Казаков К.Е. Особенности расчета коэффициентов разложения ядер плоских контактных задач по специальному базису // Транспортное, горное и строительное машиностроение: наука и производство. – 2023. – № 23. – С. 39-44.

УДК 539.3 https://doi.org/10.26160/2658-3305-2023-23-39-44

ОСОБЕННОСТИ РАСЧЕТА КОЭФФИЦИЕНТОВ РАЗЛОЖЕНИЯ ЯДЕР ПЛОСКИХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ ПО СПЕЦИАЛЬНОМУ БАЗИСУ

Казаков К.Е.
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

Ключевые слова: контактная задача, специальный базис, пространство L_2, несобственные интегралы, численно-аналитические методы, интегральный косинус.
Аннотация. Так как решения ряда контактных задач представляют из себя бесконечные функциональные ряды по системе базисных функций, то при их построении возникает необходимость представления ядер интегральных уравнений, описывающих процесс взаимодействия, в виде двумерных рядов по заданной системе базисных функций. Зачастую ядра имеют достаточно сложный вид, а система базисных функций построена с учетом особенностей задачи. Поэтому нахождение коэффициентов разложения — это сложный и трудозатратный процесс. От него зависит точность и скорость получения окончательных результатов. В работе описан метод расчета, позволяющий вычислять коэффициенты разложения ядер плоских контактных задач по специальной системе базисных функций, учитывающих особенности взаимодействующих тел. На основании полученного представления сформулированы выводы и рекомендации.

FEATURES OF CALCULATION OF DECOMPOSITION COEFFICIENTS OF PLANE CONTACT PROBLEMS KERNELS ON A SPECIAL BASIS

Kazakov K.E.
Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow

Keywords: contact problem, special basis, L_2 space, improper integrals, numerical-analytical methods, cosine integral.
Abstract. Since the solutions of a number of contact problems are infinite functional series according on a system of basic functions, when constructing them, it becomes necessary to represent the kernels of integral equations describing the interaction process in the form of two-dimensional series according on a given system of basic functions. Often the kernels have a rather complex appearance, and the system of basic functions is built taking into account the specifics of the problem. Therefore, finding the decomposition coefficients is a complex and labor–intensive process. The accuracy and speed of obtaining final results depends on it. The paper describes a calculation method that allows calculating the coefficients of decomposition of the nuclei of plane contact problems by a special system of basic functions that take into account the features of interacting bodies. Based on the received presentation, conclusions and recommendations are formulated.

Введение. Математическими моделями многих задач, возникающих в механике контактного взаимодействия, являются интегральные уравнения различных типов. Например, интегральное уравнение Фредгольма первого рода описывает внедрение штампа в упругий слой, а также в упругий клин [1-3], интегральное уравнение Фредгольма второго рода моделирует взаимодействие жесткого штампа и упругого слоя с тонким покрытием [4]. Если же слой или слои изготовлены из вязкоупругих материалов, то в указанных уравнениях дополнительно появляются операторы Вольтерра [5, 6]. Решения подобных задач можно строить, представляя искомую функцию в виде ряда по некоторой системе ортогональных функций. В этом случае ядра уравнений и другие функции, входящие в состав уравнения и зависящие от соответствующих переменных, также необходимо представлять в виде рядов по системе функций, входящих в базис. В большинстве случаев ядра имеют достаточно сложную структуру либо обладают такими особенностями, которые не позволяют применять стандартные численные методы для расчета коэффициентов разложения указанных ядер по заданному базису.

В работе приведены подходы, позволяющие рассчитывать коэффициенты разложения ядер по специальной системе собственных функций для плоских задач контакта жесткого штампа и основания с покрытием в случаях, когда покрытие имеет сложные свойства и/или формы контактирующих поверхностей описываются быстро изменяющимися функциями. Подобные контактные задачи рассматривались, например, в работах [7-10].

