

ТЕМПЕРАТУРНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ ТОНКОЙ МНОГОСЛОЙНОЙ УПРУГОЙ ПОЛОСЫ

Хоа Ван Донг¹, Зверяев Е.М.^{1,2}

¹Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет);

²Российский университет дружбы народов, Москва

Ключевые слова: плоская задача, слоистый материал, термонапряженное состояние, асимптотический подход, метод Сен-Венана–Пикара–Банаха.

Аннотация. Для тонкой слоистой полосы решение строится аналитически на уравнениях теории упругости. Преобразование (без применения каких-либо гипотез) позволяет получить запись для искомых величин (всех компонент напряженно-деформированного состояния) в виде полиномиальных (по поперечной координате) и асимптотических (по малому параметру тонкостенности) рядов. Рассмотрение процесса наращивания разрешающего соотношения (в виде ряда) как итерационного, применение в качестве начального приближения неизвестных функций (произволов интегрирования), определяемых в ходе решения, обобщают идею полуобратного метода Сен-Венана. Возникновение произволов интегрирования, в свою очередь, связано с интегрированием в процессе преобразования исходной системы (с целью исключения дифференцирования по поперечной координате). Действие интегральных операторов и роль произволов интегрирования здесь отвечает концепции метода последовательных приближений Пикара. Существование и единственность решения в виде асимптотического ряда обуславливается теоремой Банаха о неподвижной точке (принципом сжимающих отображений). Аналитическая форма результирующего соотношения, внутренняя совместность приближенного решения (в смысле баланса величин равного асимптотического порядка) достигаются рассмотрением медленно меняющихся компонент (основного решения) и быстро меняющихся (типа краевого эффекта), взаимными асимптотическими оценками по малому параметру тонкостенности.

TEMPERATURE DEFORMATION OF A THIN MULTILAYER ELASTIC STRIP

Hoa Van Dong¹, Zveryaev E.M.^{1,2}

¹Moscow Aviation Institute (National Research University);

²Peoples' Friendship University of Russia, Moscow

Keywords: planar problem, layered material, thermally stressed state, asymptotic approach, Saint-Venant–Picard–Banach method.

Abstract. For a thin layered strip, the solution is constructed analytically using the equations of elasticity theory. The transformation (without applying any hypotheses) allows us to obtain a record for the desired quantities (all components of the stress-strain state) in the form of polynomial (along the transverse coordinate) and asymptotic (along the small thin-wall parameter) series. Consideration of the process of increasing the resolution relation (in the form of a series) as an iterative one, and the use of unknown functions (arbitrariness of integration) determined during the solution as an initial approximation generalize the idea of the semi-inverse Saint-Venant method. The emergence of arbitrariness of integration, in turn, is associated with integration during the transformation of the original system (in order to eliminate differentiation along the transverse coordinate). The action of integral operators and the role of arbitrariness of integration here corresponds to the concept of Picard's method of successive approximations. The existence and uniqueness of a solution in the form of an asymptotic series is determined by Banach's fixed point theorem (the principle of contraction mappings). The analytical form of the resulting relationships, the internal consistency of the approximate solution (in the sense of a balance of values of equal asymptotic order) are achieved by considering slowly changing components (the main solution) and rapidly changing ones (such as the edge effect), mutual asymptotic estimates for the small thinness parameter.

Введение

Решение задач механики для слоистых тонкостенных конструкций складывается из ряда подходов и методов, учитывающих различные аспекты. Построение условий равновесия (в точке тела) может исходить из пространственных уравнений среды либо упрощенного образа объекта в виде, балки, пластинки, либо оболочки. Для упрощенных моделей свойственно оперировать осредненными силовыми факторами (усилиями и моментами). Необходимость их соотнесения с картиной распределения напряжений связана обычно с введением

специальных гипотез, изначально влияющих на форму решения. Таковы гипотезы прямых нормалей (классической теория) и варианты теории сдвига. Также решение часто ищется в форме рядов (полиномиальных, тригонометрических) или отдельных их членов. Достижимые упрощения позволяют получать аналитические выражения приближенных решений [1] либо соотношения, определяющие их в замкнутой форме, [2] результат которых в ряде случаев может быть получен численно.

Следствием введения гипотез является, вообще говоря, нарушение условий континуума [3]. Поэтому одним из аспектов развития теории является согласование упрощенных постановок пространственным, их вывод из общего случая, выявление отличий, оценка погрешности и определение условий применимости [3].

При решении в пространственной постановке задач для тонкостенных тел предположения, изначально понижающими размерность уравнений обычно являются плоская [4] либо симметричная постановки. Также учет малости геометрического размера толщины дает возможность перехода к рядам по соответствующей координате [5], в частности, к асимптотическим [5]. Аппарат асимптотик дает мощный инструмент упрощения соотношений, их гармонизации на основе сопоставления асимптотических порядков присутствующих величин, вычленения зависимостей, отвечающих поставленным критериям либо допущениям [1, 3, 6].

Особое внимание заслуживает применение вариационного подхода [2], сочетающее рассмотрение условий равновесия на макро и микроуровне и обеспечивающее, как считается, большую строгость при формировании основных соотношений задачи.

Учет анизотропии материала, в частности слоистой его структуры также возможен различными способами. В основном это – сведение к анизотропному телу с осредненными по направлениям характеристикам [7] либо сшивка слоев, каждый из которых представлен упрощенной [8] либо пространственной моделью. Учет микроструктуры материала возможен также с применением вариантов моментных (градиентных) теорий [9, 10].

Подробность учета температурного фактора, также может быть различной. Элементами моделирования здесь могут быть распространение температурного поля [10], его влияния на физические свойства материала. Взаимосвязь между деформациями и напряжениями также может рассматриваться более комплексно.

Детализация постановки как правило влечет за собой потерю аналитичности формы решения и уход в численную реализацию [2]. Численное моделирование рассматривается как эксперимент и основа для построения эмпирических зависимостей [11]. В свою очередь, способом верификации компьютерных вычислений выступает сравнение с аналитическим решением [11].

В настоящей работе рассматривается подход к решению исключительно в аналитической форме. Пространственная модель для прямоугольной полосы берется в постановке теории упругости с учетом влияния установившегося поля температуры.

