Паршин Д.А. Методика расчета остаточных напряжений в полученном методом центробежного нанесения защитном покрытии на внутренней поверхности прямолинейного участка трубопровода, основанная на неклассической модели механики деформируемого твердого тела // Транспортное, горное и строительное машиностроение: наука и производство. – 2023. – № 23. – С. 45-49.

УДК 539.3 https://doi.org/10.26160/2658-3305-2023-23-45-49

МЕТОДИКА РАСЧЕТА ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ПОЛУЧЕННОМ МЕТОДОМ ЦЕНТРОБЕЖНОГО НАНЕСЕНИЯ ЗАЩИТНОМ ПОКРЫТИИ НА ВНУТРЕННЕЙ ПОВЕРХНОСТИ ПРЯМОЛИНЕЙНОГО УЧАСТКА ТРУБОПРОВОДА, ОСНОВАННАЯ НА НЕКЛАССИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Паршин Д.А.

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук, Москва

Ключевые слова: защита трубопровода, центробежное нанесение покрытия, материал с изменяющимися свойствами, запаздывающая деформация, неклассическая модель механики, остаточные напряжения.

Аннотация. Исследуется проблема определения технологических напряжений в защитном покрытии произвольной толщины, нанесенном центробежным методом изнутри на стенку кругового цилиндрического участка трубопровода, при использовании для покрытия материала с запаздывающим деформационным откликом и изменяющимися с возрастом механическими свойствами. Процесс квазистатического развития напряженного состояния покрытия во время его нанесения моделируется на основе неклассических концепций механики деформируемого твердого тела, связанных с непрерывным послойным ростом последнего. Разработанная математическая модель кладется в основу постановки задачи о нахождении остаточных полей технологических напряжений в готовом покрытии. Построенное в работе решение этой задачи предлагает эффективную методику их расчета при помощи замкнутых аналитических зависимостей, содержащих квадратуры, в приближении малой плоской деформации.

METHOD FOR CALCULATING RESIDUAL STRESSES IN A PROTECTIVE COATING OBTAINED BY CENTRIFUGAL APPLICATION ON THE INNER SURFACE OF A PIPELINE RECTILINEAR SECTION, BASED ON A NON-CLASSICAL MODEL OF DEFORMABLE SOLID MECHANICS

Parshin D.A.

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow

Keywords: pipeline protection, centrifugal coating, material with changing properties, delayed deformation, non-classical model of mechanics, residual stresses.

Abstract. The problem on determining technological stresses in a protective coating of arbitrary thickness applied by centrifugal method from the inside to the wall of a circular cylindrical pipeline section, when using for the coating a material with a delayed deformation response and mechanical properties changing with age, is investigated. The process of quasi-static stress state development in the coating during its application is modeled on the basis of non-classical concepts of deformable solid mechanics which are associated with continuous layerwise growth of the latter. The devised mathematical model is the basis for the formulation of the particular problem on finding residual fields of technological stresses in the finished coating. The solution of this problem constructed in this work offers an effective method for calculating these fields in the approximation of small plane strain using closed analytical dependencies containing quadratures.

Введение. Сегодня много исследований посвящено аддитивным (в широком понимании этого термина) технологическим процессам, однако только малая их часть (см., к примеру, [1]) уделяет внимание анализу таких процессов с точки зрения механики сплошных сред, несмотря на его очевидную актуальность. Он требуется для прогнозирования напряженно-деформированного состояния и свойств разнообразных конструктивных элементов, созданных с использованием аддитивных технологий – в интересах предсказания возможного разрушения и износа этих элементов при тех или иных эксплуатационных нагрузках [2-5].

Настоящее исследование посвящено рассмотрению процесса аддитивного изготовления некоторого изделия как процесса послойного формирования деформируемого твердого тела соответствующей геометрической формы, обладающего определенными механическими свойствами. Традиционно в механике деформируемого твердого тела изучается поведение таких тел, которые уже полностью сформированы к моменту, когда начинается их деформирование. Соответствующая – «готовая» – конфигурация тела является натуральной в смысле отсутствия в ней напряженного состояния, поэтому именно по отношению к ней вычисляются перемещения точек тела в процессе его дальнейшего деформирования. Однако всякое аддитивно изготовленное тело, если оно начало деформироваться уже во время изготовления, не обладает, очевидно, такой конфигурацией: новые частицы материала пополняют такое тело, когда прежние его частицы уже совершили некоторое перемещение в пространстве вследствие деформации уже сложившейся части тела. Как следствие этого, мы наблюдаем остаточные напряжения в телах такого сорта, действующие сколь угодно долго после их изготовления, когда никакие механические воздействия на тело, имевшие место при его изготовления, больше не реализуются.

