^2 + z_0^2 \left(1 - \frac{(A-C)^2}{A^2}\right) - \left(1 - \frac{(A-C)^2}{A^2}\right) m^2 \operatorname{th} \left[ mnt + \operatorname{arth} \left[ \frac{1}{2m} \right] \right]^2}; \\ y = \left[ -\frac{A-C}{A} - \frac{1}{2} \mu \left(1 - \left(\frac{A-C}{A}\right)^2\right) \right] Z(t); \\ z = m \operatorname{th} \left[ mnt + \operatorname{arth} \left[ \frac{1}{2m} \right] \right], \end{cases} \quad (8)$$

где  $Z(t)$  – первообразная функции  $z(t)$ ,  $m = \sqrt{\frac{A^2}{2AC - C^2} x_0^2 + z_0^2}$ ,

$$n = \frac{\rho D}{\nu C} \left( 1 - \left( \frac{A-C}{A} \right)^2 \right) \left( \frac{A-C}{A} \right).$$

На рисунке 2 представлены графики зависимостей проекции  $p$  угловой скорости твердого тела на оси связанной системы координат  $Oxuz$  от времени, полученные численным интегрированием системы (2) и асимптотическим методом Ван-дер-Поля (8).

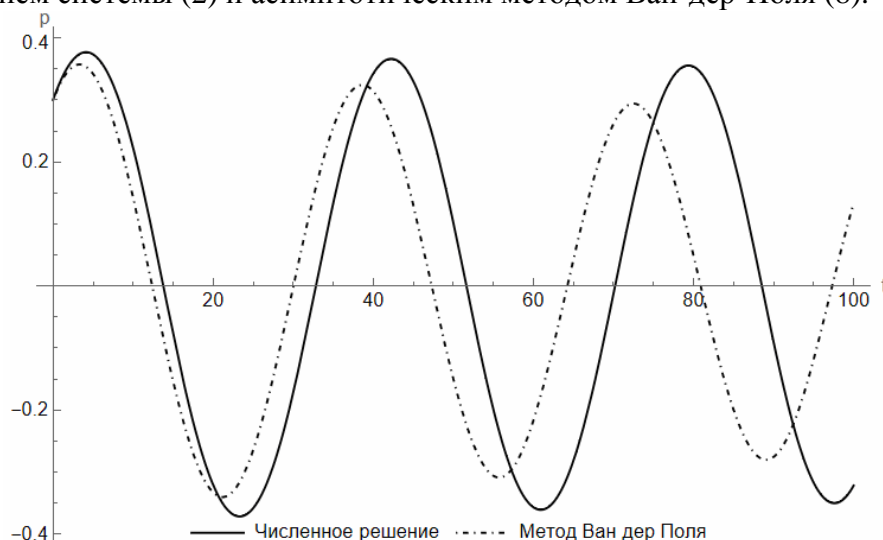


Рис. 2. Зависимость проекции угловой скорости  $p(t)$  от времени

При выполнении численного эксперимента использованы следующие значения параметров системы:  $A = 10 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ,  $C = 7 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ,  $\rho = 800 \text{ кг/м}^3$ ,  $\nu = 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $D = 1,7 \cdot 10^{-8} \text{ м}^7$ ,  $\mu = 0,1$ .

Приближенное аналитическое решение достаточно близко к численному на начальном этапе движения – примерно до 20-й секунды, что соответствует практически любому асимптотическому методу. С увеличением времени наблюдается значительное смещение по фазе, что характерно для метода Ван-дер-Поля.

### 3. Сравнение методов

В работе [7] получено приближенное аналитическое решение уравнений (2) методом Пуанкаре. Полученные в результате решения оказались весьма громоздкими, что не позволяет полностью привести их в данной работе. Представим укороченный вид:

$$\begin{cases} p = p(0) \cos kt + q(0) \sin kt + \mu p_1(t); \\ q = q(0) \cos kt - p(0) \sin kt + \mu q_1(t); \\ r = r(0) + \mu \left[ (q^2(0) - p^2(0))(1 - \cos 2kt) + 4kgt - 2p(0)q(0) \sin 2kt \right] / 4k, \end{cases} \quad (9)$$

где  $p_1$  и  $q_1$  – известные функции, зависящие от начальных условий, инерционно-массовых параметров и от времени.