Интегральное уравнение и ортонормированный базис. В достаточно общем случае интегральные уравнения, возникающие в плоских контактных задачах и задах износа основания с покрытием [7-10], приводятся к безразмерному виду

$$c(t)(\mathbf{I}-\mathbf{V}_1)m(x)q(x,t)+(\mathbf{I}-\mathbf{V}_2)\mathbf{F}q(x,t)=\delta(t)+\alpha(t)x-g(x), \quad x\in[-1,1], \quad t\ge 1, \tag{1}$$

где функции $q(x,t)$, $\delta(t)$, $\alpha(t)$ пропорциональны контактному давлению под штампом, осадке штампа и его углу поворота, соответственно, $m(x)$ связана с жесткостью покрытия и его толщиной, $g(x)$ пропорциональна зазору между штампом и поверхностью покрытия в недеформированном состоянии; наличие функции $c(t)$ и операторов Вольтера $\mathbf{V}_1$ и $\mathbf{V}_2$ обусловлено либо реологическими свойствами слоев, либо процессом износа покрытия. Входящий в уравнение оператор $\mathbf{F}$ является положительно определенным оператором Фредгольма действующим в области [–1,1] с симметричным положительно определенным ядром

$$k(x,\xi)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{L(u)}{u}\cos\left(\frac{x-\xi}{\lambda}u\right)du\,, \tag{2}$$

в котором функция $L(u)$ зависит от вида сцепления нижнего слоя с недеформируемой подложкой: в случае жесткого сцепления

$$L(u)=\frac{2\kappa\,\mathrm{sh}(2u)+4u}{2\kappa\,\mathrm{ch}(2u)+\kappa^2+1+4u^2}, \quad \kappa=3-4\nu\,, \tag{3}$$

в случае гладкого контакта

$$L(u)=\frac{\mathrm{ch}(2u)-1}{\mathrm{sh}(2u)+2u}. \tag{4}$$

В приведенных выше работах показано, что если функции $m(x)$ и/или $g(x)$ являются быстро изменяющимися, то решение необходимо строить специальным образом так, чтобы они выделялись отдельными множителями и слагаемыми. В противном случае решение, полученное стандартными методами, не позволит производить реальные расчеты, так как количество необходимых для вычисления слагаемых бесконечного ряда будет достаточно велико, что приведет к большим вычислительным погрешностям из-за ограниченности мантиссы.

Для достижения этой цели необходимы следующие действия.

Во-первых, при помощи новых переменных

$$Q(x,t)=\sqrt{m(x)}\,q(x,t)+(\mathbf{I}-\mathbf{V}_1)^{-1}\frac{g(x)}{c(t)\sqrt{m(x)}}, \quad K(x,\xi)=\frac{k(x,\xi)}{\sqrt{m(x)m(\xi)}} \tag{5}$$

уравнение (1) нужно привести к виду

$$c(t)(\mathbf{I}-\mathbf{V}_1)Q(x,t)+(\mathbf{I}-\mathbf{V}_2)\mathbf{G}Q(x,t)=\frac{\delta(t)+\alpha(t)x-\tilde{c}(t)\tilde{g}(x)}{\sqrt{m(x)}}, \quad x\in[-1,1], \quad t\ge 1, \tag{6}$$

где $\tilde{c}(t)=(\mathbf{I}-\mathbf{V}_2)(\mathbf{I}-\mathbf{V}_1)^{-1}c^{-1}(t), \quad \tilde{g}(x)=\int_{-1}^{1}\frac{k(x,\xi)}{m(\xi)}g(\xi)d\xi, \quad \mathbf{G}Q(x,t)=\int_{-1}^{1}K(x,\xi)Q(\xi,t)d\xi.$

Отметим, что оператор $\mathbf{G}$ также как и $\mathbf{F}$ является оператором Фредгольма с положительно определенным симметричным ядром.

Во-вторых, решение интегрального уравнения (6) следует строить в гильбертовом пространстве $L_2[-1,1]$ по специальной системе базисных функций $\{f_m(x)\}_{m=0,1,2,\ldots}$, получающейся при помощи ортонормирования в $L_2[-1,1]$ следующей линейно независимой системы

$$\left\{1\big/\sqrt{m(x)}\,,\,x\big/\sqrt{m(x)}\,,\,x^2\big/\sqrt{m(x)}\,,\ldots\right\}, \tag{7}$$

то есть функции $f_m(x)$ являются линейными комбинациями функций из системы (7), то есть $f_m(x) = \sum_{i=0}^{m} k_{im} x^i \big/ \sqrt{m(x)}$. Если ввести полиномы $p_m(x)$ по правилу $p_m(x) = \sum_{i=1}^{m} k_{im} x^i$, то базисные функции $f_m(x)$ будут с ними связаны соотношением

$$f_m(x) = \frac{p_m(x)}{\sqrt{m(x)}}. \tag{8}$$

Дальнейший алгоритм построения решения можно найти в указанных ранее работах и в работе [11]. В настоящей статье остановимся отдельно на процедуре построения коэффициентов разложения ядра оператора Фредгольма **G** в двойной ряд по системе базисных функций $\{f_m(x)\}_{m=0,1,2,\ldots}$.

