

## ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ФОРМИРОВАНИЯ РЕЖИМОВ НЕПРЕРЫВНОГО ПОДБРАСЫВАНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ЧАСТИЦЫ НА ВИБРИРУЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ С УЧЕТОМ УПРУГИХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

*Елисеев А.В.<sup>1,2</sup>, Кузнецов Н.К.<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>*Иркутский государственный университет путей сообщения, Иркутск;*

<sup>2</sup>*Иркутский национальный исследовательский технический университет, Иркутск*

**Ключевые слова:** неудерживающие связи, обобщенная функция зазора, отношения частот, режимы кратного подбрасывания, порядок отрыва, режимы с кратным подбрасыванием, непрерывное подбрасывание.

**Аннотация.** Развиваются системные представления об условиях формирования динамических состояний технических объектов с учетом возможности нарушения неудерживающего контакта массоинерционного элемента с вибрирующей опорной поверхностью. Рассматривается задача оценки динамических взаимодействий элементов механической колебательной системы, включающей упругие силы, вес и постоянные дополнительные силы. Используются методы теории колебаний, интегральных преобразований Лапласа, теории функции комплексного переменного. В рамках операционного исчисления сформулированы необходимые и достаточные условия реализации отрыва на основе обобщенной функции зазора. Сформулированы аналитические условия, характеризующие режимы кратного подбрасывания с учетом упругих взаимодействий. Развиваются представления о методах формирования режимов непрерывного подбрасывания материальной частицы на основе понятия порядка отрыва. Определена роль соотношения частот в формировании характеристик зазора между массоинерционным элементом системы и вибрирующей поверхностью. Установлены асимптотические зависимости характеристик режимов с кратным подбрасыванием от частотных и амплитудных безразмерных параметров. Приведены результаты вычислительных экспериментов.

## THEORETICAL FOUNDATIONS OF THE FORMATION OF MODES OF CONTINUOUS TOSsing OF A MATERIAL PARTICLE ON A VIBRATING SURFACE TAKING INTO ACCOUNT ELASTIC INTERACTIONS

*Eliseev A.V.<sup>1,2</sup>, Kuznetsov N.K.<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>*Irkutsk State Transport University, Irkutsk;*

<sup>2</sup>*Irkutsk National Research Technical University, Irkutsk*

**Keywords:** unilateral ties, generalized gap function, method of sliding initial conditions, frequency ratios, multiple tossing modes, separation order, multiple tossing modes, continuous tossing.

**Abstract.** Systematic ideas are being developed about the conditions for the formation of dynamic states of technical objects, taking into account the possibility of breaking the non-holding contact of the mass-inertia element with the vibrating support surface. The problem of estimating the dynamic interactions of elements of a mechanical oscillatory system, including elastic forces, weight and constant additional forces, is considered. The methods of the theory of oscillations, integral Laplace transformations, the theory of the function of a complex variable. Within the framework of operational calculus, necessary and sufficient conditions for the implementation of separation based on the generalized gap function are formulated. Analytical conditions characterizing the modes of multiple tossing taking into account elastic interactions are formulated. Ideas about methods of forming modes of continuous tossing of a material particle based on the concept of separation order are being developed. The role of the frequency ratio in the formation of the characteristics of the gap between the mass-inertia element of the system and the vibrating support surface is determined. Asymptotic dependences of the characteristics of modes with multiple tossing on frequency and amplitude dimensionless parameters are established. The results of computational experiments are presented.

**Введение.** Неудерживающие связи являются одним из ключевых факторов, определяющих динамические состояния технических объектов, находящихся в условиях вибрационных нагружений, что отображено в работах по теоретической и аналитической механике, теории механизмов и машин [1-3]. Методы моделирования взаимодействий элементов вибрационных технологических машин с учетом возможности отрыва материальной частицы от поверхности рабочего органа находят свои приложения в

процессах вибрационного упрочнения, транспортировки, ориентации деталей и т.п. [4]. Отдельное направление, представляющее интерес в области использования вибрационных технологий, является разработка вибродвигателей [5].

Ряд вопросов, посвященных неударяющим связям, рассматривался в рамках проблемы динамических взаимодействий элементов коллекторно-щеточного узла тягового электродвигателя, расчетная схема которого может быть представлена в виде механической колебательной системой, учитывающей неударяющие взаимодействия элементов [6-8]. Своё развитие представления о формах динамических взаимодействий с учетом неударяющих связей получили в формулировке необходимых и достаточных условий формирования зазора, сформулированных в виде дифференциальных соотношений для обобщенной функции зазора [9].

Условно можно отметить два направления, касающиеся динамических взаимодействий элементов механических колебательных систем с учетом неударяющих связей. Первое связано с обеспечением сохранения контакта элементов, взаимодействие между которыми реализуется в условиях неударяющих связей. Примерами задач сохранения контакта служат вопросы оценки статических и динамических реакций, определение условий ненарушения контакта в составных твердых телах [10, 11]. Второе связано с условиями, обеспечивающими нарушение контакта между элементами. Примерами характерных задач, связанных с нарушением контакта, служат вопросы определения достаточных условий формирования зазора, определения условий реализации периодических режимов непрерывного подбрасывания частицы на вибрирующей поверхности, определения роли постоянных сил, сил вязкого трения, импульсных воздействий в формировании параметров периодических режимов формирования зазора [12]. Дополнительные представления о подходах к анализу форм движения частиц, взаимодействующих с вибрирующими поверхностями, могут быть получены в обзорной работе [13].

Вместе с тем, особенности учета неударяющих связей в системах, совершающих вынужденные колебания под действием упругих сил, ещё не получили достаточного уровня детализации в плане аналитических представлений.

Статья посвящается развитию представлений об условиях нарушения контакта материальной частицы с опорной вибрирующей поверхностью, а также вопросам формирования периодических режимов с непрерывным подбрасыванием в зависимости от особенностей упругих взаимодействий и постоянных сил.

## I. Основные положения.

**Постановка задачи.** Рассматривается механическая колебательная система, образованная твердым телом  $m$ , упругим элементом  $k$ , демпфером  $b$ , устройством для преобразования движения  $L$  и подвижной опорной поверхностью  $h$ , совершающей гармонические колебания в форме  $A \sin(\omega t)$  с амплитудой  $A$  и частотой  $\omega$  (рис. 1). На твердое тело с массой  $m$  действует дополнительная постоянная сила  $Q$ .