Ключевым различием решений является то, что при приближении методом Пуанкаре возникает отклонение от численного решения по амплитуде колебаний в то время, как в методе Ван-дер-Поля происходит смещение по фазе колебаний. Для наглядности на рисунках 3-4 представлены графики зависимости координат  $p$  и  $r$  от времени для численного и двух асимптотических решений.

Основными преимуществами метода Ван-дер-Поля являются более простой вид аналитического решения, а также более точное отслеживание амплитуды колебаний параметров движения, что значительно увеличивает спектр его применимости.

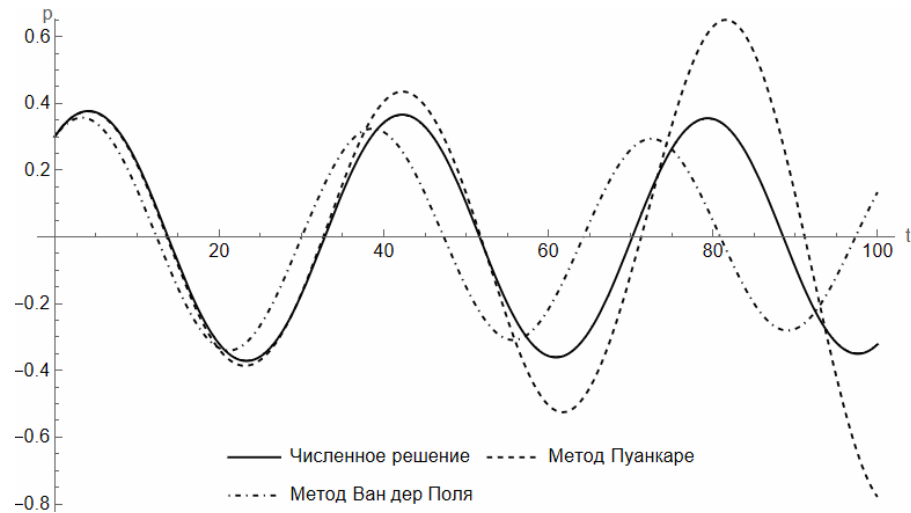


Рис. 3. Зависимость проекции угловой скорости  $p(t)$  от времени

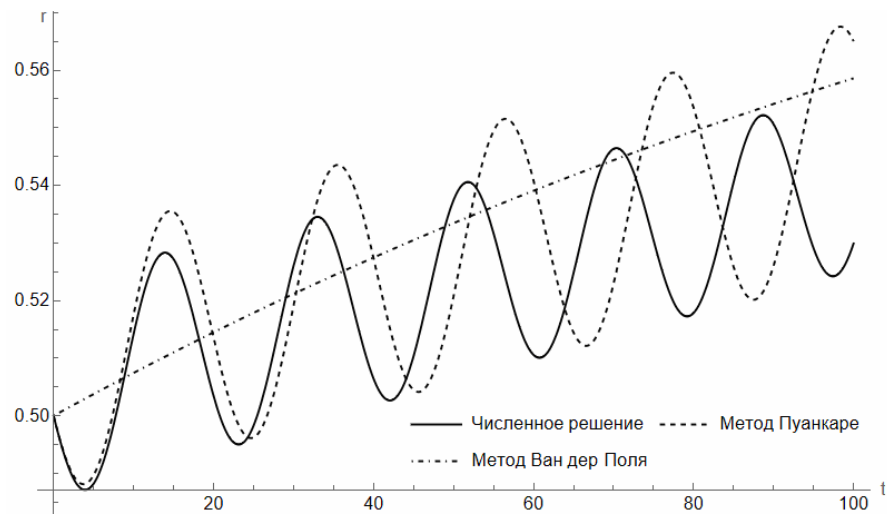


Рис. 4. Зависимость проекции угловой скорости  $r(t)$  от времени

#### 4. Анализ точности решений

Для анализа точности будем определять погрешность полученных решений, как квадрат площади между графиками численного и аналитического решений. Для угловой скорости  $p$  формула для вычисления погрешности примет вид:

$$S_p = \int_0^{t_k} (p_{\text{числ}}(t) - p_{\text{асимпт}}(t))^2 dt, \quad (10)$$

где  $p_{\text{числ}}(t)$  – зависимость проекции угловой скорости от времени, полученная численным методом,  $p_{\text{асимпт}}(t)$  – зависимость, полученная одним из асимптотических методов.