Материалы и методы исследований

1. Произвольно нагруженная по длинным сторонам полоса при действии поля температуры

Уравнения теории упругости в прямоугольной системе координат Ox^*z^* применительно к слоистой полосе, для которой $0 \leq x^* \leq l$, $-h \leq z^* \leq h$, могут быть записаны в следующем безразмерном виде [1]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= -\varepsilon \frac{\partial \tau}{\partial x}, \quad \frac{\partial \tau}{\partial z} = -\varepsilon \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}, \\ \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_z) - \frac{E\alpha T}{1-\nu}, \quad \tau = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma, \quad \sigma_z = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_z + \nu \varepsilon_x) - \frac{E\alpha T}{1-\nu}, \quad (1.1) \\ \frac{\partial w}{\partial z} &= \varepsilon_z, \quad \varepsilon_x = \varepsilon \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \gamma - \varepsilon \frac{\partial w}{\partial x}. \end{aligned}$$

где x, z – безразмерные продольная и поперечная координаты в долях протяженности l и полутолщины h полосы, соответственно. Неизвестными здесь являются безразмерные напряжения σ_x, σ_z, τ (переход от размерных величин выполнен их отнесением к некоему среднему значению модуля упругости E_h^* слоистого материала). Материал каждого слоя полагается однородным и изотропным; значение модуля упругости (размерной величины) в поперечном сечении задано соотношением $E^* = E(z)E_h^*$, где $E(z)$ – безразмерная ступенчатая функция. Коэффициент Пуассона ν и коэффициент линейного температурного расширения материала α в общем случае – также ступенчатые функции поперечной координаты. Температура T , оказывающая влияние на напряженно-деформированное состояние полосы [12] отсчитывается относительно некоей начальной, при которой вносимые ею деформации и напряжения считаются отсутствующими. Безразмерные перемещения u (продольные – вдоль оси Ox^*) и w (поперечные) связаны с размерными через параметр полутолщины h . Величина отношения между полутолщиной и длиной полосы $\varepsilon = h/l$ считается малой. Деформации $\varepsilon_x, \varepsilon_z, \gamma$ (линейные в продольном и поперечном направлениях и угловая, соответственно) связаны с перемещениями классическими зависимостями [4]. Условия на границах могут быть произвольными и их применение рассмотрено ниже.

Условия **Ошибка! Источник ссылки не найден.**, проинтегрировав по z обе части тех из них, которые содержат дифференцирование по этой координате, можно расположить в последовательности, позволяющей подставлять величины, получаемые из предыдущих соотношений в последующие как известные [1]:

$$w = \int_0^z \varepsilon_z dz + w_0(x), \quad \tau = -\varepsilon \int_0^z \sigma_x' dz + \tau_0(x), \quad u = -\varepsilon \int_0^z w' dz + \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} \tau dz + u_0(x),$$

$$\sigma_z = -\varepsilon \int_0^z \tau' dz + \sigma_{z0}(x), \quad \varepsilon_x = \varepsilon u', \quad \sigma_x = E\varepsilon_x + \nu\sigma_z - E\alpha T, \quad \varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x + \frac{1-\nu^2}{E} \sigma_z + (1+\nu)\alpha T,$$

где произволы интегрирования $u_0, \sigma_{z0}, w_0, \tau_0$ – функции одной только переменной x . Штрихом обозначено взятие производной по этой переменной.

Если рассматривать эту последовательность как итерационную и принять в качестве начального приближения (w_0, τ_0) – неизвестные функции, подлежащие определению в процессе решения, – то получим последовательность приближенных выражений для искомых величин:

$$w_{(0)} = w_0, \quad \tau_{(0)} = \tau_0, \quad u_{(0)} = -\varepsilon w_0' z + \tau_0 \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz + u_0, \quad (1.2)$$

$$\sigma_{z(0)} = -\varepsilon \tau_0' z + \sigma_{z0}, \quad \varepsilon_{x(0)} = -\varepsilon^2 w_0'' z + \varepsilon \tau_0' \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz + \varepsilon u_0', \quad (1.3)$$

$$\sigma_{x(0)} = -E\varepsilon^2 w_0'' z + \varepsilon \tau_0' \left[E \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz - \nu z \right] + E\varepsilon u_0' - E\alpha T + \nu\sigma_{z0}, \quad (1.4)$$

$$\varepsilon_{z(0)} = \nu\varepsilon^2 w_0'' z - \varepsilon \tau_0' \left[\nu \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz + \frac{1-\nu^2}{E} z \right] - \nu\varepsilon u_0' + (1+\nu)\alpha T + \frac{1-\nu^2}{E} \sigma_{z0}, \quad (1.5)$$

$$w_{(1)} = \varepsilon^2 w_0'' \int_0^z \nu z dz - \varepsilon \tau_0' \left[\int_0^z \frac{1-\nu^2}{E} z dz + \int_0^z \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz \right] +$$

$$+ \sigma_{z0} \int_0^z \frac{1-\nu^2}{E} dz - \varepsilon u_0' \int_0^z \nu dz + \int_0^z (1+\nu)\alpha T dz + w_0, \quad (1.6)$$

$$\tau_{(1)} = \varepsilon^3 w_0''' \int_0^z E z dz - \varepsilon^2 \tau_0'' \left[\int_0^z E \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz - \int_0^z \nu z dz \right] - \quad (1.7)$$

$$- \varepsilon^2 u_0'' \int_0^z E dz + \int_0^z \varepsilon E (\alpha T)' dz - \varepsilon \sigma_{z_0}' \int_0^z \nu dz + \tau_0$$

$$\sigma_{z(1)} = -\varepsilon^4 w_0'''' \int_0^z \int_0^z E z dz dz + \varepsilon^3 \tau_0''' \left[\int_0^z \int_0^z E \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz dz - \int_0^z \int_0^z \nu z dz dz \right] \quad (1.8)$$

$$+ \varepsilon^3 u_0''' \int_0^z \int_0^z E dz dz - \varepsilon^2 \int_0^z \int_0^z E (\alpha T)'' dz dz + \varepsilon^2 \sigma_{z_0}'' \int_0^z \int_0^z \nu dz dz - \varepsilon \tau_0' z + \sigma_{z_0}, \dots$$

Здесь цифрой в скобках в индексе обозначен номер итерации. Видно, что после вычисления интегралов переменная z будет входить в выражения своими степенями, образуя полиномы, коэффициентами в которых будут выражения от u_0 , σ_{z_0} , w_0 , τ_0 . Последовательное выполнение преобразований приводят к прибавлению слагаемых, содержащих параметр тонкостенности ε также с возрастающими степенями. Ввиду его малости и произвольности, соотношения приобретают вид асимптотических рядов, погрешность которых может быть оценена $O(\varepsilon^p)$, где p – показатель степени старшего члена отбрасываемой части ряда.