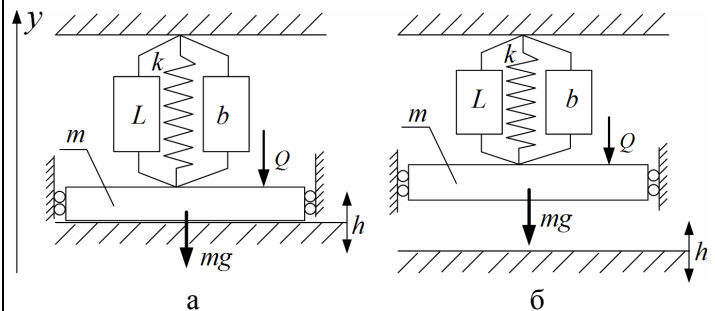


Рис. 1. Расчетная схема: а – контакт; б – зазор

Движение твердого тела, способного совершать вертикальные поступательные движения, ограничивает подвижная поверхность. Предполагается, что в начальный момент времени твердое тело, находится в контакте с опорной поверхностью и обладает скоростью поверхности. В зависимости от частоты и амплитуды колебания опорной поверхности твердое тело способно, либо находиться в контакте с поверхностью, либо совершать отрыв и свободно двигаться до момента падения на поверхность. Удар о поверхность считается абсолютно неупругим. В момент контакта с поверхностью тело мгновенно принимает скорость поверхности.

Задача заключается в разработке метода, позволяющего определять условия нарушения контакта в зависимости от параметров системы и оценивать возможные режимы движения твердого тела во взаимодействии с опорной поверхностью с учетом упругих сил, сил трения, постоянных дополнительных сил и устройства для преобразования движения.

**II. Математическая модель. Обобщенная функция зазора.** Для определения условий отрыва рассматривается семейство систем дифференциальных уравнений, начальные данные которых задаются кинематическими характеристиками вибрирующей поверхности:

$$\begin{cases} m\ddot{y}_{t_0}(\tau) + L\dot{y}_{t_0}(\tau) + by_{t_0}(\tau) + ky_{t_0}(\tau) = -mg - Q; \\ y_{t_0}(\tau)|_{\tau=0} = A \sin(\omega t_0); \\ \dot{y}_{t_0}(\tau)|_{\tau=0} = \omega A \cos(\omega t_0), \end{cases} \quad (1)$$

где  $t_0$  – момент времени, представляющей собой параметр системы, рассматривается как потенциальный момент времени отрыва,  $\tau$  – время от момента потенциального отрыва  $t_0$ ,  $y_{t_0}(\tau)$  – движение тела в зависимости от начальных условий, заданных в момент времени  $t_0$ .

Действие интегрального преобразования Лапласа системы дифференциальных уравнений (1) с учетом начальных условий, зависящих от момента времени  $t_0$ , приводит к алгебраическому уравнению относительно изображения Лапласа  $Y_{t_0}(p) \div y_{t_0}(\tau)$ :

$$mp^2Y_{t_0} + Lp^2Y_{t_0} + bpY_{t_0} + kY_{t_0} = -\frac{mg + Q}{p} + (m + L)(py_{t_0}(0) + \dot{y}_{t_0}(0)) + by_{t_0}(0), \quad (2)$$

где  $y_{t_0}(\tau)$  – соответствующий оригинал,  $p$  – комплексная переменная.

Решение алгебраического уравнения (2) в изображениях имеет вид

$$Y_{t_0} = \frac{p(m + L)(py_{t_0}(0) + \dot{y}_{t_0}(0)) + pby_{t_0}(0) - (mg + Q)}{(m + L)p^2 + bp + k}p. \quad (3)$$

Для определения условий отрыва используются различные подходы [12]. Фаза отрыва определяется методом обобщенной функции зазора  $R_{t_0}(\tau)$ , которая имеет вид

$$R_{t_0}(\tau) = y_{t_0}(\tau) - h_{t_0}(\tau), \quad (4)$$

где  $h_{t_0}(\tau) = A \sin(\omega(t_0 + \tau))$  – форма колебания поверхности.

Достаточные условия отрыва твердого тела от поверхности могут быть сформулированы в терминах условий на производные обобщенной функции зазора как функций вещественной переменной [9].

**III. Условия формирования отрыва.** Также необходимые и достаточные условия отрыва материальной частицы от поверхности могут быть сформулированы в терминах изображений на основе условий в результате преобразований Лапласа условий отрыва [9].

**Теорема.** Пусть обобщенная функция зазора в изображениях имеет вид

$$R_{t_0}(p) = Y_{t_0}(p) - H_{t_0}(p), \quad (5)$$

где  $Y_{t_0}(p) \div y_{t_0}(\tau)$  – изображение движения твердого тела  $y_{t_0}(\tau)$ ,  $H_{t_0}(p) \div h_{t_0}(\tau)$  – изображение движения поверхности  $h_{t_0}(\tau)$ . Для реализации отрыва в точке  $t_0$  необходимо и достаточно, чтобы для некоторого натурального  $k_0$  выполнялись условия:

$$\begin{cases} \text{Res}_{p=\infty}[R_{t_0} p^0] = 0; \\ \text{Res}_{p=\infty}[R_{t_0} p^1] = 0; \\ \dots \\ \text{Res}_{p=\infty}[R_{t_0} p^{k_0-1}] = 0; \\ \text{Res}_{p=\infty}[R_{t_0} p^{k_0}] < 0, \end{cases} \quad (6)$$

где  $\text{Res}[R_{t_0} p^i]_{p=\infty}$  – вычет функции  $R_{t_0} p^i$  относительно бесконечной точки  $p=\infty$  [14].

**Доказательство.** Для произвольного параметра  $t_0$  функция  $r_{t_0}(\tau)$  обобщенного зазора (4) может быть разложена в ряд Тейлора в точке  $\tau = 0$ :

$$r_{t_0}(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_{t_0}^{(n)}(0)}{n!} \tau^n, \quad (7)$$

где  $r_{t_0}^{(n)}(0)$  – производная  $n$ -ого порядка по переменной  $\tau$  для значения  $\tau = 0$ . Если для некоторого  $k_0$  выполнены условия обнуления производных [9]:

$$r_{t_0}^{(0)}(0) = 0, r_{t_0}^{(1)}(0) = 0, \dots, r_{t_0}^{(k_0-1)}(0) = 0, \quad (8)$$

то ряд (7) принимает вид

$$r_{t_0}(\tau) = \sum_{n=k_0}^{\infty} \frac{r_{t_0}^{(n)}(0)}{n!} \tau^n. \quad (9)$$

Если выполнено условие строгой положительности  $k_0$ -ой производной

$$r_{t_0}^{(k_0)}(0) > 0, \quad (10)$$

то функция  $r_{t_0}(\tau)$  строго положительна в некоторой малой окрестности  $(0 \dots \varepsilon)$ . Действительно, на основе (7) с учетом условия положительности (10) выполняется соотношение:

$$\frac{r_{t_0}(\tau)}{\tau^k} = \frac{r_{t_0}^{(k)}(0)}{k!} + o(1) \text{ при } \tau \rightarrow +0. \quad (11)$$

Оценка (11) обеспечивают строгую положительность функции  $r_{t_0}(\tau)$  для достаточно малых моментов времени  $\tau$ , что означает реализацию отрыва в точке  $t_0$ . Таким образом, совокупность условий (8) и (10):

$$r_{t_0}^{(0)}(0) = 0, r_{t_0}^{(1)}(0) = 0, \dots, r_{t_0}^{(k_0-1)}(0) = 0, r_{t_0}^{(k_0)}(0) > 0 \quad (12)$$

представляет собой достаточные условия отрыва в точке  $t_0$ .

