*Ивановская А.В.* О методе аналитического решения отдельного класса дифференциальных уравнений поперечных колебаний стержней // Транспортное, горное и строительное машиностроение: наука и производство. – 2024. – № 24. – С. 9-16.

УДК 621.31 https://doi.org/10.26160/2658-3305-2024-24-9-16

# О МЕТОДЕ АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ОТДЕЛЬНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЕЙ

***Ивановская А.В.***
*Керченский государственный морской технологический университет, Керчь*

**Ключевые слова:** переменность нагружения, стержень, дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами, интегрирование в квадратурах, собственные частоты, формы колебаний.
**Аннотация.** В современных условиях важной является задача создания отечественного конкурентоспособного оборудования, к которому предъявляются требования по импортозамещенности, надежности, автоматизации, простоте производства и эксплуатации. Проектирование таких машин должно базироваться на математических моделях, наиболее полно учитывающих особенности их работы. Отдельный интерес вызывает рыбопромысловое судно и его оборудование. При работе рыбопромыслового оборудования сложные динамические нагрузки возникают не только при пусках и торможениях, но и в период установившегося режима. Это обусловлено влиянием внешних гидрометеорологических факторов, а также переменностью нагружения (масса, размеры, форма, сопротивление и т.д. буксируемого объекта). Поэтому зачастую математические модели, описывающие динамику работы таких механических систем, представляют собой дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами. Для поиска их качественных характеристик необходимо аналитическое решение получаемых уравнений. В случае, если математическая модель представлена уравнением в частных производных, то это приводит к интегрированию дифференциальных уравнений 4 порядка. В работе представлена методика аналитического решения дифференциальных уравнений 4 порядка с переменными коэффициентами. В качестве примера рассмотрена задача о поперечных колебаниях брашпиля, представленного в виде стержня с переменными жесткостью, диаметром сечения и массой. Пользуясь полученной методикой, получены аналитические зависимости для определения двух первых собственных частот колебаний.

# ON THE METHOD OF ANALYTICAL SOLUTION OF A SEPARATE CLASS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS OF TRANSVERSE VIBRATIONS OF RODS

***Ivanovskaya A.V.***
*Kerch State Maritime Technological University, Kerch*

**Keywords:** load variability, rod, differential equations with variable coefficients, integration in quadratures, natural frequencies, waveforms.
**Abstract.** In modern conditions, it is important to create indigenous competitive equipment, which is required for import substitution, reliability, automation, ease of production and operation. The design of such machines should be based on mathematical models that take into account the most appropriate features of their work. The fishing vessel and its equipment are of particular interest. Regarding to the fishing equipment, complex dynamic loads occur not only at starts and braking, but also during the established regime. They are caused by the influence of external hydrometeorological factors, as well as the variability of the load (mass, size, shape, resistance, etc. of the towed object). Therefore, often mathematical models describing the dynamics of such mechanical systems are differential equations with variable coefficients. To find their qualitative characteristics, an analytical solution of the resulting equations is necessary. In the case that the mathematical model is represented by the partial derivative equation, this leads to the integration of differential equations of order 4. The article presents a method of solution of differential equations of order 4 with variable coefficients. As an example, the problem of transverse vibrations of a windlass presented in the form of a rod with variable stiffness, cross-section diameter and mass is considered. Using the obtained technique, analytical dependences are obtained to determine the first two natural frequencies of vibrations.

## Введение

Необходимость разработки новых подходов к созданию современного конкурентноспособного энергетического оборудования обусловлена тенденцией мирового рынка, направленной на усиление технических требований и эксплуатационных характеристик оборудования. Знание и определение динамических характеристик машин является научной задачей на всех стадиях их проектирования и позволяет перейти к расчету мощности оборудования. Создание нового оборудования основано на применении методов математического и экспериментального моделирования. Автоматизация процессов и оборудования невозможна без создания моделей, которые более полно описывают суть динамических явлений. По объективным причинам сегодня активно используются методы численного моделирования, но, как известно, кроме количественных оценок процесса зачастую важнее найти его качественные показатели, что возможно только при условии наличия аналитических методов решения задачи определения параметров динамики движения механической системы. Аналитическое решение позволяет получить зависимости, которые можно использовать при проектировании конкретного судового оборудования.