Цель работы. Рассматривается процесс аддитивного изготовления слоя покрытия произвольной толщины путем нанесения материала изнутри на вращающийся достаточно длинный участок цилиндрической осесимметричной трубы. Используемый для формирования покрытия материал обладает изменяющимися со временем механическими свойствами, а его полная деформация складывается из мгновенной упругой части и части, развивающейся во времени. Мы исходим из определяющих уравнений материала, разработанных в [6]. Целью нашего исследования является изучение того, каким образом происходит образование итоговых полей остаточных технологических напряжений в изготавливаемом покрытии. Под остаточными мы понимаем те напряжения, которые будут сохраняться в готовом покрытии после прекращения действия на него инерционных сил, вызываемых вращением. Основываясь на математической модели, разработанной в [7], мы можем сформулировать задачу по определению этих полей в рамках принятых в этой модели предположений.

Эволюция напряженного состояния в изготавливаемом покрытии. Мы считаем, что все последовательно включаемые в покрытие дополнительные элементарные материальные слои имеют относительно малую толщину, и поэтому используем в работе принципы механики деформируемых твердых тел, подверженных непрерывному послойному росту. Эти представления были развиты в трудах соответствующей российской научной школы (см., например, [7-13]). При этом речь в нашей работе идет о моделировании квазистатического процесса деформирования аддитивно изготавливаемого покрытия в приближении его малой деформации в плоском деформированном состоянии. Соответствующая модель приводит нас к следующей неклассической краевой задаче [7]:

$$
\begin{gathered}
\operatorname{div}\boldsymbol{\varsigma} + \mathbf{n}\, f(\rho,t) = 0 \quad \text{при} \quad r(t) < \rho < r_0, \quad t > t_{\text{start}}; \\
\boldsymbol{\varsigma} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\mathbf{1}\mathbf{1}\cdot\cdot\,\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}{m-2}, \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\operatorname{grad}\mathbf{v}^{\text{transp}} + \operatorname{grad}\mathbf{v}}{2}; \qquad (1) \\
\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\varsigma} = \mathbf{n}\, g(t) \quad \text{при} \quad \rho = r(t); \qquad \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \text{при} \quad \rho = r_0.
\end{gathered}
$$

Эта задача сформулирована для пространственных полей следующих механических характеристик формируемого деформируемого твердого тела, изменяющихся с течением времени t во всех его точках, положения которых мы задаем в полярной системе координат (ρ,φ): $\mathbf{v}$ – вектор скорости перемещения, $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ – тензор скоростей деформации, $\boldsymbol{\varsigma}$ – тензор скоростей операторных напряжений. Величины $\mathbf{1}$ и m обозначают соответственно тензорную единицу второго ранга и число Пуассона. Произвольно задаваемая монотонная функция времени $r(t)$ описывает уменьшение внутреннего радиуса тела вследствие добавления к нему нового материала, $r_0 = r(t_{\text{start}})$, где t_{start} – стартовый момент процесса изготовления. Единичный вектор $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\varphi)$ задает внешнюю нормаль к внутренней цилиндрической поверхности изготавливаемого тела. Функции $f(\rho,t)$ и $g(t)$ являются известными. Они полностью определяются заданной величиной D плотности массы используемого материала, заданной функцией $\psi(t)$, описывающей произвольное варьирование скорости вращения подложки в рассматриваемом процессе изготовления на ней покрытия, заданной функцией $r(t)$, функцией

$\sigma_0(\rho)$, задающей зависимость напряжения окружного преднатяжения очередного присоединяемого бесконечно тонкого материального слоя от его радиуса ρ, а также следующими функциями, описывающими механические свойства используемого материала: $\mu(t)$ – модулем упруго-мгновенной деформации второго рода, который меняется с течением времени, то есть с возрастом материала, вне зависимости от действующих в нем напряжений; $\chi(s,t)$ – мерой ползучести, характеризующей запаздывающий деформационный отклик материала на возникающие в нем напряжения, особенности развития которого во времени не зависят от этих напряжений и различны в различном возрасте материала. Тензор ς определяется следующим образом:

$$\varsigma(\rho,\varphi,t) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\frac{\boldsymbol{\sigma}(\rho,\varphi,t)}{\mu(t)} - \int_{t_0(\rho)}^{t} \boldsymbol{\sigma}(\rho,\varphi,s)\,\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{\mu(s)} + \chi(s,t)\right)ds\right]. \qquad (2)$$

Здесь $\boldsymbol{\sigma}$ – тензор напряжений, а функция $t_0(\rho)$ является обратной к $r(t)$ и описывает, тем самым, распределение в теле моментов времени, начиная с которых в его точках начинают действовать некоторые напряжения: мы считаем, что до присоединения новый материал был свободен от напряжений, а непосредственно в момент присоединения в нем задается произвольный окружной преднатяг $\sigma_0(\rho)$.