Верно и обратное. Если в точке  $t_0$  реализуется отрыв, то следует ожидать, что найдется такое  $k_0$ , что выполнены условия (12); доказательство от противного.

Условия (12) могут быть преобразованы в условия на изображения обобщенных функций зазора. Пусть  $R_{t_0}(p)$  – изображение обобщенной функции зазора. Общий вид ряда Лорана в окрестности бесконечной точки  $p=\infty$  имеет представление:

$$R_{t_0}(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{p^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n p^n. \quad (13)$$

Коэффициент  $(-c_{-1})$  представляет собой вычет функции  $R_{t_0}$  относительно бесконечно удаленной точки  $p=\infty$  [14]. Изображение  $R_{t_0}$  совпадает с изображением ряда Тейлора обобщенной функции зазора(7):

$$R_{t_0}(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_{t_0}^{(n)}(0)}{p^{n+1}}. \quad (14)$$

Коэффициенты  $r_{t_0}^{(0)}(0), r_{t_0}^{(1)}(0), \dots, r_{t_0}^{(k_0-1)}(0), r_{t_0}^{(k_0)}(0)$  могут быть выражены с помощью вычетов функций  $R_{t_0} p^0, R_{t_0} p^1, \dots, R_{t_0} p^{k_0}$  относительно бесконечно-удаленной точки  $p=\infty$ :

$$\begin{cases} r_{t_0}^{(0)}(0) = -\text{Res}_{p=\infty} R_{t_0} p^0; \\ r_{t_0}^{(1)}(0) = -\text{Res}_{p=\infty} R_{t_0} p^1; \\ \dots \\ r_{t_0}^{(k_0-1)}(0) = -\text{Res}_{p=\infty} R_{t_0} p^{k_0-1}; \\ r_{t_0}^{(k_0)}(0) = -\text{Res}_{p=\infty} R_{t_0} p^{k_0-1}. \end{cases} \quad (15)$$

Условия (12) с учетом (15) принимают вид

$$\begin{cases} \operatorname{Res}_{p=\infty} R_{t_0} p^0 = 0; \\ \operatorname{Res}_{p=\infty} R_{t_0} p^1 = 0; \\ \dots \\ \operatorname{Res}_{p=\infty} R_{t_0} p^{k_0-1} = 0; \\ \operatorname{Res}_{p=\infty} R_{t_0} p^{k_0-1} < 0. \end{cases} \quad (16)$$

Система (16) представляет собой необходимые и достаточные условия отрыва в точке  $t_0$  в терминах изображений. Теорема доказана.

**IV. Условия нарушения контакта с учетом порядка отрыва.** Изображение обобщенной функции зазора имеет вид

$$\begin{aligned} R_{t_0}(p) = & \left( (\omega^2 - \omega_0^2) A \sin(\omega t_0) - \frac{\omega b}{L+m} A \cos(\omega t_0) - \frac{gm+Q}{L+m} \right) \frac{1}{p^3} + \\ & + \left( \omega \left( \omega^2 - \frac{k}{L+m} + \frac{b^2}{(L+m)^2} \right) \cos(\omega t_0) + \frac{bk}{(L+m)^2} \sin(\omega t_0) + \frac{b(gm+Q)}{(L+m)^2 A} \right) \frac{1}{p^4} + O\left(\frac{1}{p^5}\right). \end{aligned} \quad (17)$$

Условия отрыва 2-ого порядка имеют вид

$$(\omega^2 - \omega_0^2) A \sin(\omega t_0) - \frac{\omega b}{L+m} A \cos(\omega t_0) > \frac{gm+Q}{L+m}. \quad (18)$$

Условия отрыва 3-его порядка имеют вид системы условий:

$$\begin{cases} \left( \omega^2 - \frac{k}{L+m} \right) \sin(\omega t_0) - \frac{\omega b}{L+m} \cos(\omega t_0) = \frac{gm+Q}{A(L+m)}; \\ \omega \left( \omega^2 - \frac{k}{L+m} + \frac{b^2}{(L+m)^2} \right) \cos(\omega t_0) + \frac{bk}{(L+m)^2} \sin(\omega t_0) > -\frac{b(gm+Q)}{(L+m)^2 A}. \end{cases} \quad (19)$$

Далее предполагается, что силы трения и массоинерционный коэффициент устройства для преобразования пренебрежимо малы ( $b=0, L=0$ ).

**V. Отрыв с учетом неудерживающих связей в условиях упругих взаимодействий, сил веса и постоянных дополнительных сил.** Изображение свободного движения твердого тела на основе начальных условий, заданных формой колебания поверхности, имеет вид

$$Y_{t_0} = \frac{p}{p^2 + \omega_0^2} y_{t_0}(0) + \frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2} \frac{\dot{y}_{t_0}(0)}{\omega_0} - \frac{a}{\omega_0^2} \frac{1}{p} + \frac{a}{\omega_0^2} \frac{p}{(p^2 + \omega_0^2)}, \quad (20)$$

где  $a = g + Q/m$  – параметр постоянных сил, характеризующий предварительное поджатие  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  – частота свободных колебаний без учета связей со стороны вибрирующей поверхности (рис. 1).