В реальных машинах, имеющих значительные габариты и массу, движущихся с большими скоростями, сложные динамические нагрузки возникают не только при пусках и торможениях, но и во время установившихся режимов, что может привести к поломке и выходу из строя оборудования [1, 2]. Поэтому для увеличения надежности машин, их проектирование должно базироваться на моделях, учитывающих динамические усилия.

Судовым машинам и механизмам характерна нестационарность параметров системы, которые в исходных дифференциальных уравнениях выражаются переменными коэффициентами при $x$, $\dot{x}$, $\ddot{x}$.

Примерами судового оборудования, представляемого системами с переменными параметрами, являются валопровод, сечение которого имеет неодинаковые изгибные жесткости при изгибе; кривошипно-шатунный механизм двигателя внутреннего сгорания, имеющий периодически изменяющуюся приведенную массу; различного рода палубное грузоподъемное оборудование, у которого наблюдается переменность нагружения [3]. Математические модели, описывающие динамику работы такого оборудования, являются дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами различного порядка. К задачам интегрирования линейных дифференциальных уравнений 4-го порядка с переменными коэффициентами приводит решение ряда задач, которые описываются дифференциальными уравнениями в частных производных [4-6]. В частности, можно выделить задачи, которые связаны с расчетом параметров колебаний стержневых систем [7]. Решение этих задач носит большой прикладный характер в машино-, судо-, авиа и ракетостроении, где широко используются расчетные схемы со стержневыми элементами.

**Целью** работы является нахождение аналитического решения отдельного класса дифференциальных уравнений поперечных колебаний стержней.

**Материалы и методы**

Пусть мы имеем исходное уравнение

$$a_0(t)\frac{d^4x}{dt^4}+a_1(t)\frac{d^3x}{dt^3}+a_2(t)\frac{d^2x}{dt^2}+a_3(t)\frac{dx}{dt}+a_4(t)x=0. \qquad (1)$$

Определим для этого случая переменные коэффициенты, при которых указанное уравнение будет интегрируемым. Подберем определяющую функцию $z=f(t)$, которая непрерывная и определена на промежутке $t\in(t_0;t_k)$, имеет четвертую производную и $f(t)>0$, $f'(t)\neq 0$ [8].

Обозначим $\dfrac{dz}{dt}=f'(t)=\varphi(t)$.

Учитывая это, представим первую, вторую, третью и четвертую производные уравнения (1) в виде

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dx}{dz}\varphi(t);$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d}{dz}\left[\frac{dx}{dz}\varphi(t)\right]\frac{dz}{dt}=\frac{d^2x}{dz^2}\varphi^2(t)+\frac{dx}{dz}\varphi'(t);$$

$$\frac{d^3x}{dt^3}=\frac{d}{dt}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)=\frac{d}{dz}\left[\frac{d^2x}{dz^2}\varphi^2(t)+\frac{dx}{dz}\varphi'(t)\right]\frac{dz}{dt}=\frac{d^3x}{dz^3}\varphi^3(t)+3\varphi(t)\varphi'(t)\frac{d^2x}{dz^2}+\frac{dx}{dz}\varphi''(t);$$

$$\frac{d^4x}{dt^4}=\frac{d}{dt}\left[\frac{d^3x}{dz^3}\varphi^3(t)+3\varphi(t)\varphi'(t)\frac{d^2x}{dz^2}+\frac{dx}{dz}\varphi''(t)\right]dt\frac{dz}{dt}=$$

$$=\frac{d^4x}{dz^4}\varphi^4(t)+\frac{6d^3x}{dz^3}\varphi^2(t)\varphi'(t)+\frac{d^2x}{dz^2}\left\{3\left[\varphi'(t)\right]^2+4\varphi''(t)\varphi(t)\right\}+\frac{dx}{dz}\varphi'''(t).$$