Дальнейшее решения выполняется для функций u_0 , σ_{z_0} , w_0 , τ_0 одной переменной x . Все искомые величины задачи выражаются через эти новые основные неизвестные. Значение поперечной координаты z входит в уравнения как параметр.

2. Выполнение граничных условий на лицевых сторонах. Зададимся условием свободных поверхностей лицевых сторон (при $z^* = \pm h$) полосы:

$$\sigma_z = Z_+(x), \tau = X_+(x) \text{ при } z = 1; \quad \sigma_z = Z_-(x), \tau = X_-(x) \text{ при } z = -1 \quad (2.1)$$

Безразмерные функции распределенной нагрузки на верхней (X_+, Z_+) и нижней (X_-, Z_-) сторонах получены отнесением начальных размерных величин к среднему значению модуля упругости E_h^* .

Выполнение этих условий на выражениях первой итерации (1.7), (1.8) для соответствующих величин приводит к системе уравнений вида:

$$\varepsilon^3 w_0''' \tilde{E}_z^+ - \varepsilon^2 \tau_0'' \frac{1}{2}(2+\nu) - \varepsilon^2 u_0'' \tilde{E}^+ - \nu \varepsilon \sigma_{z_0}' + \tau_0 = X_+ - \varepsilon \int_0^1 E (\alpha T)' dz,$$

$$\varepsilon^3 w_0''' \tilde{E}_z^- - \varepsilon^2 \tau_0'' \frac{1}{2}(2+\nu) + \varepsilon^2 u_0'' \tilde{E}^- + \nu \varepsilon \sigma_{z_0}' + \tau_0 = X_- - \varepsilon \int_0^{-1} E (\alpha T)' dz,$$

$$-\varepsilon^4 w_0'''' \tilde{E}_z^+ + \varepsilon^3 \tau_0''' \frac{1}{6}(2+\nu) + \frac{1}{2} \varepsilon^3 u_0''' \tilde{E}^+ + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \nu \sigma_{z_0}'' - \varepsilon \tau_0' + \sigma_{z_0} = Z_+ + \varepsilon^2 \int_0^1 \int_0^z E (\alpha T)'' dz dz,$$

$$\varepsilon^4 w_0'''' \tilde{E}_z^- - \varepsilon^3 \tau_0''' \frac{1}{6}(2+\nu) + \frac{1}{2} \varepsilon^3 u_0''' \tilde{E}^- + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \nu \sigma_{z_0}'' + \varepsilon \tau_0' + \sigma_{z_0} = Z_- + \varepsilon^2 \int_0^{-1} \int_0^z E (\alpha T)'' dz dz.$$

Здесь обозначено:

$$\tilde{E}_z^+ = \int_0^1 E z dz = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n E_i h_i^2, \quad \tilde{E}^+ = \int_0^1 E dz = \sum_{i=1}^n E_i h_i,$$

$$\tilde{E}_z^- = \int_0^{-1} E z dz = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m E_i h_i^2, \quad \tilde{E}^- = \int_0^{-1} E dz = -\sum_{i=1}^m E_i h_i,$$

$$\tilde{E}_z^+ = \int_0^1 \int_0^z E z dz dz = \sum_{i=1}^n E_i \left[\frac{z_i^3}{6} - \frac{z_{i-1}^3}{6} - \frac{z_{i-1}^2}{2} h_i \right] + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-j} E_i h_{i+1} \left(\frac{z_i^2}{2} - \frac{z_{i-1}^2}{2} \right),$$

$$\begin{aligned}\tilde{E}^+ &= \int_{z_0}^1 \int_{z_0}^z E dz dz = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n E_i h_i^2 + \sum_{j=1}^{n-2} E_j h_j \sum_{i=j+1}^{n-1} h_i + h_n \sum_{i=1}^{n-1} E_i h_i, \\ \tilde{E}_z^- &= \int_0^{-1} \int_0^z E z dz dz = -\sum_{i=1}^m E_i \left[\left(\frac{z_i^3}{6} - \frac{z_{i-1}^3}{6} \right) - \frac{z_{i-1}^2}{2} h_i \right] - \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{i=1}^{m-j} E_i h_{i+1} \left(\frac{z_i^2}{2} - \frac{z_{i-1}^2}{2} \right), \\ \tilde{E}^- &= \int_{z_0}^{-1} \int_{z_0}^z E dz dz = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m E_i h_i^2 + \sum_{j=1}^{m-2} E_j h_j \sum_{i=j+1}^{m-1} h_i + h_n \sum_{i=1}^{m-1} E_i h_i.\end{aligned}$$

Вычисление интегралов для верхней ($z^* = h$) и нижней ($z^* = -h$) сторон полосы ведется от $z^* = 0$ сквозь все слои. Количество верхних слоев – n , нижних – m . Индексы в параметрах физических величин E_i (безразмерное значение функции $E(z)$ для слоя; i – целые числа), h_i (относительная толщина слоя – в долях от полутолщины полосы) указывают на номер слоя, к которым они относятся. Нумерация слоев ведется от внутреннего, независимо для верхней и нижней сторон полосы. Если линия $z^* = 0$ проходит сквозь слой, то он условно разделяется на два слоя. Коэффициент Пуассона положен равным для всех слоев $\nu_i = \nu$ (величины одного порядка). Числа z_i – безразмерные координаты внешних границ слоев.

При вычислении кратных интегралов внутренний интеграл с переменным верхним пределом вычисляется от $z = 0$ до z , лежащей в слое, соответствующем пределу внешнего (определенного) интеграла. Таким образом учитывается информация о характеристиках всех внутренних слоев. Физический смысл получаемых величин – эффективные коэффициенты жесткости (моментные функции).