**1.** Условия отрыва 2-ого порядка. Оригинал  $y_{t_0}(\tau) \div Y_{t_0}(p)$  решения (20) имеет вид

$$y_{t_0}(\tau) = A \sin(\omega t_0) \cos(\omega_0 \tau) + \frac{\omega}{\omega_0} A \cos(\omega t_0) \sin(\omega_0 \tau) - \frac{a}{\omega_0^2} + \frac{a}{\omega_0^2} \cos(\omega_0 \tau). \quad (21)$$

Условия отрыва 2-ого порядка (18) в предположении  $b=0, L=0$  принимает вид:

$$(\omega^2 - \omega_0^2) A \sin(\omega t_0) > a. \quad (22)$$

Если реализуется положительное поджатие  $a > 0$  и частота колебания опорной поверхности достаточно мала  $\omega < \omega_0$ , то условия (22) принимают вид

$$\sin(\omega t_0) < \frac{a}{(\omega^2 - \omega_0^2) A} < 0. \quad (23)$$

Если же  $\omega > \omega_0$ , то условия (22) принимают вид

$$\sin(\omega t_0) > \frac{a}{(\omega^2 - \omega_0^2)A} > 0. \quad (24)$$

Разнообразие форм движения твердого тела из точек отрыва 2-ого порядка определяется характером поджатия  $a$  и соотношения частот  $\omega - \omega_0$  (рис. 2).

В зависимости от параметра поджатия  $a$  и соотношения частот  $\omega_1, \omega_0$  изменяется фаза отрыва 2-ого порядка, принимая значения в I, II, III или IV четвертях периода  $[0..2\pi]$  (табл. 1).

Определяющим фактором отрыва служит критический уровень  $a/((\omega^2 - \omega_0^2)A)$ , принимающий в общем случае положительные и отрицательные значения.

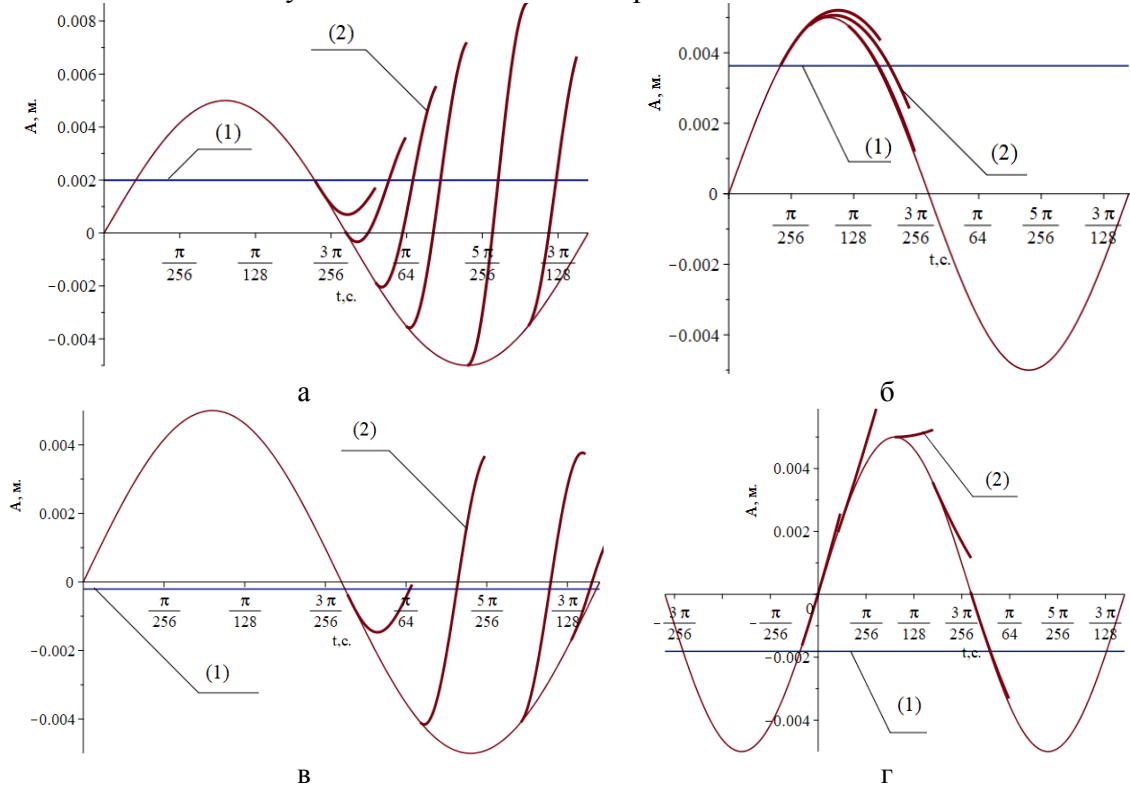


Рис. 2. Фазы отрывов 2-ого порядка в зависимости от соотношения частот  $\omega_1 \omega_0$  и параметра поджатия  $a$ : а –  $a > 0, \omega < \omega_0$ ; б –  $a > 0, \omega > \omega_0$ ; в –  $a < 0, \omega < \omega_0$ ; г –  $a < 0, \omega > \omega_0$ ; 1 – критический уровень отрыва  $a/((\omega^2 - \omega_0^2)A)$ , 2 – движение с отрывом точек, искусственно помещенных на поверхность

Табл. 1. Фазы отрыва 2-ого порядка

	$\omega < \omega_0$	$\omega = \omega_0$	$\omega > \omega_0$
$a > 0$	I, II, III, IV	н/д	I, II
$a = 0$	III, IV	н/д	I, II
$a < 0$	III, IV	I, II, III, IV	I, II, III, IV

2. Условия отрыва 3-го порядка. Множество параметров, удовлетворяющих условиям отрыва 3-ого порядка, определяется системой

$$\begin{cases} (\omega^2 - \omega_0^2)A \sin(\omega t_0) = a; \\ (\omega^2 - \omega_0^2) \cos(\omega t_0) > 0. \end{cases} \quad (25)$$

Условия (25) определяют фазу отрыва в зависимости от соотношения частот  $\omega, \omega_0$  и параметра поджатия  $a = g + Q/m$ .

Если  $a > 0$  и  $\omega < \omega_0$ , то реализуется отрыв в 3-ей четверти:

$$\begin{cases} \sin(\omega t_0) = \frac{a}{(\omega^2 - \omega_0^2)A} < 0; \\ \cos(\omega t_0) < 0. \end{cases} \quad (26)$$

Если  $a > 0$  и  $\omega > \omega_0$ , то реализуется отрыв в 1-ей четверти:

$$\begin{cases} \sin(\omega t_0) = \frac{a}{(\omega^2 - \omega_0^2)A} > 0; \\ \cos(\omega t_0) > 0. \end{cases} \quad (27)$$

Если  $\omega = \omega_0$ , то форма движения имеет вид

$$y_{t_0}(\tau) = A \sin(\omega_0(t_0 + \tau)) - \frac{a}{\omega_0^2} + \frac{a}{\omega_0^2} \cos(\omega_0 \tau). \quad (28)$$

С учетом (28) для обобщенной функции зазора выполнены условия неположительности:

$$r_{t_0}(\tau) = y_{t_0}(\tau) - h_{t_0}(\tau) = \frac{a}{\omega_0^2} (\cos(\omega_0 \tau) - 1) \leq 0. \quad (30)$$

Выражение (30) исключает возможность реализации зазора.