Подставим в исходное уравнение (1) эти выражения производных. Потом, собирая коэффициенты при одинаковых производных, но уже по переменной *z*, получим

$$\begin{gathered}\frac{d^4x}{dz^4}\left[a_0(t)\varphi^4(t)\right]+\frac{d^3x}{dz^3}\left[6a_0(t)\varphi^2(t)\varphi'(t)+a_1(t)\varphi^3(t)\right]+\\+\frac{d^2x}{dz^2}\left\{a_0(t)\left[3\left(\varphi'(t)\right)^2+4\varphi''(t)\varphi(t)\right]+3a_1(t)\varphi'(t)\varphi(t)+a_2(t)\varphi^2(t)\right\}+\\+\frac{dx}{dz}\left[a_0(t)\varphi'''(t)+a_1(t)\varphi''(t)+a_2(t)\varphi'(t)+a_3(t)\varphi(t)\right]+a_4(t)x=0\end{gathered}\qquad(2)$$

Применим метод постоянных коэффициентов при производных по новой переменной *z*. В уравнении (2) принимаем

$$a_0(t)\varphi^4(t)=C_0\,,\qquad(3)$$

$$6a_0(t)\varphi^2(t)\varphi'(t)+a_1(t)\varphi^3(t)=C_1\,,\qquad(4)$$

$$a_0(t)\left\{3\left(\varphi'(t)\right)^2+4\varphi''(t)\varphi(t)\right\}+3a_1(t)\varphi'(t)\varphi(t)+a_2(t)\varphi^2(t)=C_2\,,\qquad(5)$$

$$a_0(t)\varphi'''(t)+a_1(t)\varphi''(t)+a_2(t)\varphi'(t)+a_3(t)\varphi(t)=C_3\,,\qquad(6)$$

$$a_4(t)=C_4\,.\qquad(7)$$

С учетом этих постоянных равенство (2) принимает вид

$$C_0\frac{d^4x}{dz^4}+C_1\frac{d^3x}{dz^3}+C_2\frac{d^2x}{dz^2}+C_3\frac{dx}{dz}+C_4x=0\,.\qquad(8)$$

Запишем характеристическое уравнение

$$C_0r^4+C_1r^3+C_2r^2+C_3r+C_4=0\,.\qquad(9)$$

Общее решение уравнения (8) тогда будет

$$x=K_1e^{r_1z}+K_2e^{r_2z}+K_3e^{r_3z}+K_4e^{r_4z}\,,$$

где $K_1-K_4$ – постоянные величины.

Потом, переходя к исходной переменной *t*, получим

$$x=K_1e^{r_1f(t)}+K_2e^{r_2f(t)}+K_3e^{r_3f(t)}+K_4e^{r_4f(t)}\,.$$

В случае, если из четырех корней характеристического уравнения два будут комплексными $r_{1,2}=\alpha_1\pm\beta_1 i$, то решение примет вид

$$x=a_1e^{\alpha_1f(t)}\sin\left[\beta_1f(t)+\gamma_1\right]+K_3e^{r_3f(t)}+K_4e^{r_4f(t)}\,.$$

В случае четырех комплексных корней $r_{1,2}=\alpha_1\pm\beta_1 i$ и $r_{3,4}=\alpha_2\pm\beta_2 i$ решение запишем в форме

$$x=a_1e^{\alpha_1f(t)}\sin\left[\beta_1f(t)+\gamma_1\right]+a_2e^{\alpha_2f(t)}\sin\left[\beta_2f(t)+\gamma_2\right].$$

При этом постоянные величины $a_1$, $a_2$, $\gamma_1$, $\gamma_2$ определяются из начальных условий общепринятым порядком.

Перейдем теперь к определению выражений для переменных коэффициентов, которые допускают интегрирование исходного уравнения (1).

Из равенства (3), находим $a_0(t)=\dfrac{C_0}{\varphi^4(t)}$.

С учетом этого из (4) получим $a_1(t)=\dfrac{C_1}{\varphi^3(t)}-\dfrac{6C_0\varphi'(t)}{\varphi^5(t)}$.