В отличие от случая изотропной полосы [1], дифференциальные уравнения граничных условий обычным путем не разделяются. Но, вводя также представления о быстро и медленно меняющихся функциях, можно прийти к результирующим соотношениям [1]:

– для медленно меняющихся величин (обозначаемых индексом «s»), у которых при дифференцировании асимптотический порядок, измеряемый степенью малого параметра ε , не изменяется:

$$\begin{aligned}\varepsilon^4 A w_0^{s''''} &= Z_+ - Z_- + \varepsilon (X_+' + X_-') + \varepsilon \frac{1}{\tilde{E}^+ + \tilde{E}^-} (X_+' - X_-') + \\ &+ \frac{1}{2} \varepsilon^2 \frac{E_1 - E_2}{E_1 + E_2} \left[\int_0^1 E(\alpha T)'' dz - \int_0^{-1} E(\alpha T)'' dz \right] + \\ &+ \varepsilon^2 \left[\int_0^1 \int_0^z E(\alpha T)'' dz dz - \int_0^{-1} \int_0^z E(\alpha T)'' dz dz - \int_0^1 E(\alpha T)'' dz - \int_0^{-1} E(\alpha T)'' dz \right],\end{aligned}$$

$$\text{где } A = \left(\tilde{E}_z^+ + \tilde{E}_z^- - \tilde{E}_z^+ - \tilde{E}_z^- \right) + \frac{\tilde{E}_z^+ - \tilde{E}_z^-}{\tilde{E}^+ + \tilde{E}^-} \left(\tilde{E}^+ - \tilde{E}^- - \tilde{E}^+ + \tilde{E}^- \right),$$

$$\varepsilon^3 u_0^{s''''} = \varepsilon^4 w_0^{s''''} \frac{\tilde{E}_z^+ - \tilde{E}_z^-}{\tilde{E}^+ + \tilde{E}^-} - \varepsilon \frac{1}{\tilde{E}^+ + \tilde{E}^-} (X_+' - X_-') + \varepsilon \left[\int_0^1 E(\alpha T)' dz - \int_0^{-1} E(\alpha T)' dz \right],$$

$$2\sigma_{z_0}^s = Z_+ + Z_- + \varepsilon^4 w_0^{s''''} \left(\tilde{E}_z^+ - \tilde{E}_z^- \right) - \varepsilon^3 u_0^{s''''} \left(\tilde{E}^+ + \tilde{E}^- \right) + \varepsilon^2 \left[\int_0^1 \int_0^z E(\alpha T)'' dz dz + \int_0^{-1} \int_0^z E(\alpha T)'' dz dz \right],$$

$$2\tau_0^s = X_+ + X_- - \varepsilon^3 w_0^{s''''} \left(\tilde{E}_z^+ + \tilde{E}_z^- \right) + \varepsilon^2 u_0^{s''} \left(\tilde{E}^+ - \tilde{E}^- \right) - \varepsilon \left[\int_0^1 E(\alpha T)' dz + \int_0^{-1} E(\alpha T)' dz \right],$$

– для быстро меняющихся (отмеченных индексом «q»), применительно к которым $\partial/\partial x \sim \varepsilon^{-1}$:

$$(2 + \nu) \varepsilon^3 \tau_0^{q''} - 6\varepsilon \tau_0^{q'} = 0.$$

Полученные уравнения являются сбалансированными в плане сохранения в них величин, обладающих сопоставимым асимптотическим порядком. Медленно меняющееся решение соответствует внутренней области в отсутствие сингулярностей. Быстро меняющееся – имеет характер краевого эффекта [12].

Также оказываются верны следующие асимптотические оценки:

$$\sigma_{z_0}^s : \varepsilon^4 w_0^s, \quad \sigma_{z_0}^s : \varepsilon^3 u_0^s, \quad \tau_0^s \sim \varepsilon^3 w_0^{s'''}. \quad (2.2)$$

Если на полосу воздействует только поле температуры, тогда решением будет:

$$\begin{aligned} \varepsilon^4 A w_0^{s''''} &= \frac{1}{2} \varepsilon^2 \frac{E_1 - E_2}{E_1 + E_2} \left[\int_0^1 E(\alpha T)'' dz - \int_0^{-1} E(\alpha T)'' dz \right] + \\ &+ \varepsilon^2 \left[\int_0^1 \int_0^z E(\alpha T)'' dz dz - \int_0^{-1} \int_0^z E(\alpha T)'' dz dz - \int_0^1 E(\alpha T)'' dz - \int_0^{-1} E(\alpha T)'' dz \right], \\ \varepsilon^3 u_0^{s''''} &= \varepsilon^4 w_0^{s''''} \frac{\tilde{E}_z^+ - \tilde{E}_z^-}{\tilde{E}^+ + \tilde{E}^-} + \varepsilon \left[\int_0^1 E(\alpha T)' dz - \int_0^{-1} E(\alpha T)' dz \right], \\ 2\sigma_{z_0}^s &= \varepsilon^4 w_0^{s''''} (\tilde{E}_z^+ - \tilde{E}_z^-) - \varepsilon^3 u_0^{s''''} (\tilde{E}^+ + \tilde{E}^-) + \varepsilon^2 \left[\int_0^1 \int_0^z E(\alpha T)'' dz dz + \int_0^{-1} \int_0^z E(\alpha T)'' dz dz \right], \\ 2\tau_0^s &= -\varepsilon^3 w_0^{s''''} (\tilde{E}_z^+ + \tilde{E}_z^-) + \varepsilon^2 u_0^{s''''} (\tilde{E}^+ - \tilde{E}^-) - \varepsilon \left[\int_0^1 E(\alpha T)' dz + \int_0^{-1} E(\alpha T)' dz \right] \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\tau_0^q = \begin{cases} C_{\tau 1} e^{-\frac{k}{\varepsilon} x} & \text{при } x \geq 0 \\ C_{\tau 2} e^{-\frac{k(1-x)}{\varepsilon}} & \text{при } x \leq 1 \end{cases}, \quad k^2 = \frac{6}{2 + \nu}, \quad (2.4)$$

где величины вида $C_{wi}, C_{ui}, C_{\tau i}$ – константы интегрирования, которые находятся при удовлетворении граничных условий на торцах полосы.