Изменение параметра поджатия на отрицательное значение изменяет фазы отрыва (табл. 2). Существенной особенностью, оказывающей влияние на фазу отрыва, являются постоянные силы и частотные характеристики.

Табл. 2. Фазы отрыва 3-ого порядка

	$\omega < \omega_0$	$\omega = \omega_0$	$\omega > \omega_0$
$a > 0$	II	н/д	I
$a = 0$	н/д	н/д	н/д
$a < 0$	III	н/д	IV

**VI. Амплитудно-частотные области режимов движения с подбрасыванием.** Область частот и амплитуд, обеспечивающих возможности отрыва третьего порядка, определяется на основе неравенства:

$$\frac{|a|}{A|\omega^2 - \omega_0^2|} < 1. \quad (30)$$

График функции частоты колебаний поверхности:

$$A(\omega) = \frac{|a|}{|\omega^2 - \omega_0^2|}, \quad (31)$$

определенной на основе условий (27), разбивает плоскость параметров  $(A, \omega)$  на области, в которых возможен отрыв (рис. 3).

Границы области параметров, допускающих отрыв, определяются на основе безразмерных параметров:

$$\alpha = \omega/\omega_0; \quad \gamma = A/A_0, \quad (32)$$

где  $A_0 = a/\omega_0^2$  – связь сил поджатия с частотой свободных колебаний.

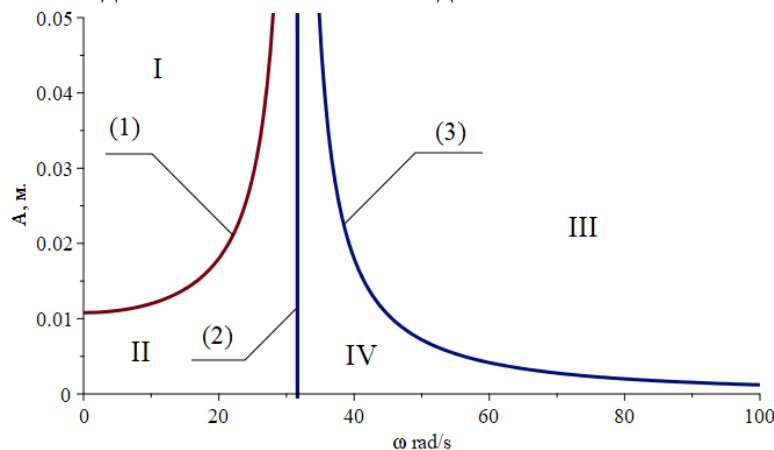


Рис. 3. Области отрыва. I, III – области отрыва

С помощью параметров  $\alpha$  и  $\gamma$  условия отрыва 2-ого и 3-его порядков могут быть представлены в виде

$$\begin{cases} \sin(\varphi_0) = \frac{1}{\gamma(\alpha^2 - 1)}; \\ (\alpha^2 - 1)\cos(\varphi_0) > 0, \end{cases} \quad (33)$$

где  $\varphi_0$  – фаза отрыва.

В переменных  $\alpha$  и  $\gamma$  области отрыва могут быть представлены с помощью графика функции

$$\gamma = \pm \frac{1}{(\alpha^2 - 1)}. \quad (34)$$

Интерес представляют режимы с кратным подбрасыванием.

**V. Режимы кратного подбрасывания.** Условия формирования кратного подбрасывания определяются выражением [15]

$$y_{t_0}(0) = y_{t_0}(2\pi k_0 / \omega), \quad (35)$$

где  $k_0$  – кратность подбрасывания.

Детализация условий кратного подбрасывания (35) приводит к соотношению

$$A \sin(\omega t_0) \cos\left(2\pi k_0 \frac{\omega_0}{\omega}\right) + \frac{\omega}{\omega_0} A \cos(\omega t_0) \sin\left(2\pi k_0 \frac{\omega_0}{\omega}\right) - \frac{a}{\omega_0^2} + \frac{a}{\omega_0^2} \cos\left(2\pi k_0 \frac{\omega_0}{\omega}\right) = A \sin(\omega t_0). \quad (36)$$

Выражение (37) с учетом введения сокращений:

$$S_1 = \sin(\omega t_0), \quad C_1 = \cos(\omega t_0), \quad S_2(k_0) = \sin\left(2\pi k_0 \frac{\omega_0}{\omega}\right), \quad C_2(k_0) = \cos\left(2\pi k_0 \frac{\omega_0}{\omega}\right), \quad (37)$$

$$\alpha = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad \gamma = \frac{A}{A_0}, \quad A_0 = \frac{a}{\omega_0^2}, \quad a > 0 \quad (38)$$

может быть приведено к виду

$$(\alpha\gamma)^2 \frac{1 - S_1^2}{(1 + \gamma S_1)^2} = \frac{1 - C_2(k_0)}{1 + C_2(k_0)}, \quad (39)$$

где  $C_2(k_0)$  – рассматривается как функция независимого параметра кратности  $k_0$ .

1. Для определения фазы отрыва 2-го порядка, обеспечивающего режим заданного кратного подбрасывания  $k_0$ , выражение (39) может быть приведено к квадратному уравнению относительно  $S_1$ :

$$S_1^2 + \frac{2\gamma\beta(k_0)}{\beta(k_0)\gamma^2 + 1} S_1 + \frac{\beta(k_0) - 1}{\beta^2(k_0) + 1} = 0, \quad (40)$$

где  $\beta(k_0) = \frac{1}{(\alpha\gamma)^2} \cdot \frac{1 - C_2(k_0)}{1 + C_2(k_0)}$  – вспомогательная функция.