Следующую переменную определяем из равенства (5)

$$a_2(t)=\frac{C_2}{\varphi^2(t)}-\frac{3C_1\varphi'(t)}{\varphi^4(t)}+\frac{C_0\left\{15\left[\varphi'(t)\right]^2-4\varphi''(t)\varphi(t)\right\}}{\varphi^6(t)}.$$

И, наконец, из (6) получаем

$$a_3(t)=\frac{C_3}{\varphi(t)}-\frac{C_2\varphi'(t)}{\varphi^3(t)}+\frac{C_1\left\{3\left[\varphi'(t)\right]^2-\varphi''(t)\varphi(t)\right\}}{\varphi^5(t)}+$$
$$+\frac{C_0\left\{10\varphi''(t)\varphi'(t)\varphi(t)-\varphi'''(t)\varphi^2(t)-15\left[\varphi'(t)\right]^3\right\}}{\varphi^7(t)}.$$

Кроме этого, равенством (7) уже определена величина $a_3(t)=C_4$. Подставляя эти переменные коэффициенты в исходное уравнение (1) и учитывая, что $\varphi(t)=f'(t)$, получаем

$$\begin{aligned}&\frac{C_0}{\left[f'(t)\right]^4}\frac{d^4x}{dt^4}+\left\{\frac{C_1}{\left[f'(t)\right]^3}-\frac{6C_0f''(t)}{\left[f'(t)\right]^5}\right\}\frac{d^3x}{dt^3}+\\&+\left\{\frac{C_2}{\left[f'(t)\right]^2}-\frac{3C_1f''(t)}{\left[f'(t)\right]^4}+\frac{C_0\left\{15\left[f''(t)\right]^2-4f'''(t)f'(t)\right\}}{\left[f'(t)\right]^6}\right\}\frac{d^2x}{dt^2}+\\&+\left\{\frac{C_3}{f'(t)}-\frac{C_2f''(t)}{\left[f'(t)\right]^3}+\frac{C_1\left\{3\left[f''(t)\right]^2-f'''(t)f'(t)\right\}}{\left[f'(t)\right]^5}+\right.\\&\left.+\frac{C_0\left\{10f'''(t)f''(t)f'(t)-f^{IV}(t)\left[f'(t)\right]^2-15\left[f''(t)\right]^3\right\}}{\left[f'(t)\right]^7}\right\}\frac{dx}{dt}+C_4x=0.\end{aligned}\tag{10}$$

А, подставляя сюда разные определяющие функции $f(t)$, мы снова получаем множество исходных уравнений 4-го порядка, которые интегрируются в квадратурах.

Так, например, если определяющая функция $f(t)=3t+\cos t$, то общий вид такого уравнения (10) примет форму

$$\begin{aligned}&\frac{C_0}{[3-\sin t]^4}\frac{d^4x}{dt^4}+\left\{\frac{C_1}{[3-\sin t]^3}-\frac{6C_0\cos t}{[3-\sin t]^5}\right\}\frac{d^3x}{dt^3}+\\&+\left\{\frac{C_2}{[3-\sin t]^2}+\frac{3C_1\cos t}{[3-\sin t]^4}+\frac{C_0\left\{15[\cos t]^2-4\sin t(3-\sin t)\right\}}{[3-\sin t]^6}\right\}\frac{d^2x}{dt^2}+\\&+\left\{\frac{C_3}{3-\sin t}+\frac{C_2\cos t}{[3-\sin t]^3}+\frac{C_1\left\{3[\cos t]^2-\sin t(3-\sin t)\right\}}{[3-\sin t]^5}+\right.\\&\left.+\frac{C_0\cos t\left\{10\sin t(3-\sin t)+(3-\sin t)^2-15\cos^2 t\right\}}{[3-\sin t]^7}\right\}\frac{dx}{dt}+C_4x=0.\end{aligned}$$

**Результаты исследований**

Примером механических систем, которые описываются дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами может служить палубное оборудование рыбопромыслового судна [9].