В случае линейного изменения температуры по толщине, имеем:

$$\begin{aligned} w_0^s(x) &= \varepsilon^{-2} C_{w1} x^2 + C_{w3} x^3 + C_{w2} x^2 + C_{w1} x + C_{w0}, \\ u_0^s(x) &= \varepsilon^{-1} C_{u1} x + \varepsilon^{-2} C_{u2} x^2 + C_{u2} x^2 + C_{u1} x + C_{u0}, \\ \sigma_{z_0}^s &= 0, \quad \tau_0^s = -3\varepsilon^3 C_{w3} (\tilde{E}_z^+ + \tilde{E}_z^-) + (\varepsilon^2 C_{u2} + C_{u2}) (\tilde{E}^+ - \tilde{E}^-), \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\text{где } C_{w1} = \frac{1}{2A} \left[\int_0^1 \int_0^z E \alpha T dz dz - \int_0^{-1} \int_0^z E \alpha T dz dz - \frac{E_1 + 3E_2}{2(E_1 + E_2)} \int_0^1 E \alpha T dz - \frac{3E_1 + E_2}{2(E_1 + E_2)} \int_0^{-1} E \alpha T dz \right],$$

$$C_{u1} = \frac{1}{A} \frac{\tilde{E}_z^+ - \tilde{E}_z^-}{\tilde{E}^+ + \tilde{E}^-} \left[\int_0^1 \int_0^z E \alpha T dz dz - \int_0^{-1} \int_0^z E \alpha T dz dz - \frac{E_1 + 3E_2}{2(E_1 + E_2)} \int_0^1 E \alpha T dz - \frac{3E_1 + E_2}{2(E_1 + E_2)} \int_0^{-1} E \alpha T dz \right],$$

$$C_{u2} = \frac{1}{2} \left(\int_0^1 E \alpha T dz - \int_0^{-1} E \alpha T dz \right).$$

3. Выполнение условий на торцах полосы. Пример. Консольно закрепленная полоса с четырьмя симметрично расположенными слоями испытывает воздействие поля температуры так, что

$$\alpha T(z) = \begin{cases} \alpha_1 t_1 z_1 + \alpha_2 t_2 (z - z_1), & \text{при } z \geq z_1 \\ \alpha_0 t_0 z_0 + \alpha_1 t_1 (z - z_0), & \text{при } z_1 \geq z \geq -z_1 \\ -\alpha_1 t_1 z_1 + \alpha_2 t_2 (z + z_1), & \text{при } z \leq -z_1 \end{cases} \quad (3.1)$$

Здесь α_1, α_2 – коэффициенты линейного температурного расширения внутреннего и внешнего слоев; t_0, t_1, t_2 – значения температуры, соответствующие координатам $z = 0, z = z_1$

и $z=1$ (постоянные величины); z_1 – полутолщина среднего однородного слоя (разделен условно на два слоя линией $z=0$).

Будем считать, что граничные условия

$$u=0, w=0 \text{ при } x=0; \quad \sigma_x=0, \tau=0 \text{ при } x=1$$

с достаточной точностью выполняются на соотношениях (1.2), (1.6), (1.4) и (1.7), соответственно.

В частности, для левого края ($x=0$; жесткое защемление), это приводит к выражениям:

– для верхнего внутреннего слоя

$$\begin{aligned} & \left[-\varepsilon w_0' + 2(1+\nu) \frac{\tau_0}{E_1} \right] (z-z_0) + u_0 = 0, \\ & \left[\nu \varepsilon^2 w_0'' - \varepsilon \tau_0' \frac{(1+\nu)^2}{E_1} \right] \left(\frac{z^2}{2} - \frac{z_0^2}{2} \right) + \left[(1-\nu^2) \sigma_{z_0} \frac{1}{E_1} - \nu \varepsilon u_0' \right] (z-z_0) + \\ & + (1+\nu) \left[(\alpha_0 t_0 - \alpha_1 t_1) z_0 (z-z_0) + \alpha_1 t_1 \left(\frac{z^2}{2} - \frac{z_0^2}{2} \right) \right] + w_0 = 0, \end{aligned}$$

– для верхнего наружного слоя

$$\begin{aligned} & -\varepsilon w_0' \left[(z_1 - z_0) + (z - z_1) \right] + 2(1+\nu) \tau_0 \left[\frac{1}{E_1^+} (z_1 - z_0) + \frac{1}{E_2^+} (z - z_1) \right] + u_0 = 0, \\ & \nu \varepsilon^2 w_0'' \left[\left(\frac{z_1^2}{2} - \frac{z_0^2}{2} \right) + \left(\frac{z^2}{2} - \frac{z_1^2}{2} \right) \right] - \varepsilon \tau_0' \left\{ (1+\nu)^2 \left[\frac{1}{E_1^+} \left(\frac{z_1^2}{2} - \frac{z_0^2}{2} \right) + \frac{1}{E_2^+} \left(\frac{z^2}{2} - \frac{z_1^2}{2} \right) \right] \right\} + \\ & + \left[(1-\nu^2) \sigma_{z_0} - \nu \varepsilon u_0' \right] \left[\frac{1}{E_1^+} (z_1 - z_0) + \frac{1}{E_2^+} (z - z_1) \right] + \\ & + (1+\nu) \left[\alpha_1 t_1 \left(\frac{z_1^2}{2} - \frac{z_0^2}{2} \right) + (\alpha_1 t_1 - \alpha_2 t_2) z_1 (z - z_1) + \alpha_2 t_2 \left(\frac{z^2}{2} - \frac{z_1^2}{2} \right) \right] + w_0 = 0. \end{aligned}$$

Если на границе $z=z_1$ из выражений для наружного слоя вычесть аналогичные выражения для внутреннего, полученные зависимости по форме будут в точности совпадать с выражениями для внутреннего слоя. Можно показать, что форма соотношений сохраняется при произвольном количестве слоев, и они являются однотипными дополнительными требованиями при выполнении условий для каждого последующего слоя. Их сложность не наращивается. Ход рассуждений для слоев нижней стороны полосы – аналогичен.