Построение коэффициентов разложения ядра плоской задачи. Рассмотрим ядро плоской контактной задачи $K(x,\xi)$, определяемое формулами (2), (5). Задача состоит в отыскании коэффициентов его разложения в двойной ряд по базисным функциям $f_m(x)$. Это можно сделать, дважды домножив указанное ядро $K(x,\xi)$ скалярно в $L_2[-1,1]$ на различные, в общем случае, функции из базиса $f_m(x)$, $f_n(x)$, то есть

$$K_{mn} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} K(x,\xi) f_m(x) f_n(\xi) dx d\xi. \tag{9}$$

Учитывая вид ядра (5) и базисных функций (8), преобразуем выражение (9) к виду

$$K_{mn} = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{p_m(x)}{m(x)} \frac{p_n(\xi)}{m(\xi)} \int_{0}^{\infty} \frac{L(u)}{u} \cos\left(\frac{x-\xi}{\lambda} u\right) du dx d\xi. \tag{10}$$

При стремлении u к бесконечности функция $L(u)$, задаваемая уравнением (3) или (4), стремится к 1, то есть для любой наперед заданной точности ε определения функции $L(u)$ найдется такое число M, что $|L(u) - 1| < \varepsilon$ для любых $u > U$. Тогда, разбив правую часть выражения (10) на два слагаемых, получим приближенное выражение для вычисления коэффициентов

$$K_{mn} \approx K_{mn}^{(U)} + K_{mn}^{(\infty)}, \tag{11}$$

где

$$\begin{gathered} K_{mn}^{(U)} = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{p_m(x)}{m(x)} \frac{p_n(\xi)}{m(\xi)} \int_{0}^{U} \frac{L(u)}{u} \cos\left(\frac{x-\xi}{\lambda} u\right) du dx d\xi. \\ K_{mn}^{(\infty)} = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{p_m(x)}{m(x)} \frac{p_n(\xi)}{m(\xi)} \int_{U}^{\infty} \frac{1}{u} \cos\left(\frac{x-\xi}{\lambda} u\right) du dx d\xi. \end{gathered} \tag{12}$$

Рассмотрим сначала коэффициенты $K_{mn}^{(U)}$. Внутренний интеграл в выражении (12) для коэффициентов $K_{mn}^{(U)}$ можно приближенно вычислить следующим образом:

$$\begin{gathered} \int_{0}^{U} \frac{L(u)}{u} \cos\left(\frac{x-\xi}{\lambda} u\right) du = \sum_{k=1}^{M} \int_{u_{k-1}}^{u_k} \frac{L(u)}{u} \cos\left(\frac{x-\xi}{\lambda} u\right) du \approx \\ \approx \sum_{k=1}^{M} L(\bar{u}_k) \int_{u_{k-1}}^{u_k} \frac{1}{u} \cos\left(\frac{x-\xi}{\lambda} u\right) du = \sum_{k=1}^{M} L(\bar{u}_k) \left[\mathrm{Ci}\left(\frac{x-\xi}{\lambda} u_k\right) - \mathrm{Ci}\left(\frac{x-\xi}{\lambda} u_{k-1}\right) \right]. \end{gathered} \tag{13}$$

Здесь $\{u_k\}_{k=0,\ldots,M}$ – сетка по оси u, такая, что $0 = u_0 < u_1 < \ldots < u_{M-1} < u_M = U$, $\bar{u}_k \in [u_{k-1}, x_k]$ ($k = 1,\ldots,M$), а $\mathrm{Ci}(\ldots)$ – интегральный косинус [12]. Подставив (13) в выражение (12) для коэффициентов $K_{mn}^{(U)}$, получим

$$K_{mn}^{(U)} \approx \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{M} L(\bar{u}_k) \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{p_m(x)}{m(x)} \frac{p_n(\xi)}{m(\xi)} \left[\mathrm{Ci}\left(\frac{x-\xi}{\lambda} u_k\right) - \mathrm{Ci}\left(\frac{x-\xi}{\lambda} u_{k-1}\right) \right] dx d\xi. \tag{14}$$