Для грузоподъемного оборудования характерна переменность параметров: гидрометеорологические факторы (ветер, волнение, качка, обледенение); переменная длина троса, с помощью которого ведутся буксировочные и грузоподъемные операции; переменные масса, форма, размеры буксируемого объекта; работа в двух средах (вода – воздух) обуславливает переменный коэффициент сопротивления. Ввиду того, что на судне отсутствует дублирование грузоподъемного оборудования, его остановка и выход из строя может привести к значительным экономическим потерям, а потому учет перечисленных факторов при создании нового оборудования просто необходим.

К задаче о поперечных колебаниях стержня в форме усеченного конуса приводится ряд прикладных задач. Так, например, колебания судового брашпиля, имеющего подобное сечение. Во время спуска-подъема, а также буксировки объекта вследствие нестационарности его параметров возникает колебательное движение, которое может негативно отразиться на работе оборудования. Поэтому целесообразно создание такой адаптивной системы управления, которая своевременно бы реагировала на изменения со стороны буксируемого объекта. В основе такой системы лежат математические модели, наиболее полно описывающие динамические процессы.

Рассмотрим поперечные колебания стержня в форме усеченного конуса (на рисунке 1 и далее по тексту показано осевое сечение такого конуса) с переменными жесткостью, диаметром по длине сечения стержня и погонной массой, изменяющимися по линейному закону,

$$h = h_0\left(1+\frac{x}{l}\right),\ m = m_0\left(1+\frac{x}{l}\right), \qquad (11)$$

где $h_0$ – диаметр сечения стержня при $x=0$; $m_0$ – погонная масса однородной балки постоянного диаметра $h_0$.

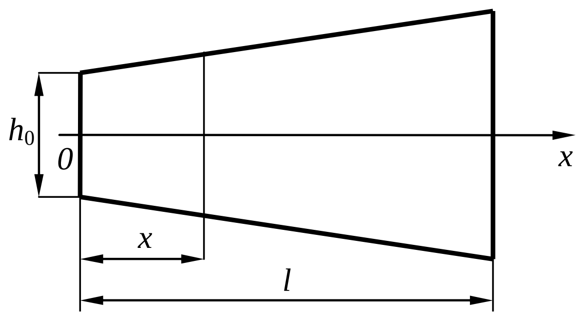



Рис. 1. Стержень переменного сечения в форме усеченного конуса

На основе вариационного принципа Остроградского-Гамильтона, может быть получено уравнение поперечных колебаний исследуемого стержня [10]

$$\begin{gathered} f(x,t) - 2m_0\left(1+\frac{x}{l}\right)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - 2\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial t} - 2P\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 2J_0\frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} - \\ -\frac{12EJ_0}{l^2}\left(1+\frac{x}{l}\right)\left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + l\left(1+\frac{x}{l}\right)\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + \frac{l^2}{6}\left(1+\frac{x}{l}\right)\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}\right] = 0, \end{gathered} \qquad (12)$$

где $f(x,t)$ – распределенная поперечная нагрузка, $P(x,t)$ – продольная сила, направленная по оси стержня.

Предположив, что длина стержня значительно превышает поперечные размеры, поэтому можно пренебречь инерцией вращения и опустить соответствующее слагаемое. Тогда, приняв $f(x,t)\equiv 0$ и $P(x,t)\equiv 0$, получим следующее уравнение поперечных колебаний

$$m_0\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{6EJ_0}{l^2}\left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + l\left(1+\frac{x}{l}\right)\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + \frac{l^2}{6}\left(1+\frac{x}{l}\right)\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}\right] = 0\,. \qquad (13)$$

Допустим, что главное колебание можно представить в виде $y(x,t)=\varphi(x)\sin(pt+\alpha)$, где $\varphi(x)$ является собственной формой колебаний, которых для стержня существует бесконечное количество и которым соответствует определенное значение собственной частоты $p$. Отсюда, уравнение (13) будет иметь вид

$$l^2\left(1+\frac{x}{l}\right)^2 \varphi^{IV} + 6l\left(1+\frac{x}{l}\right)\varphi^{III} + 6\varphi^{II} - k^4\varphi = 0\,, \tag{14}$$

где $k^4 = \dfrac{p^2 m_0 l^2}{6EJ_0}$.