Из квадратного уравнения (40) может быть найдена величина  $S_1$ , удовлетворяющая условию отрыва 2-ого порядка:

$$S_1 > \frac{1}{\gamma(\alpha^2 - 1)}, \quad (41)$$

в виде 
$$S_1(k_0) = \frac{-\beta(k_0)\gamma + \sqrt{\beta(k_0)\gamma^2 - \beta(k_0) + 1}}{\beta(k_0)\gamma^2 + 1}. \quad (42)$$

Соответствующие фазы и момент отрыва 2-ого порядка, обеспечивающие режим кратного подбрасывания, находятся на основе выражений:

$$\varphi(k_0) = \arcsin(S_1(k_0)); \quad t_0(k_0) = \frac{\arcsin(S_1(k_0))}{\alpha\omega_0}. \quad (43)$$

Наравне с функцией, сопоставляющей фиксированной кратности момент отрыва, может быть рассмотрена функция, ставящая в соответствие моменту или фазе отрыва кратность:



$$k_0(t_0) = \frac{\alpha}{2\pi} \arccos \lambda(t_0), \quad (44)$$

где  $\lambda(t_0) = (\alpha\gamma)^2 \frac{1 - (S_1(t_0))^2}{(1 + \gamma S_1(t_0))^2}$  – вспомогательная функция, а  $S_1(t_0) = \sin(\omega t_0)$  рассматривается в интервале времени  $t_0$ , для которых реализуется отрыв 2-го порядка, в виде

$$t_0 \in \left( \frac{1}{\omega} \arcsin \left( \frac{1}{\gamma(\lambda^2 - 1)} \right), \frac{\pi}{2\omega} \right). \quad (45)$$

На рисунке 4 представлен график кратности, как функции фазы или момента отрыва. Абсциссы точек пересечения функции  $k_0(t_0)$  (рис. 4, линия 1) с натуральными числами  $k_0=1, \dots, 4$  определяют моменты времени, в которых реализуются отрывы 2-го порядка с подбрасываниями кратности  $k_0$ .

Каждому моменту времени, определенному из  $k_0(t_0)=k_0$  соответствует форма отрыва с кратным подбрасыванием. На рисунке 5 представлены формы движения с подбрасыванием кратности  $k=1, 2, 3, 4$  (рис. 5, линии 1, 2, 3, 4) с отрывом 2-го порядка.

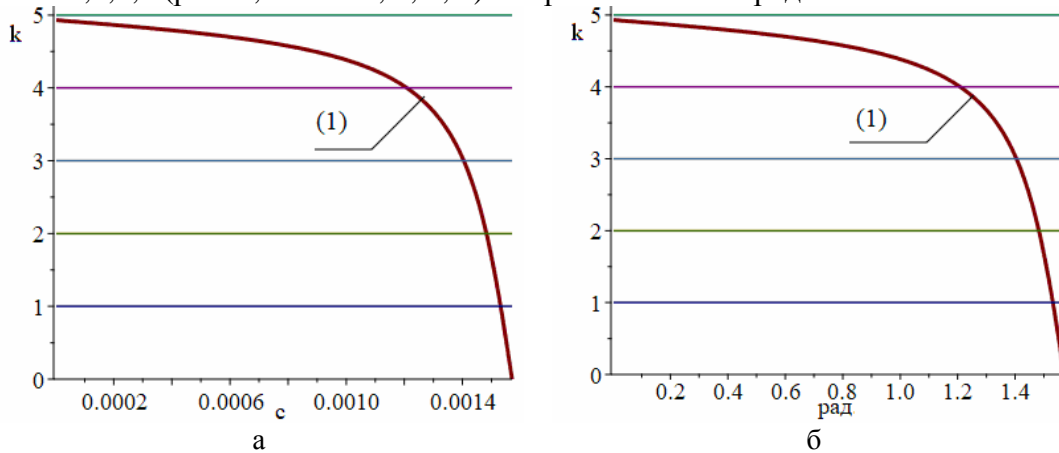


Рис. 4. Отрыв частицы с заданной кратностью: а – моменты отрыва, б – фазы отрыва:  
1 – график функции  $k_0(t_0)$ ,  $k_0(\varphi_0)$

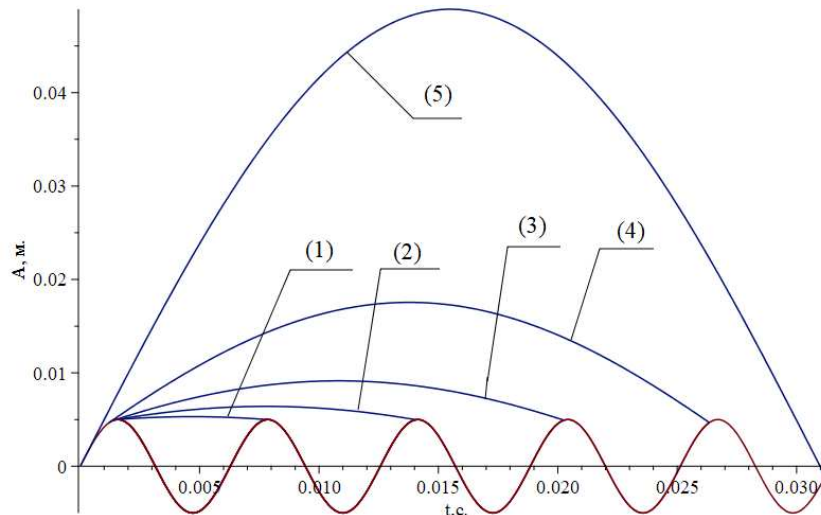


Рис. 5.  $A=0,005$  м;  $k=10000$  Н/м;  $m=1$  кг;  $\omega_0=100$  рад/с;  $\omega=1000$  рад/с;  $Q=1$  Н;  $a=10,8$  м/с<sup>2</sup>;  $A_0=0,00108$  м;  
 $\gamma = 4,629$ ;  $\alpha = 10$

Вместе с тем, движение с отрывом 3-го порядка (рис. 5, линия 5) не реализуется для произвольного сочетания параметров  $\alpha$ ,  $\gamma$ .

**2.** Построение отрыва третьего порядка предполагает учет дополнительных условий

$$\sin(\omega t_0) = \frac{a}{A(\omega^2 - \omega_0^2)}; \quad (\omega^2 - \omega_0^2) \cos(\omega t_0) > 0. \quad (46)$$

Подстановка условий (46) реализации отрыва 3-его порядка в уравнение

$$(\alpha\gamma)^2 \frac{1 - S_1^2}{(1 + \gamma S_1)^2} = \frac{1 - C_2(k_0)}{1 + C_2(k_0)} \quad (47)$$

приводит к выражению

$$C_2(k_0) = \frac{\alpha^2 - \gamma^2(\alpha^2 - 1)^2 + 1}{\alpha^2 + \gamma^2(\alpha^2 - 1)^2 - 1}. \quad (48)$$

Обращение функции (48) позволяет рассматривать кратность в зависимости от параметров системы  $\alpha$ ,  $\gamma$ :

$$k_0(\alpha, \gamma) = \frac{\alpha}{2\pi} \arccos \left( \frac{\alpha^2 - \gamma^2(\alpha^2 - 1)^2 + 1}{\alpha^2 + \gamma^2(\alpha^2 - 1)^2 - 1} \right). \quad (49)$$

На рисунке 6 представлены графики изменения функции кратности в зависимости от коэффициента  $\gamma$  для фиксированных значений  $\alpha$  (рис. 6,а) и графики изменения кратности в зависимости от коэффициента  $\alpha$  для фиксированных значений  $\gamma$  (рис. 6,б).