После построения решения задачи (1) требуется проинтегрировать соотношение (2) по времени с целью определения закона $\widehat{\boldsymbol{\sigma}}(\rho,\varphi,t)$ изменения во времени выражения, записанного в (2) в квадратных скобках. В качестве начального условия следует задать условие

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{oo}\,\sigma_0(\rho) \quad \text{при} \quad t = t_0(\rho),$$

выражающее оговоренный выше факт преднапряженности добавляемого материала. В записи этого условия мы используем единичный вектор $\mathbf{o} = d\mathbf{n}/d\varphi$, указывающий окружное направление в каждой точке покрытия.

Приравняв выражение в квадратных скобках в (2) найденному закону его изменения, мы можем решить получившееся при этом интегральное уравнение

$$\frac{\boldsymbol{\sigma}(\rho,\varphi,t)}{\mu(t)} - \int_{t_0(\rho)}^{t} \boldsymbol{\sigma}(\rho,\varphi,s)\,\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{\mu(s)} + \chi(s,t)\right)ds = \widehat{\boldsymbol{\sigma}}(\rho,\varphi,t) \qquad (3)$$

по временной переменной t и найти таким образом эволюцию $\boldsymbol{\sigma}(\rho,\varphi,t)$ напряжений в изготавливаемом покрытии. Заметим [6], что при определенных аппроксимациях материальных характеристик возможно получить замкнутое аналитическое представление резольвенты уравнения (3). При сделанных в данной работе предположениях относительно моделируемого процесса аддитивного производства рассматриваемого покрытия и характера его деформирования в этом процессе решение задачи (1) может быть также построено аналитически в квадратурах.

Предположим далее, что существует конечный предел

$$\psi_\infty = \lim_{t\to+\infty} \psi(t),$$

вообще говоря, отличный от нуля, что означает выход программы вращения трубы на некоторый установившийся режим после того, как изготовление рассматриваемого покрытия полностью закончено. Тогда в силу свойств, которыми должны необходимо обладать функции, описывающие материал при принятых в нашей модели определяющих уравнениях [6], будет существовать конечный предел

$$\boldsymbol{\sigma}_\infty(\rho,\varphi) = \lim_{t\to+\infty} \boldsymbol{\sigma}(\rho,\varphi,t),$$

то есть переменные во времени поля напряжений в готовом покрытии, найденные путем решения интегрального уравнения (3), выйдут на некоторые установившиеся распределения.

Вычисление остаточных напряжений в готовом покрытии. Готовое покрытие, естественно, уже не будет испытывать на себе действие массовых сил инерции, поскольку его вращение имело место только во время изготовления и в течение какого-то конечного интервала времени после него. Однако в силу несовместности деформаций в аддитивно изготовленном теле в нем должны продолжать действовать некоторые напряжения даже в отсутствие внешних воздействий [14]. Мы можем строго доказать, что для определения установившихся распределений таких остаточных напряжений в рассматриваемом покрытии допустимо воспользоваться следующей методикой.

Искомое поле остаточных напряжений в рассматриваемом твердом теле со сложными реологическими свойствами может быть найдено как

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{res}}(\rho,\varphi)=\boldsymbol{\sigma}_{\infty}(\rho,\varphi)+\Delta\boldsymbol{\sigma}_{\infty}(\rho,\varphi)\,,$$

где тензорное поле $\Delta\boldsymbol{\sigma}_{\infty}$ определяется путем решения классической задачи теории упругости

$$\operatorname{div}\Delta\boldsymbol{\sigma}_{\infty}=\mathbf{n}\,D\rho\psi_{\infty}^{2} \quad \text{при} \quad r_{\mathrm{end}}<\rho<r_{0};$$

$$\frac{\Delta\boldsymbol{\sigma}_{\infty}}{2\mu_{\infty}}=\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{\infty}+\frac{\mathbf{11}\cdot\cdot\,\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{\infty}}{m-2}, \quad \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{\infty}=\frac{\operatorname{grad}\Delta\mathbf{u}_{\infty}^{\mathrm{transp}}+\operatorname{grad}\Delta\mathbf{u}_{\infty}}{2};$$

$$\mathbf{n}\cdot\Delta\boldsymbol{\sigma}_{\infty}=\mathbf{0} \quad \text{при} \quad \rho=r_{\mathrm{end}}; \qquad \Delta\mathbf{u}_{\infty}=\mathbf{0} \quad \text{при} \quad \rho=r_{0}.$$