Это линейное однородное дифференциальное уравнение четвертого порядка с переменными коэффициентами. Для его решения воспользуемся разработанной нами методикой решения подобного рода уравнений.

Допустим, что определяющая функция равна $z = f\left(x\right) = 2l\sqrt{1+\dfrac{x}{l}}$.

Согласно методике, постоянные коэффициенты принимаем в виде

$$C_0 = l^2; \quad C_1 = 0; \quad C_2 = 0; \quad C_3 = 0; \quad C_4 = k^4.$$

Тогда вид соответствующего решения с постоянными коэффициентами будет следующий

$$\varphi^{IV}\left(z\right) - \frac{k^4}{l^2}\varphi\left(z\right) = 0\,. \tag{15}$$

Полученное уравнение имеет четыре независимых частных решения

$$\cos\frac{k}{\sqrt{l}}z; \sin\frac{k}{\sqrt{l}}z; ch\frac{k}{\sqrt{l}}z; sh\frac{k}{\sqrt{l}}z\,,$$

и его общий интеграл

$$\varphi\left(z\right) = K_1\cos\frac{k}{\sqrt{l}}z + K_2\sin\frac{k}{\sqrt{l}}z + K_3 ch\frac{k}{\sqrt{l}}z + K_4 sh\frac{k}{\sqrt{l}}z\,, \tag{16}$$

Он содержит четыре произвольных постоянных $K_1, K_2, K_3, K_4$, которые должны быть подобраны так, чтобы для функции $\varphi(x)$ выполнялись краевые условия, т.е. условия крепления стержня.

При решении полученного уравнения воспользуемся функциями Крылова [10], одним из преимуществ которых является то, что с их помощью можно сразу записать выражение общего интеграла исходного уравнения, которое удовлетворяет условиям на конце $x = 0$, который содержит только две постоянные, определяемые из условий на другом конце $x = l$.

В результате были получены аналитические зависимости для первых двух собственных частот при различных видах креплений (табл. 1).

Полученных зависимостей для определения двух первых собственных частот достаточно для инженерных расчетов. Данную методику можно использовать и при исследовании поперечных колебаний судового брашпиля. Однако, при разработке математической модели следует учитывать особенности его нагружения: изменение параметров за счет наматывания, зацепы буксируемого объекта о неровности дна, переход его из водной среды в воздушную, гидрометеорологические факторы. Для проверки адекватности полученной модели следует руководствоваться данными эксперимента.

Табл. 1. Результаты решения задачи о колебаниях стержня переменного сечения

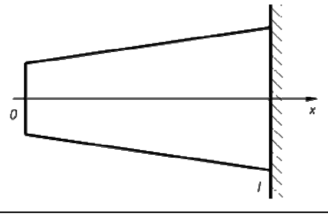
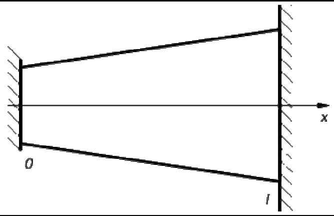
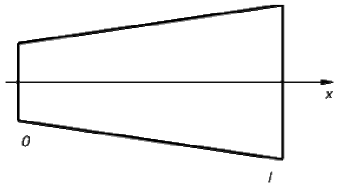
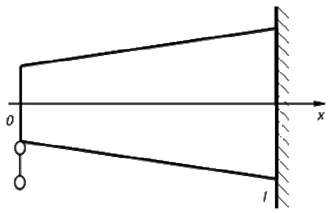
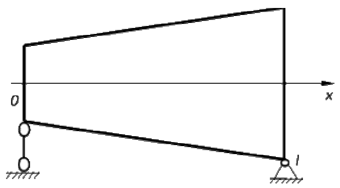
| Вид крепления, начальные условия | Схема крепления | Собственная частота |
|---|---|---|
| жёстко закреплённый концом $x = l$ и свободный на конце $x = 0$<br>$\varphi''\left(z_0\right) = \varphi'''\left(z_0\right) = 0$<br>$\varphi\left(z_l\right) = \varphi'\left(z_l\right) = 0$ |  | $p_1 = \dfrac{\left(1{,}875\right)^2}{4l^2(\sqrt{2}-1)^2}\sqrt{\dfrac{EJ_0}{m_0}}$<br>$p_2 = \dfrac{\left(4{,}694\right)^2}{4l^2(\sqrt{2}-1)^2}\sqrt{\dfrac{EJ_0}{m_0}}$ |