Форма подобных однотипных выражений для условия свободного края (здесь – при $x=1$) для внутреннего верхнего слоя следующая:

$$\begin{aligned} & \left[-E_1 \varepsilon^2 w_0'' + \varepsilon \tau_0' (2+\nu) \right] z - E_1 \left[\alpha_0 t_0 z_0 + \alpha_1 t_1 (z - z_0) \right] + E_1 \varepsilon u_0' + \nu \sigma_{z_0} = 0, \\ & \left[\varepsilon^3 w_0''' E_1 - \varepsilon^2 \tau_0'' (2+\nu) \right] \left(\frac{z^2}{2} - \frac{z_0^2}{2} \right) - \left(\varepsilon^2 u_0'' E_1 + \nu \varepsilon \sigma_{z_0}' \right) (z - z_0) + \tau_0 = 0. \end{aligned}$$

Равенство нулю выражений в целом позволяет полагать обращающимися в ноль их части, присутствующие в виде множителей при различных степенях z . Тогда в заделке при $z > 0$ имеем восемь условий:

$$\begin{aligned} & u_0 = 0, \quad w_0 = 0, \\ & -\varepsilon w_0' + \frac{2(1+\nu)}{E_i^+} (\tau_0^s + \tau_0^q) = 0, \quad i=1, 2, \\ & \sigma_{z_0} \frac{1-\nu^2}{E_i^+} - \nu \varepsilon u_0' = 0, \quad i=1, 2, \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\nu \varepsilon^2 w_0'' - \varepsilon \left(\tau_0^{s'} + \tau_0^{q'} \right) \frac{(1+\nu)^2}{E_i^+} + (1+\nu) \alpha_i t_i = 0, \quad i=1,2. \quad (3.3)$$

Здесь учтено, что $\tau_0 = \tau_0^s + \tau_0^q$. Также на свободном краю:

$$-E_i \varepsilon^2 w_0'' + \varepsilon \tau_0^{q'} (2+\nu) - E_i \alpha_i t_i = 0, \quad i=1,2, \quad (3.4)$$

$$E_i \varepsilon u_0' + \nu \sigma_{z_0} = 0, \quad i=1,2,$$

$$\tau_0^s + \tau_0^q = 0,$$

$$\varepsilon^2 u_0'' E_i + \varepsilon \nu \sigma_{z_0}' = 0,$$

$$\varepsilon^3 w_0''' E_i - \varepsilon^2 \tau_0^{q''} (2+\nu) = 0. \quad (3.5)$$

Отбрасывая составляющие, оцениваемые асимптотически как относительно малые: $\tau_0^s \sim \varepsilon^3 w_0$ (в силу (2.3)) в уравнениях (3.2), (3.3) и $\sigma_{z_0}^s: \varepsilon^3 u_0^s$ (в соответствии с (2.2)) в соотношениях (3.4), (3.5), и подставляя в получаемые выражения известные формы решений основных неизвестных (2.5), (2.4), после вычислений находим:

$$w_0^s(x) = -\varepsilon^{-2} \alpha_1 t_1 \frac{x^2}{2}, \quad u_0^s = 0, \quad \tau_0^s = 0, \quad \sigma_{z_0}^s = 0, \quad \tau_0^q = -\varepsilon^{-1} \frac{\alpha_1 t_1 E_1^+}{k(1+\nu)^2} e^{-\frac{k}{\varepsilon} x}. \quad (3.6)$$

Результаты

После нахождения основных неизвестных, функции напряженно-деформированного состояния для заданного приближения итерационного процесса (1.2)-(1.8) вычисляются путем подстановки в них u_0 , σ_{z_0} , w_0 , τ_0 согласно (3.6), в частности:

$$u_{(0)} = -\varepsilon w_0' z + \tau_0 \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz, \quad (4.1)$$

$$\varepsilon_{x(0)} = -\varepsilon^2 w_0'' z + \varepsilon \tau_0' \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz, \quad (4.2)$$

$$\sigma_{z(0)} = -\varepsilon \tau_0' z, \quad (4.3)$$

$$\sigma_{x(0)} = -E \varepsilon^2 w_0'' z + \varepsilon \tau_0' \left[E \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz - \nu z \right] - E \alpha T, \quad (4.4)$$

$$\varepsilon_{z(0)} = \nu \varepsilon^2 w_0'' z - \varepsilon \tau_0' \left[\nu \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz + \frac{1-\nu^2}{E} z \right] + (1+\nu) \alpha T, \quad (4.5)$$

$$w_{(1)} = \varepsilon^2 w_0'' \int_0^z \nu z dz - \varepsilon \tau_0' (1+\nu)^2 \int_0^z \frac{z}{E} dz + \int_0^z (1+\nu) \alpha T dz + w_0, \quad (4.6)$$

$$\tau(x, z) = -\varepsilon^2 \tau_0'' (2+\nu) \frac{z^2}{2} + \tau_0, \quad (4.7)$$

$$\sigma_z(x, z) = \varepsilon^3 \tau_0''' (2+\nu) \frac{z^3}{6} - \varepsilon \tau_0' z. \quad (4.8)$$

Равенства выполняются здесь приближенно.

Графики, иллюстрирующие полученные результаты, приведены на рисунках 1-6. Модель, для которой проведен расчет – трехслойная полоса длиной $l=1\text{ м}$. Материал внешних слоев – сплав меди ($E_2^* = 1,1 \cdot 10^{11} \text{ Па}$, $\alpha_2 = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ C}^{-1}$, толщина одного слоя – $h_2 = 0,025 \text{ м}$); внутренний слой – сталь ($E_1^* = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Па}$, $\alpha_1 = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ C}^{-1}$, толщина слоя – $h_1 = 0,025 \text{ м}$); среднее значение модуля упругости принято $E_h^* = 1,6 \cdot 10^{11} \text{ Па}$; с учетом этого

безразмерные величины $E_1 = 1,3125, E_2 = 0,6875$; коэффициент Пуассона в расчете $\nu = \nu_1 = \nu_2 = 0,3$. Поле температуры зависит только от поперечной координаты – как показано на рисунке 1 (начальная температура, при которой деформации отсутствуют, соответствует точке $z = 0$ на графике).