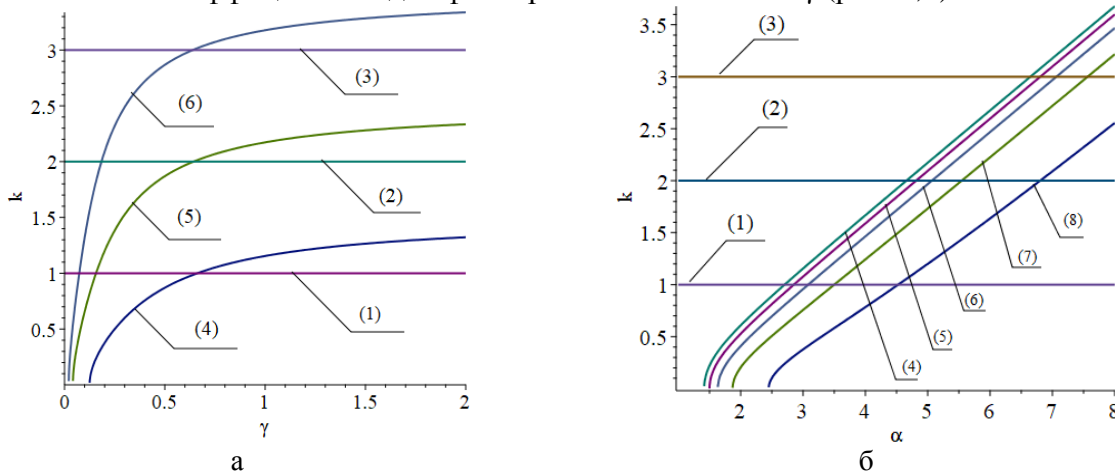


Рис.6. Графики функции кратности  $k_0(\alpha, \gamma)$ : а –  $\alpha=1..8$ , шаг 2,  $\gamma=0..2$ , 1,2,3 – значения кратности, 4,5,6 – ветви функции кратности в зависимости от  $\gamma$  для фиксированных значений параметра  $\alpha$ ; б –  $\gamma=0..1$ , шаг 0.2,  $\alpha=1..8$ , 1,2,3 – значения кратности, 4,5,6,7,8 – ветви функции кратности в зависимости от  $\alpha$  для фиксированных значений параметра  $\gamma$

Множество параметров системы, обеспечивающих заданную кратность, могут быть найдены на основе преобразования выражения

$$C_2(k_0) = \frac{\alpha^2 - \gamma^2(\alpha^2 - 1)^2 + 1}{\alpha^2 + \gamma^2(\alpha^2 - 1)^2 - 1} \quad (50)$$

к виду

$$\gamma^2 = \frac{\alpha^2 + 1 - \cos\left(\frac{2\pi k_0}{\alpha}\right)(\alpha^2 - 1)}{(\alpha^2 - 1)^2 \left( \cos\left(\frac{2\pi k_0}{\alpha}\right) + 1 \right)}. \quad (51)$$

Характеристика  $\gamma$ , рассматриваемая как функция кратности  $k_0$  и параметра  $\alpha$ , имеет вид

$$\gamma(\alpha) = \sqrt{\frac{\alpha^2 + 1 - \cos\left(\frac{2\pi k_0}{\alpha}\right)(\alpha^2 - 1)}{(\alpha^2 - 1)^2 \left( \cos\left(\frac{2\pi k_0}{\alpha}\right) + 1 \right)}}, \quad (52)$$

где  $\alpha > 2k_0$ , и определяет для каждого параметра  $\alpha$  значение параметра  $\gamma$ , обеспечивающего режим отрыва 3-его порядка с подбрасыванием заданной кратности  $k_0$ .

На рисунке 7 (линии 1, 2, 3, 4, 5) представлены множества параметров  $(\alpha, \gamma)$ , которые обеспечивают режимы подбрасывания с заданной кратностью.

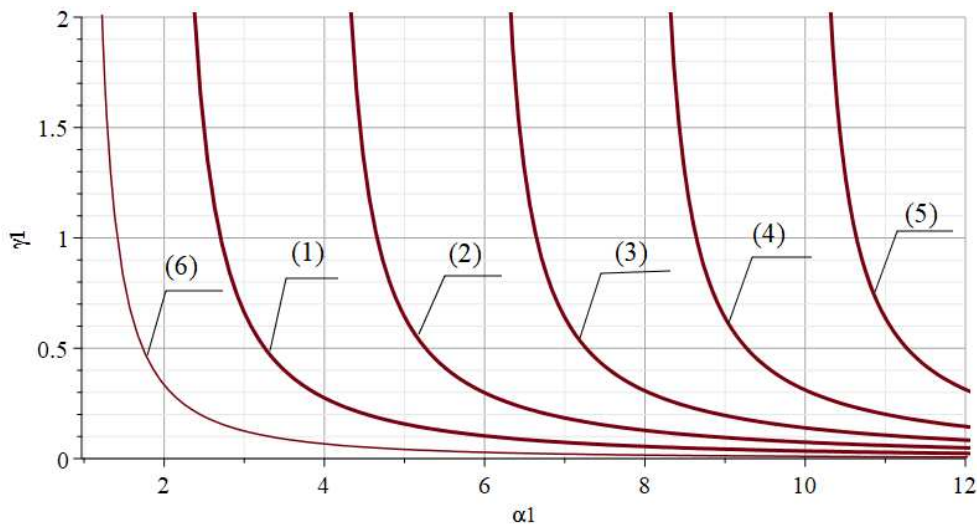


Рис. 7. Множества параметров  $\alpha$ ,  $\gamma$  обеспечивающих режим с кратным подбрасыванием их точек отрыва третьего порядка: 1,2,3,4,5 – соответственно кратность 1,2,3,4,5; 6 – граница области параметров, обеспечивающих отрыв.

На рисунке 8 представлено движение с отрывом кратности 5 из точки отрыва 3-его порядка; параметры  $\alpha$ ,  $\gamma$  удовлетворяют условию (48) кратного подбрасывания из точки отрыва 3-его порядка.

Выбор параметров, обеспечивающих заданную кратность подбрасывания, позволяет реализовывать режимы с периодическим подбрасыванием, для которых период полета частицы кратен периоду колебания опорной поверхности (рис. 9).