Табл. 1. Продолжение

| Вид крепления, начальные условия | Схема крепления | Собственная частота |
|---|---|---|
| жестко закреплен концами<br>$\varphi(z_0)=\varphi'(z_0)=0$<br>$\varphi(z_l)=\varphi'(z_l)=0$ |  | $p_1=\frac{(4,73)^2}{4l^2(\sqrt{2}-1)^2}\sqrt{\frac{EJ_0}{m_0}}$<br>$p_2=\frac{(7,859)^2}{4l^2(\sqrt{2}-1)^2}\sqrt{\frac{EJ_0}{m_0}}$ |
| свободный на концах<br>$\varphi''(z_0)=\varphi'''(z_0)=0$<br>$\varphi''(z_l)=\varphi'''(z_l)=0$ |  | $p_1=\frac{(4,73)^2}{4l^2(\sqrt{2}-1)^2}\sqrt{\frac{EJ_0}{m_0}}$<br>$p_2=\frac{(7,859)^2}{4l^2(\sqrt{2}-1)^2}\sqrt{\frac{EJ_0}{m_0}}$ |
| жестко закрепленный концом $x=l$ и шарнирно закрепленный концом $x=0$<br>$\varphi''(z_0)=\varphi'''(z_0)=0$<br>$\varphi(z_l)=\varphi''(z_l)=0$ |  | $p_1=\frac{(3,927)^2}{4l^2(\sqrt{2}-1)^2}\sqrt{\frac{EJ_0}{m_0}}$<br>$p_2=\frac{(7,069)^2}{4l^2(\sqrt{2}-1)^2}\sqrt{\frac{EJ_0}{m_0}}$ |
| шарнирно опертый по концам<br>$\varphi(z_0)=\varphi''(z_0)=0$<br>$\varphi(z_l)=\varphi''(z_l)=0$ |  | $p_1=\frac{(3,142)^2}{4l^2(\sqrt{2}-1)^2}\sqrt{\frac{EJ_0}{m_0}}$<br>$p_2=\frac{(6,283)^2}{4l^2(\sqrt{2}-1)^2}\sqrt{\frac{EJ_0}{m_0}}$ |

## Заключение

Предлагаемый метод решения отдельного класса дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами 4-го порядка позволяет получать аналитические зависимости для определения двух первых собственных частот поперечных колебаний различного палубного оборудования, установленного на борту. Такие модели учитывают изменение жесткости, диаметра по длине сечения стержня и погонной массы, изменяющихся по линейному закону, что отличает их существующих моделей. Использование метода позволит повысить качество математических моделей и совместно с результатами экспериментального моделирования применять их при создании адаптивной системы управления нового оборудования. Метод может быть применен при исследовании судовых механических систем, имеющих переменность нагружения, а также в других отраслях машиностроения для подобного рода оборудования.