Приближенные формулы для двойного интеграла в выражении (14) имеют вид

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{p_m(x)}{m(x)}\frac{p_n(\xi)}{m(\xi)}\left[\mathrm{Ci}\left(\frac{x-\xi}{\lambda}u_k\right)-\mathrm{Ci}\left(\frac{x-\xi}{\lambda}u_{k-1}\right)\right]dxd\xi=$$

$$=\sum_{i,j=-N+1}^{N}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\int_{x_{j-1}}^{x_j}\frac{p_m(x)}{m(x)}\frac{p_n(\xi)}{m(\xi)}\left[\mathrm{Ci}\left(\frac{x-\xi}{\lambda}u_k\right)-\mathrm{Ci}\left(\frac{x-\xi}{\lambda}u_{k-1}\right)\right]dxd\xi\approx \quad (15)$$

$$\approx\sum_{i,j=-N+1}^{N}\frac{p_m(\bar{x}_i)}{m(\bar{x}_i)}\frac{p_n(\bar{x}_j)}{m(\bar{x}_j)}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\int_{x_{j-1}}^{x_j}\left[\mathrm{Ci}\left(\frac{x-\xi}{\lambda}u_k\right)-\mathrm{Ci}\left(\frac{x-\xi}{\lambda}u_{k-1}\right)\right]dxd\xi.$$

Здесь $\{x_i\}_{i=-N,\ldots,N}$ – сетка по координатной оси x, такая, что $-1=x_{-N}<x_{-N+1}<\ldots<x_{N-1}<x_N=1$, а $\bar{x}_i\in[x_{i-1},x_i]$ ($i=-N+1,\ldots,N$).

Можно показать, что если ввести функцию

$$F(x,\xi,u)=\frac{1}{2}\left[\frac{\lambda}{u}(x-\xi)\sin\left(\frac{x-\xi}{\lambda}u\right)-\frac{\lambda^2}{u^2}\cos\left(\frac{x-\xi}{\lambda}u\right)-(x-\xi)^2\,\mathrm{Ci}\left(\frac{x-\xi}{\lambda}u\right)\right], \quad (16)$$

то $\partial^2F(x,\xi,u)/\partial x\partial y=\mathrm{Ci}((x-\xi)u/\lambda)$, следовательно,

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i}\int_{x_{j-1}}^{x_j}\mathrm{Ci}\left(\frac{x-\xi}{\lambda}u\right)dxd\xi=F(x_{i-1},x_{j-1},u)-F(x_{i-1},x_j,u)-F(x_i,x_{j-1},u)+F(x_i,x_j,u). \quad (17)$$

Тогда на основании (16), (17) двойной интеграл в правой части соотношения (15) можно преобразовать к виду:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i}\int_{x_{j-1}}^{x_j}\left[\mathrm{Ci}\left(\frac{x-\xi}{\lambda}u_k\right)-\mathrm{Ci}\left(\frac{x-\xi}{\lambda}u_{k-1}\right)\right]dxd\xi=\tilde{F}^k_{i-1,j-1}-\tilde{F}^k_{i-1,j}-\tilde{F}^k_{i,j-1}+\tilde{F}^k_{i,j}, \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned}&\tilde{F}^k_{i,j}=F^k_{i,j}-F^{k-1}_{i,j},\quad i,j=-N,\ldots,N,\quad k=1,2,\ldots,M,\\&F^k_{i,j}=F(x_i,x_j,u_k),\quad i,j=-N,\ldots,N,\quad k=0,1,\ldots,M.\end{aligned} \quad (19)$$

Используя формулы (14), (15), (18), получим

$$K^{(U)}_{mn}\approx\frac{1}{\pi}\sum_{i,j=-N+1}^{N}\frac{p_m(\bar{x}_i)}{m(\bar{x}_i)}\frac{p_n(\bar{x}_j)}{m(\bar{x}_j)}(F^{(U)}_{i-1,j-1}-F^{(U)}_{i-1,j}-F^{(U)}_{i,j-1}+F^{(U)}_{i,j}), \quad (20)$$

$$F^{(U)}_{i,j}=\sum_{k=1}^{M}L(\bar{u}_k)\tilde{F}^k_{i,j}. \quad (21)$$

Рассмотрим теперь слагаемое $K^{(\infty)}_{mn}$. С учетом определения интегрального косинуса, выражение (12) для $K^{(\infty)}_{mn}$ примет вид

$$K^{(\infty)}_{mn}=-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{p_m(x)}{m(x)}\frac{p_n(\xi)}{m(\xi)}\mathrm{Ci}\left(\frac{x-\xi}{\lambda}U\right)dxd\xi. \quad (22)$$