Зависимость поперечных перемещений w от продольной координаты в горизонтальных сечениях имеет вид, представленный на рисунке 2 (левый край трехслойной полосы заземлен, правый свободен). Расчет проведен по формуле (4.6). Краевой эффект заметно не проявляется ввиду преобладания основного решения над вкладом быстроизменяющейся компоненты τ_0^q (как это следует из (2.2)).

На графиках $\tau(x)$ при различных значениях координаты z (рис. 3), полученных по формуле (4.7), протяженность краевой зоны в области заделки, где влияние быстроизменяющейся составляющей хорошо заметно, составляет примерно $2h$, где h – полутолщина трехслойной полосы. Графики зависимости нормальных напряжений от поперечной координаты, построенные при $z = 0$, качественно также отличаются от полученных в сечениях при удалении от края (рис. 4, 5). Для расчета использованы зависимости (4.4) и (4.8), соответственно.

Здесь граничные условия на лицевых сторонах (2.1) для напряжений σ_z выполнены точно; по τ они удовлетворяются асимптотически (при удалении от угловой точки, являющейся особой).

Различие физических свойств материала слоев влияет не только на угол наклона графиков продольных напряжений (рис. 5) (являющихся в классической теории для изотропного материала линейными), но и вносит конечные разрывы. Как следует из (4.5), подобные разрывы присутствуют и в функции ε_z (рис. 6).

Максимумы поперечных нормальных напряжений (не учитываемых в классической теории), которые видны на рисунке 4, экстремумы нормальных и касательных напряжений в краевой зоне и на границах слоев (по σ_x), способны оказать разрушающее воздействие на структуру композиционного материала.

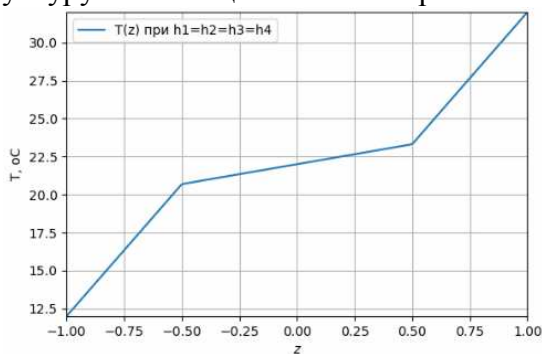


Рис. 1. Распределение температуры ($^{\circ}\text{C}$) по безразмерной толщине полосы