Здесь μ_{∞} – предельный модуль упруго-мгновенной деформации второго рода реально используемого материала,

$$\mu_{\infty}=\lim_{t\to+\infty}\mu(t)\,;$$

где r_{end} – внутренний радиус готового покрытия; $\Delta\mathbf{u}_{\infty}$ и $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{\infty}$ имеют смысл вектора упругих перемещений и тензора малой упругой деформации.

Если осуществить числовые расчеты с помощью описанной методики, то можно обнаружить, например, факты возникновения сжимающих окружных напряжений по всей толщине готового покрытия, локализации максимальных значений касательных напряжений в покрытии вблизи его свободной поверхности, а также сохранения прижимающего контактного давления на поверхности контакта готового покрытия с трубой – при прекращении деформирующих инерционных воздействий на материал покрытия, которое изготавливалось при нулевых предварительных напряжениях в послойно добавляемом материале.

Выводы. Математическая модель, разработанная для квазистатического описания процесса деформирования слоя защитного покрытия из материала, демонстрирующего сложные реологические свойства, аддитивно изготавливаемого центробежным способом внутри прямолинейного участка кругового трубопровода до достижения этим слоем произвольно заданной итоговой толщины, дает возможность построить эффективную методику вычисления остаточных полей технологических напряжений, устанавливающихся в готовом покрытии после прекращения его технологического вращения. В соответствии с данной методикой искомые поля находятся из определенных, допускающих аналитическое решение: 1) неклассической краевой задачи механики в изменяющейся со временем области пространства, 2) интегрального уравнения типа Вольтерра по времени, 3) классической упругой задачи. Анализ сколь угодно долго сохраняющегося в изготовленном защитном слое напряженного состояния, полученного применением этой методики, демонстрирует количественные и качественные результаты, которые невозможно объяснить в рамках традиционных рассмотрений механики деформируемого твердого тела.

Благодарности и финансирование. Работа выполнена по теме государственного задания (номер госрегистрации 123021700050-1).

Список литературы

1. Nicoletto G., Daviddi D., Fornaci A. Simulation of residual stresses due to SLM fabrication and correlation with directional fatigue behavior of AlSi10Mg // Proceedings of the II International Conference on Simulation for Additive Manufacturing (Sim-AM 2019). – Barcelona: CIMNE, 2019. – P. 91-98.
2. Manzhirov A.V., Kazakov K.E. Axisymmetric problem of fretting wear for a foundation with a nonuniform coating and rough punch // AIP Conference Proceedings. 2018, vol. 1959, p. 070023.
3. Hakobyan V.N., Amirjanyan H.A., Kazakov K.Ye. Axisymmetric stressed state of uniformly layered space with periodic systems of internal disc-shaped cracks and inclusions // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. – 2020. – № 2. – С. 25-40.
4. Kazakov K.E., Kurdina S.P. Interaction of viscoelastic tube with inner nonuniform coating of variable thickness and rigid cylindrical insert // Key Engineering Materials. 2021, vol. 894, pp. 67-71.
5. Казаков К.Е. Об учете радиальной неоднородности при решении краевых задач для полых круговых