**Список литературы**


1. Корытов М.С., Щербаков В.С., Танский В.В. Использование уравновешивающего каната для гашения колебаний груза, перемещаемого грузоподъемным краном // Научно-технический вестник Брянского государственного университета. – 2019. – № 1. – С. 50-58. – DOI: 10.22281/2413-9920-2019-05-01-50-58.
2. Полетайкин В.Ф., Колесников П.Г. Математическое моделирование технологических процессов поворотных лесопогрузчиков с переменным вылетом груза // Международные научные исследования. – 2015. – № 4(25). – С. 100-109.
3. Башуров Б.П., Скиба А.Н., Чебанов В.С. Функциональная надежность и контроль технического состояния судовых вспомогательных механизмов: Учебное пособие. – Новороссийск: МГА имени адмирала Ф.Ф. Ушакова, 2009. – 192 с.
4. Фещенко С.Ф., Шкиль Н.И., Николенко Л.Д. Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений. – К.: Наукова думка, 1966. – 252 с.
5. Цыфанский С.Л., Бересневич В.И., Оке А.Б. Нелинейные и параметрические колебания вибрационных машин технологического назначения. – Рига: Зинатне, 1991. – 231 с.

6. Незбайло Т.Г. Теория интегрирования линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. – СПб.: ЧП Генкин А.Д., 2007. – 160 с.
7. Ивановская А.В. Исследование поперечных колебаний элементов буксирной лебедки. // Морской вестник. – 2022. – № 4(84). – С. 58-60.
8. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2023663306 РФ. Программа расчета характеристик движения тела переменной массы под периодическим возмущением / А.В. Ивановская, А.Н. Ивановский. – №2023662029, заявл. 07.06.2023, зарег. 21.06.2023.
9. Ивановская А.В. Принципы моделирования привода судового грузоподъемного оборудования // Вестник Керченского государственного морского технологического университета. – 2023. – № 1. – С. 65-72. – DOI: 10.26296/2619-0605.2023.1.1.005.
10. Бабаков И. М. Теория колебаний: Учебное пособие. – 4-е изд., испр. – М.: Дрофа, 2004. – 591 с.

**References**

1. Korytov M.S., Shcherbakov V.S., Tansky V.V. Using a balancing rope to dampen vibrations of a load moved by a lifting crane // Scientific and technical Bulletin of the Bryansk State University. 2019, no. 1, pp. 50-58. DOI: 10.22281/2413-9920-2019-05-01-50-58.
2. Poletaykin V.F., Kolesnikov P.G. Mathematical modeling of technological processes of rotary loaders with variable cargo departure // International scientific research. 2015, no. 4(25), pp. 100-109.
3. Bashurov B.P., Skiba A.N., Chebanov V.S. Functional reliability and control of the technical condition of ship auxiliary mechanisms: textbook. – Novorossiysk: SSA n.a. Admiral F.F. Ushakov, 2009. – 192 p.
4. Feshchenko S.F., Shkil N.I., Nikolenko L.D. Asymptotic methods in the theory of linear differential equations. – K.: Naukova dumka, 1966. – 252 p.
5. Tsyfansky S.L., Beresnevich V.I., Oke A.B. Nonlinear and parametric oscillations of vibration machines technologically. – Riga: Zinatne, 1991. – 231 p.
6. Nezbaylo T.G. Theory of integration of linear ordinary differential equations. – SPb.: Genkin A.D., 2007. – 160 p.
7. Ivanovskaya A.V. Investigation of transverse vibrations of tow winch elements // Marine Bulletin. 2022, no. 4(84), pp. 58-60.
8. Certificate of state registration of the computer program No. 2023663306 RU. Program for calculating the characteristics of motion of a body of variable mass under periodic perturbation A.V. Ivanovskaya, A.N. Ivanovsky. – No. 2023662029, appl. 07.06.2023, reg. 21.06.2023.
9. Ivanovskaya A.V. Principles of modeling the drive of marine lifting equipment // Bulletin of the Kerch State Marine Technological University. 2023, no. 1, pp. 65-72. DOI: 10.26296/2619-0605.2023.1.1.005.
10. Babakov I.M. Theory of oscillations: textbook. – 4th ed. – M.: Bustard, 2004. – 591 p.

| *Сведения об авторах:* | *Information about authors:* |
|---|---|
| **Ивановская Александра Витальевна –** кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры судовых энергетических установок | **Ivanovskaya Aleksandra Vitalyevna –** candidate of technical sciences, Associate Professor of the Department of marine power plants |
| invkerch@yandex.ru | |

*Получена 01.12.2023*