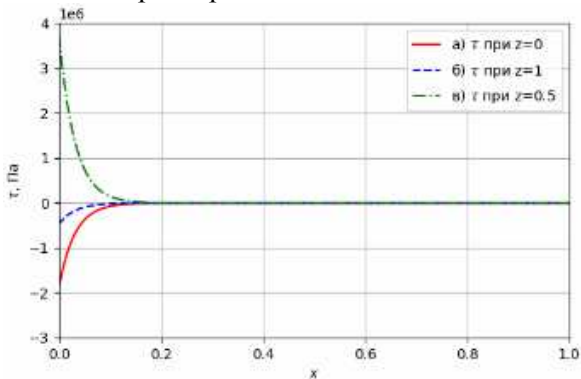


Рис. 3. Касательные напряжения [Па] в зависимости в продольных сечениях

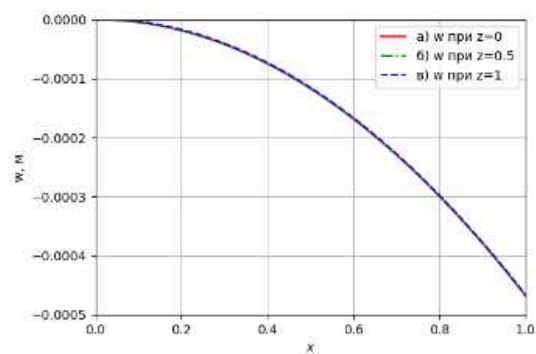


Рис. 2. Поперечные перемещения [м] в продольных сечениях полосы

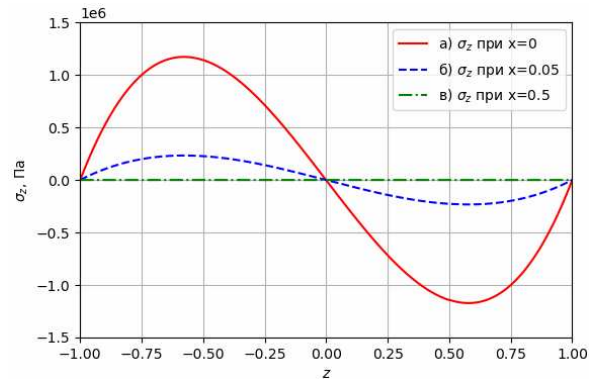


Рис. 4. Нормальные продольные напряжения [Па] в поперечных сечениях

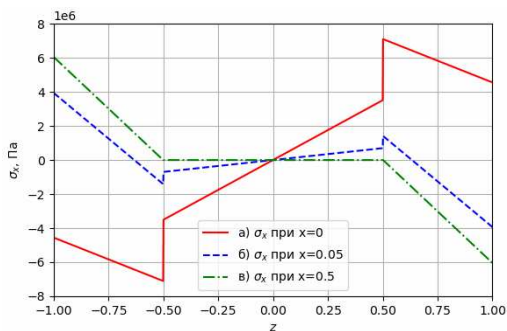


Рис. 5. Нормальные продольные напряжения [Па] в поперечных сечениях

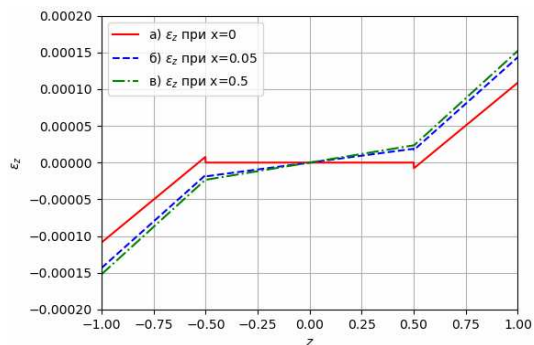


Рис. 6. Продольные деформации в поперечных сечениях

Заключение

Для построения решения применен метод, названный методом Сен-Венана–Пикара–Банаха [1]. Это позволило получить в замкнутой форме разрешающие соотношения для задачи о термонапряженном состоянии многослойной полосы в пространственной постановке. Учитываются медленно и быстро меняющиеся составляющие решения, что соответствует основному решению классической теории и краевому эффекту. При выполнении граничных условий на внешних лицевых сторонах полосы получена форма (в виде простых интегралов) эффективных коэффициентов жесткости, включающих физические свойства всех слоев. Поскольку все компоненты напряженно-деформированного состояния определяются через общий набор новых неизвестных функций, единый для всех слоев, условие сшивки слоев выполняется автоматически. Также, благодаря такому подходу, система дифференциальных уравнений в частных производных исходной задачи заменяется решением обыкновенных дифференциальных уравнений. Выведены типовые выражения для послойного локального выполнения условий на торцах полосы. Также на частном примере показан вывод аналитических выражений для всех компонент напряженно-деформированного состояния, завершающийся построением по ним графиков с локализацией мест, опасных для композитной конструкции. Дополнительным результатом являются асимптотические оценки компонент решения.

Метод может быть применен для верификации результатов численных решений соответствующих задач, а также при изучении и прогнозировании локальных свойств слоистых композиционных материалов.

Список литературы

1. Зверьев Е.М. Метод Сен-Венана–Пикара–Банаха интегрирования уравнений теории упругости тонкостенных систем // Прикладная математика и механика. – 2019. – Т. 83, №5-6. – С. 823-833. – DOI: 10.1134/S0032823519050126.
2. Фирсанов В. Об уточнении классической теории прямоугольных пластинок из композиционных материалов // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2002. – Т. 8, – № 1. – С. 28-64.
3. Васильев В.В. О теории тонких пластин // Известия РАН. Механика твердого тела. – 1992. – № 3. – С. 26-47.
4. Ляв А. Математическая теория упругости. – М.-Л.: ОНТИ, 1935. – 674 с.
5. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек (2-е изд.). – М.: Наука, 1976. – 512 с.
6. Гольденвейзер А.Л. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости // Прикладная математика и механика. – 1962. – Т. 26, № 4. – С. 668-686.
7. Васильев В.В. Механика конструкций из композиционных материалов. – М.: Машиностроение, 1988. – 272 с.
8. Цыбин Н.Ю. Разрешающие уравнения многослойной пластины с применением трехмерной модели контактного слоя // Развитие фундаментальных основ науки и образования в строительстве: Сборник тезисов XIV Международной научно-практической конференции. – М.: НИУ МГСУ, 2017. – С. 89-91.
9. Toupin R.A. Theories of elasticity with couple-stress // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1964, vol. 17, no. 2, pp. 85-112.
10. Лурье С.А., Дудченко А.А., Нгуен Д.К. Градиентная модель термоупругости для слоистой композитной структуры // Труды МАИ. – 2014. – № 75. – С. 1-16.

11. Bulut O. The thermal stress analysis around the cavities in composite plates used for the body of reactors // Journal of the faculty of engineering and architecture of gazi university. 2019, vol. 34, no. 2, pp. 1078-1086.
12. Зверьяев Е. М. Метод Сен-Венана–Пикара–Банаха интегрирования уравнений в частных производных с малым параметром // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. – 2018. – № 83. – 19 с. – DOI: 10.20948/prepr-2018-83.

References

1. Zveryaev E.M. Saint-Venant–Picard–Banach method of integration of equations of the theory of elasticity of thin-walled systems. Applied mathematics and mechanics. 2019, vol. 83, no. 5-6, pp. 823-833. DOI: 10.1134/S0032823519050126.
2. Firsanov V. On the refinement of the classical theory of rectangular plates made of composite materials // Mechanics of composite materials and structures. 2002, vol. 8, no. 1, pp. 28-64.
3. Vasiliev V.V. On the theory of thin plates // Journal of Russian Academy of Sciences. Mechanics of Solids. 1992, no. 3, pp. 26-47.
4. Love A.E. A treatise on the mathematical theory of elasticity. – Cambridge: Cambridge University Press, 1935. – 674 p.
5. Goldenweiser A.L. Theory of elastic thin shells (2nd edition). – М.: Science, 1976. – 512 p.
6. Goldenweiser A.L. Construction of an approximate theory of plate bending by the method of asymptotic integration of the equations of elasticity theory // Applied Mathematics and Mechanics. 1962, vol. 26, no. 4, pp. 668-686.
7. Vasiliev V.V. Mechanics of structures made of composite materials. – М.: Mechanical Engineering, 1988. – 272 p.
8. Tsybin N.Yu. Resolving equations of a multilayer plate using a three-dimensional model of the contact layer // Development of the fundamental principles of science and education in construction: Collection of abstracts of the XIV International Scientific and Practical Conference. – М.: NRU MSU of Civil Engineering, 2017. – P. 89-91.
9. Toupin R.A. Theories of elasticity with couple-stress // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1964, vol. 17, no. 2, pp. 85-112.
10. Lurie S.A., Dudchenko A.A., Nguyen D.K. Gradient model of thermoelasticity for a layered composite structure // Proceedings of MAI. 2014, no. 75, pp. 1-16.
11. Bulut O. The thermal stress analysis around the cavities in composite plates used for the body of reactors // Journal of the faculty of engineering and architecture of gazi university. 2019, vol. 34, no. 2, pp. 1078-1086.
12. Zveryaev E.M. Saint-Venant–Picard–Banach method of integrating partial differential equations with a small parameter // Preprints of the IPM n.a. M.V. Keldysh. 2018, no. 83, 19 p. DOI: 10.20948/prepr-2018-83.

Сведения об авторах:

Information about authors:

Хоа Ван Донг – аспирант	Hoa Van Dong – postgraduate student
Зверьяев Евгений Михайлович – доктор технических наук, профессор, профессор департамента строительства РУДН; профессор кафедры «Проектирование сложных технических систем» МАИ	Zveryaev Evgeny Mikhailovich – doctor of technical sciences, professor, professor of the Department of construction of RUDN; professor of the Department of design of complex mechanical systems of MAI
makarov_sibsiu@mail.ru	

Получена 30.11.2023