цилиндров // Транспортное, горное и строительное машиностроение: наука и производство. – 2022. – № 17-1. – С. 32-37.
6. Арутюнян Н.Х. Некоторые вопросы теории ползучести. – М.; Л.: Гостехиздат, 1952. – 323 с.
7. Паршин Д.А. Неклассическая модель механики деформируемого твердого тела для описания процесса центробежного нанесения защитного покрытия на внутреннюю поверхность прямолинейного участка трубопровода // Транспортное, горное и строительное машиностроение: наука и производство. – 2022. – № 17-1. – С. 45-51.
8. Манжиров А.В., Черныш В.А. Задача об усилении заглубленной арочной конструкции методом наращивания // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 1992. – № 5. – С. 25-37.
9. Манжиров А.В. Общая безынерционная начально-краевая задача для кусочно-непрерывно наращиваемого вязкоупругого стареющего тела // Прикладная математика и механика. – 1995. – Т. 59, вып. 5. – С. 836-848.
10. Паршин Д.А. Аналитические решения задачи об аддитивном формировании неоднородного упругого шарового тела в произвольном нестационарном центральном поле сил // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2017. – № 5. – С. 70-82.
11. Manzhirov A.V., Parshin D.A. Analytical solution of the mechanical problem on additive thickening of aging viscoelastic tapers under nonstationary longitudinal end forces // Engineering Letters. 2018, vol. 26, no. 2, pp. 267-275.
12. Manzhirov A.V., Mikhin M.N. 2D problems of surface growth theory with applications to additive manufacturing // Journal of Physics: Conference Series. 2018, vol. 991, p. 012057.
13. Parshin D.A. Problems on controlling the stress state of large-sized structures being consecutively constructed of materials with rheological properties // Procedia Structural Integrity. 2023, vol. 50, pp. 320-326.
14. Бычков П.С, Козинцев В.М., Манжиров А.В., Попов А.Л. Определение остаточных напряжений в изделиях при их аддитивном изготовлении методом послойной фотополимеризации // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2017. – № 5. – С. 63-69.

References

1. Nicoletto G., Daviddi D., Fornaci A. Simulation of residual stresses due to SLM fabrication and correlation with directional fatigue behavior of AlSi10Mg // Proceedings of the II International Conference on Simulation for Additive Manufacturing (Sim-AM 2019). – Barcelona: CIMNE, 2019. – P. 91-98.
2. Manzhirov A.V., Kazakov K.E. Axisymmetric problem of fretting wear for a foundation with a nonuniform coating and rough punch // AIP Conference Proceedings. 2018, vol. 1959, p. 070023.
3. Hakobyan V.N., Amirjanyan H.A., Kazakov K.Ye. Axisymmetric stressed state of uniformly layered space with periodic systems of internal disc-shaped cracks and inclusions // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. – 2020. – № 2. – С. 25-40.
4. Kazakov K.E., Kurdina S.P. Interaction of viscoelastic tube with inner nonuniform coating of variable thickness and rigid cylindrical insert // Key Engineering Materials. 2021, vol. 894, pp. 67-71.
5. Kazakov K.E. On the consideration of radial inhomogeneity in solving boundary value problems for hollow circular cylinders // Transport, mining and construction engineering: science and production. 2022, no. 17-1, pp. 32-37.
6. Arutyunyan N.Kh. Some Problems in the theory of creep. – Oxford: Pergamon Press, 1966. – 290 p.
7. Parshin D.A. A non-classical model of deformable solid mechanics for the process of protective coating centrifugal application onto the inner surface of a pipeline rectilinear section // Transport, mining and construction engineering: science and production. 2022, no. 17-1, pp. 45-51.
8. Manzhirov A.V., Chernysh V.A. Problem of a buried arch structure reinforcement by the accretion method // Proceedings of the Academy of Sciences. Solid mechanics. 1992, vol. 27, no. 5, pp. 25-37.
9. Manzhirov A.V. The general non-inertial initial-boundaryvalue problem for a viscoelastic ageing solid with piecewise-continuous accretion // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1995, vol. 59, no. 5, pp. 805-816.
10. Parshin D.A. Analytic solution of the problem of additive formation of an inhomogeneous elastic spherical body in an arbitrary nonstationary central force field // Mechanics of Solids. 2017, vol. 52, no. 5, pp. 530-540.
11. Manzhirov A.V., Parshin D.A. Analytical solution of the mechanical problem on additive thickening of aging viscoelastic tapers under nonstationary longitudinal end forces // Engineering Letters. 2018, vol. 26, no. 2, pp. 267-275.
12. Manzhirov A.V., Mikhin M.N. 2D problems of surface growth theory with applications to additive manufacturing // Journal of Physics: Conference Series. 2018, vol. 991, p. 012057.
13. Parshin D.A. Problems on controlling the stress state of large-sized structures being consecutively constructed of materials with rheological properties // Procedia Structural Integrity. 2023, vol. 50, pp. 320-326.
14. Bychkov P.S., Kozintsev V.M., Manzhirov A.V., Popov A.L. Determination of residual stresses in products in additive production by the layer-by-layer photopolymerization method // Mechanics of Solids. 2017, vol. 52, no. 5, pp. 524-529.

Сведения об авторах:	*Information about authors:*
Паршин Дмитрий Александрович – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник	**Parshin Dmitry Aleksandrovich** – candidate of physics and mathematics sciences, senior researcher
parshin@ipmnet.ru	

Получена 30.11.2023