На рисунках 5 и 6 приведены графики зависимости погрешности численных методов от интервала (времени), на котором производится интегрирование уравнений движения, и от величины малого параметра соответственно.

Не трудно заметить, что при любых значениях малого параметра и на любых интервалах интегрирования (до 100 с) метод Ван-дер-Поля даёт большую погрешность, чем метод Пуанкаре. Однако на промежутке времени до 30 секунд и при малом параметре не более 0,05 разница между данными методами минимальна, что делает метод Ван-дер-Поля более предпочтительным в силу более информативного вида аналитического решения.

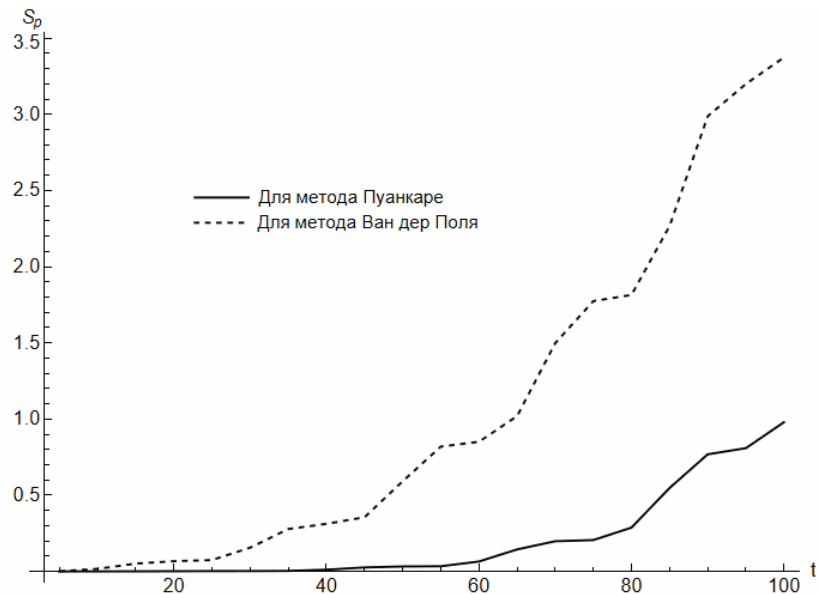


Рис. 5. Зависимость погрешности  $S_p(t)$  от времени

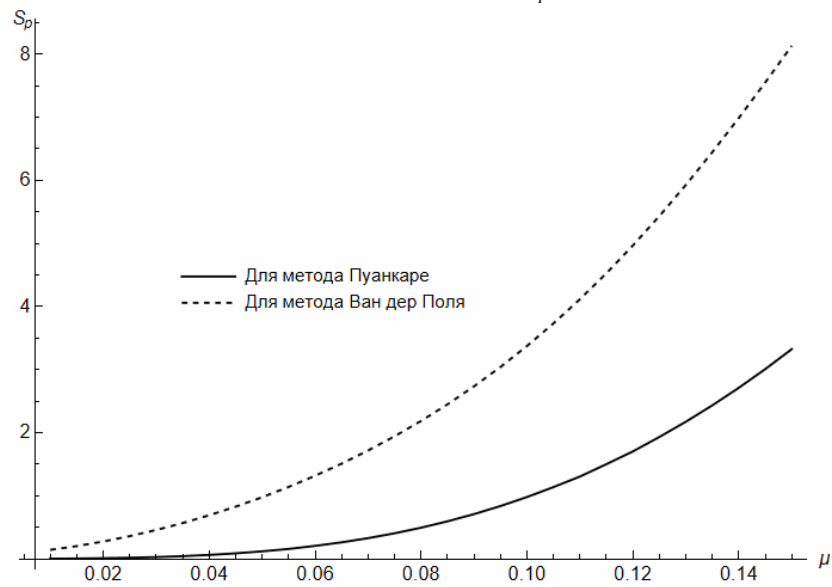


Рис. 6. Зависимость погрешности  $S_p(\mu)$  от значения параметра

### Заключение

В результате выполнения работы получены численные и аналитические решения динамических уравнений движения относительно неподвижной точки твердого тела со сферической полостью, заполненной вязкой жидкостью, с помощью методов Пуанкаре и Ван-дер-Поля. Оценка решений, а также анализ погрешностей показали, что метод Пуанкаре является сильным инструментом на малых периодах времени, но даёт решения в весьма громоздком виде. Метод же Ван-дер-Поля имеет большую погрешность даже на малых отрезках времени, но результат является более наглядным и подходящим для анализа.