Приближенные формулы для двойного интеграла в этом выражении

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{p_m(x)}{m(x)}\frac{p_n(\xi)}{m(\xi)}\mathrm{Ci}\left(\frac{x-\xi}{\lambda}U\right)dxd\xi=\sum_{i,j=-N+1}^{N}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\int_{x_{j-1}}^{x_j}\frac{p_m(x)}{m(x)}\frac{p_n(\xi)}{m(\xi)}\mathrm{Ci}\left(\frac{x-\xi}{\lambda}U\right)dxd\xi\approx$$

$$\approx\sum_{i,j=-N+1}^{N}\frac{p_m(\bar{x}_i)}{m(\bar{x}_i)}\frac{p_n(\bar{x}_j)}{m(\bar{x}_j)}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\int_{x_{j-1}}^{x_j}\mathrm{Ci}\left(\frac{x-\xi}{\lambda}U\right)dxd\xi \quad (23)$$

На основании (16), (17), (22), (23) выражение для приближенного вычисления коэффициентов $K^{(\infty)}_{mn}$ имеет вид

$$K_{mn}^{(\infty)} \approx -\frac{1}{\pi}\sum_{i,j=-N+1}^{N}\frac{p_m(\bar{x}_i)}{m(\bar{x}_i)}\frac{p_n(\bar{x}_j)}{m(\bar{x}_j)}(F_{i-1,j-1}^{(\infty)} - F_{i-1,j}^{(\infty)} - F_{i,j-1}^{(\infty)} + F_{i,j}^{(\infty)}), \tag{24}$$

$$F_{i,j}^{(\infty)} = F(x_i, x_j, U) = F_{i,j}^{M}. \tag{25}$$

Таким образом, соотношения (11), (16), (19)-(21), (24), (25) позволяют получить следующие приближенные формулы для вычисления коэффициентов разложения ядра $K(x,\xi)$ в двойной ряд по системе базисных функций (8):

$$K_{mn} \approx \frac{1}{\pi}\sum_{i,j=-N+1}^{N}\frac{p_m(\bar{x}_i)}{m(\bar{x}_i)}\frac{p_n(\bar{x}_j)}{m(\bar{x}_j)}(F_{i-1,j-1} - F_{i-1,j} - F_{i,j-1} + F_{i,j}),$$

$$F_{i,j} = F_{i,j}^{(U)} - F_{i,j}^{M}, \quad F_{i,j}^{(U)} = \sum_{k=1}^{M} L(\bar{u}_k)(F_{i,j}^{k} - F_{i,j}^{k-1}), \quad F_{i,j}^{k} = F(x_i, x_j, u_k), \tag{26}$$

$$F(x,\xi,u) = \frac{1}{2}\left[\frac{\lambda}{u}(x-\xi)\sin\left(\frac{x-\xi}{\lambda}u\right) - \frac{\lambda^2}{u^2}\cos\left(\frac{x-\xi}{\lambda}u\right) - (x-\xi)^2\,\mathrm{Ci}\left(\frac{x-\xi}{\lambda}u\right)\right].$$

Отметим, что коэффициенты $F_{i,j}$ обладают свойством симметрии, т.е. $F_{i,j} = F_{j,i}$. В случае, если сетка симметрична, то $F_{i,-j} = F_{-j,i}$, а если она еще и равномерна, то $F_{i,j} = F_{i+l,j+l}$. Указанные свойства можно использовать для ускорения вычисления коэффициентов разложения.

Проанализируем выражение (26). Коэффициенты $F_{i,j}$ зависят только от коэффициента λ и от функции $L(u)$, которые, в свою очередь связаны с шириной штампа, свойствами нижнего основания (толщиной и коэффициентом Пуассона) и условиями сцепления на нижней грани. Первые же два множителя в сумме в (26) зависят от упругих свойств покрытия и функций, описывающих профили контактирующих поверхностей. Поэтому при проведении расчетов для случаев, когда свойства и толщина нижнего слоя, а также ширина штампа, не меняются, нужно использовать одни и те же коэффициенты $F_{i,j}$. Это позволяет исследователю ускорить проведение расчетов для большого количества разнообразных покрытий.

Результаты и выводы. В работе выведены приближенные формулы для вычисления коэффициентов разложения ядер плоских контактных и износоконтактных задач для оснований с покрытиями. Указаны случаи и способы, при помощи которых вычисление коэффициентов можно ускорить. Выражения для коэффициентов представляют из себя сумму произведений множителей, один из которых зависит только от параметров нижнего основания и ширины штампа. Это позволяет производить большее число исследований влияния свойств покрытия и профилей поверхностей на контактные характеристики, так как большая часть времени тратится именно на расчет коэффициентов разложения ядра.