### Список литературы

1. Жуковский Н.Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью. Собрание сочинений. Т. 2. Гидродинамика. – М.: Гостехиздат, 1949. – 139 с.
2. Моисеев Н.Н., Румянцев В.В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. – М.: Наука, 1965. – 439 с.
3. Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Лешенко Д.Д. Эволюция движений твердого тела относительно центра масс. – М.-Ижевск: Ижевский институт компьютерных исследований, 2015. – 308 с.
4. Черноусько Ф.Л. Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость. – М.: Изд. ВЦ АН СССР, 1968. – 250 с.

5. Алексеев А.В., Дорошин А.В. Приведение спутника-гиростата с полостью с жидкостью к системам твердых тел с вязким трением // Полет. Общероссийский научно-технический журнал. – 2007. – № 9. – С. 26-33.
6. Алексеев А. В. Аналитическое решение динамических уравнений движения твердого тела с жидкостью большой вязкости // Вестник БГУ. Математика, информатика. – 2022. – №4. – С. 30-37.
7. Алексеев А.В., Луценко Е.А. Приближенное решение уравнений движения динамически несимметричного тела с вязкой жидкостью // Вестник БГУ. Математика, информатика. – 2023. – №3. – С. 53-61.
8. Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики. – М.: Наука, 1969. – 380 с.
9. Кузнецов А.П., Селиверстова Е.С., Трубецков Д.И., Тюрюкина Л.В. Феномен уравнения Ван дер Поля // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. – 2014. – №4. – С. 3-42.
10. Ланда П.С. Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. – 2010. – №1. – С. 143-145.

#### References

1. Zhukovsky N.E. On the motion of a solid body having cavities filled with homogeneous drop liquid. Collected Works. Vol. 2. Hydrodynamics. – М.: Gostechizdat, 1949. – 139 p.
2. Moiseev N.N., Rumyantsev V.V. Dynamics of a body with cavities containing liquid. – М.: Science, 1965. – 439 p.
3. Chernousko F.L., Akulenko L.D., Leshchenko D.D. Evolution of motions of a solid body relative to the centre of mass. – М.- Izhevsk: Izhevsk Institute of Computer Research, 2015. – 308 p.
4. Chernousko F.L. Motion of a Solid Body with Cavities Containing Viscous Liquid. – М.: Publ. house of VTS AS USSR, 1968. – 250 p.
5. Alekseev A.V., Doroshin A.V. Bringing the gyrostat satellite with a cavity with a liquid to the systems of solid bodies with viscous friction // Polet. All-Russian scientific and technical journal. 2007, no. 9, pp. 26-33.
6. Alekseev A.V. Analytical solution of the dynamic equations of motion of a solid body with a high viscosity liquid // Bulletin of BSU. Mathematics, Informatics. 2022, no. 4, pp. 30-37.
7. Alekseev A.V., Lutsenko E.A. Approximate solution of the equations of motion of dynamically asymmetric body with a viscosity liquid // Bulletin of BSU. Mathematics, Informatics. 2023, no. 3, pp. 53-61.
8. Moiseev N.N. Asymptotic methods of nonlinear mechanics. – М.: Science, 1969. – 380 p.
9. Kuznetsov A.P., Seliverstova E.S., Trubetskov D.I., Tyuryukina L.V. Phenomenon of the Van der Pol equation // News of universities. Applied nonlinear dynamics. 2014, no. 4, pp. 3-42.
10. Landa P.S. Auto oscillations in systems with a finite number of degrees of freedom // News of universities. Applied nonlinear dynamics. 2010, no. 1, pp. 143-145.

#### *Сведения об авторах:*

#### *Information about authors:*

|   |   |
|---|---|
| <b>Алексеев Алексей Владимирович</b> – кандидат технических наук, доцент кафедры теоретической механики | <b>Alekseev Aleksey Vladimirovich</b> – candidate of technical sciences, associate professor of Department of theoretical mechanics |
| <b>Луценко Евгений Андреевич</b> – студент<br>alexeeff05@mail.ru  | <b>Lutsenko Evgeniy Andreevich</b> – student  |

*Получена 13.02.2024*