Благодарности и финансирование. Исследование выполнено по теме государственного задания (номер госрегистрации 123021700050-1).

Список литературы

1. Развитие теории контактных задач в СССР / Под ред. Л.А. Галина. – М.: Наука, 1976. – 493 с.
2. Александров В.М., Ромалис Б.Л. Контактные задачи в машиностроении. – М.: Машиностроение, 1986. – 175 с.
3. Александров В.М., Чебаков М.И. Введение в механику контактных взаимодействий. – Ростов-на-Дону: Изд-во ООО «ЦВВР», 2007. – 114 с.
4. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. – М.: Наука, 1983. – 488 с.
5. Манжиров А.В. Осесимметричные контактные задачи для неоднородно-стареющих вязкоупругих слоистых оснований // Прикладная математика и механика. – 1983. – Т. 47, Вып. 4. – С. 684-693.
6. Арутюнян Н.Х., Манжиров А.В. Контактные задачи теории ползучести. – Ереван: Изд-во НАН РА, 1999. – 320 с.
7. Манжиров А.В., Казаков К.Е. Контактная задача с износом для основания с поверхностно неоднородным покрытием // Доклады Академии наук. – 2017. – Т. 475, № 1. – С. 39-44.

8. Manzhirov A.V., Kazakov K.E. The interaction between a coated foundation and a rigid punch with rough surfaces // Lecture Notes in Engineering and Computer Science. 2017, vol. 2230, pp. 993-996.
9. Kazakov K.E. Wear of foundation with a nonuniform coating by rough punch // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2019, vol. 489, pp. 012027.
10. Manzhirov A.V., Kazakov K.E. Plane problem of contact interaction for foundation with multilayer nonuniform coating // Journal of Physics: Conference Series. 2019, vol. 1205, pp. 012037.
11. Манжиров А.В. Смешанное интегральное уравнение механики и обобщенный проекционный метод его решения // Доклады Академии наук. – 2016. – № 4. – С. 401-405.
12. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1978. – 720 с.

References

1. The Development of Theory of Contact Problems in USSR / Ed. by L.A. Galin. – M.: Science, 1976. – 493 p.
2. Alexandrov V.M., Romalis B.L. Contact Problems in Mechanical Engineering. – M.: Mechanical Engineering, 1986. – 175 p.
3. Alexandrov V.M., Chebakov M.I., Introduction to Mechanics of Contact Interactions. – Rostov-on-Don: Publ. house LLC «TsVVP», 2007. – 114 p.
4. Alexandrov V.M., Mkhitaryan S.M. Contact Problems for Bodies with Thin Coatings and Interlayers. – M.: Science, 1983. – 488 p.
5. Manzhirov A.V. Axisymmetric contact problems for non-uniform aging layered viscoelastic foundations // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1983, vol. 47, iss. 4, pp. 558-566.
6. Arutyunyan N.Kh., Manzhirov A.V., Contact Problems of Creep Theory. – Erevan: Publ. house NAN RA, 1999. – 320 p.
7. Manzhirov A.V., Kazakov K.E. Contact problem with wear for a foundation with a surface nonuniform coating // Reports of the Academy of Sciences. 2017, vol. 62, no. 7, pp. 344-349.
8. Manzhirov A.V., Kazakov K.E. The interaction between a coated foundation and a rigid punch with rough surfaces // Lecture Notes in Engineering and Computer Science. 2017, vol. 2230, pp. 993-996.
9. Kazakov K.E. Wear of foundation with a nonuniform coating by rough punch // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2019, vol. 489, pp. 012027.
10. Manzhirov A.V., Kazakov K.E. Plane problem of contact interaction for foundation with multilayer nonuniform coating // Journal of Physics: Conference Series. 2019, vol. 1205, pp. 012037.
11. Manzhirov A.V. A mixed integral equation of mechanics and a generalized projection method of its solution // Reports of the Academy of Sciences. 2016, vol. 61, no. 10, pp. 489-493.
12. Korn G.A., Korn T.M. Mathematical Handbook for Scientists and Engineers. – M.: Science, 1978. – 720 p.

Сведения об авторах:	*Information about authors:*
Казаков Кирилл Евгеньевич – кандидат физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник	**Kazakov Kirill Evgenievich –** candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, senior researcher
kazakov-ke@yandex.ru	

Получена 20.11.2023