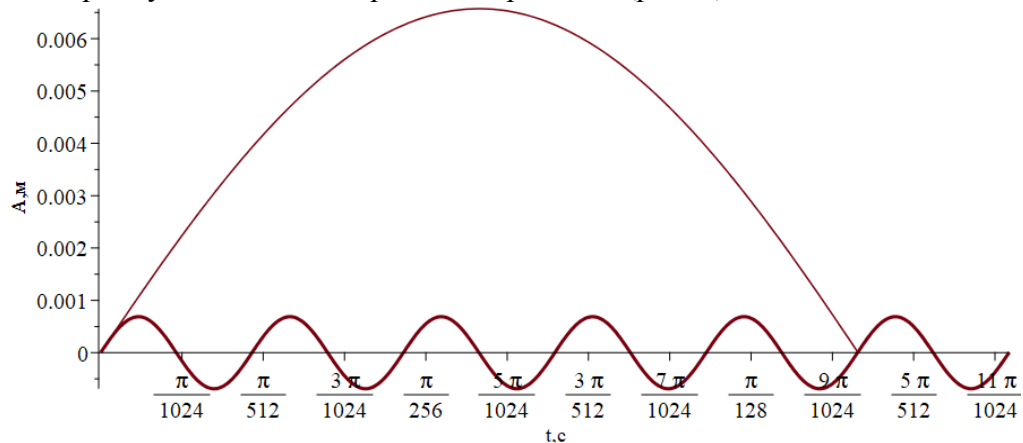


Рис. 8.  $A=0,00069$  м;  $k=10000$  Н/м;  $m=1$  кг;  $\omega_0=100$  рад/с;  $\omega=1100$  рад/с;  $Q=1$  Н;  $a=10,8$  м/с<sup>2</sup>;  $A_0=0,00108$  м;  $\gamma=0,637$ ,  $\alpha=11$

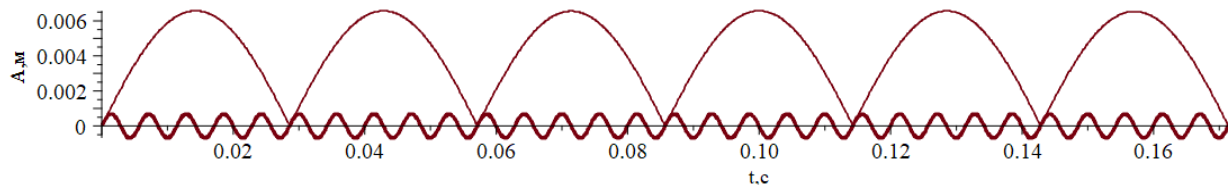


Рис. 9. Режим подбрасывания с кратностью 5 с отрывом третьего порядка:  $A=0,00069$  м;  $k=10000$  Н/м;  $m=1$  кг;  $\omega_0=100$  рад/с;  $\omega=610$  рад/с;  $Q=9,8$  Н;  $a=10,8$  м/с<sup>2</sup>;  $\alpha=11$ ;  $\gamma=0,637$ ;  $A_0=0,00108$  м

Разложение в ряд функции кратности  $k_0(\alpha)$  по степеням параметра  $\alpha$  относительно бесконечно удаленной точки приводит к выражению

$$k_0(\alpha) = \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{\pi\gamma} - \frac{3A_0\gamma^3 - 1}{3A_0\gamma^3\alpha^2\pi} + O\left(\frac{1}{\alpha^4}\right), \alpha \rightarrow \infty. \quad (53)$$

В свою очередь, необходимое для реализации кратного подбрасывания, отношение амплитуд  $\gamma$  в зависимости от возрастающего коэффициента  $\alpha$  оценивается выражением

$$\gamma = \frac{\sqrt{1 + \pi^2 k_0^2}}{\alpha^2} + O\left(\frac{1}{\alpha^4}\right), \alpha \rightarrow \infty. \quad (54)$$

Оценка высоты подлета частицы над средним уровнем колебания опорной поверхности оценивается на основе выражения

$$H(\alpha) = A_0(\alpha\gamma - 1) + O\left(\frac{1}{\alpha}\right), \alpha \rightarrow \infty. \quad (55)$$

Данные отношения позволяют оценить в общих чертах основные характеристики периодических режимов с кратным подбрасыванием в зависимости от безразмерных амплитудно-частотных параметров системы.

**Заключение.** На основе разработанного метода решения задач с подбрасыванием с учетом упругих взаимодействий и постоянных сил могут быть сделаны следующие выводы.

1. Для определения фазы отрыва материальной частицы от поверхности сформулирован обобщенный критерий отрыва в виде двух эквивалентных утверждений: в терминах производных от оригиналов функции обобщенного зазора и в терминах вычетов от изображений производных обобщенных функций зазора.

2. Показано, что оценка свойств режимов подбрасывания с учетом упругих взаимодействий и постоянных сил может быть произведена на основе двух ключевых безразмерных характеристик: отношения частоты колебания опорной поверхности к частоте свободных колебаний механической системы и специального амплитудного параметра.

3. Показано, что в системе с неударяющими связями, изменение относительного расположения частоты колебания опорной поверхности относительно частоты свободных колебаний системы является ключевым фактором в формировании вибрационных эффектов, проявляющихся в формировании периодических режимов взаимодействий с учетом неударяющих связей, включая эффект формирования зазора.

#### Список литературы

1. Лурье А.И. Аналитическая механика. – М.: ГИФМЛ, 1961. – 824 с.
2. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики: в 2 т. Т. 2. Динамика. – М.: Наука, 1983. – 640 с.
3. Артоболевский И.И. Теория механизмов и машин. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 640 с.
4. Блехман И.И., Джанелидзе Г.Ю. Вибрационное перемещение. – М.: Наука, 1964. – 410 с.
5. Бансявичюс Р.Ю., Рагульскис К.М. Вибродвигатели. – Вильнюс: Моклас, 1981. – 193 с.
6. Елисеев С.В., Марков К.К. Безотрывное перемещение частицы по вибрирующему решетку при действии сил сухого и вязкого трения // Исследования по механике деформируемых сред: межвуз. сб. ст. – Иркутск: Иркут. политехн. ин-т, 1976. – С. 189-195.
7. Елисеев С.В., Марков К.К. Некоторые вопросы динамики колебательного процесса при неударяющих связях // Механика и процессы управления. – Иркутск: ИПИ, 1971. – С. 71-83.
8. Елисеев С.В., Лоткин О.И. Условия существования и нарушения контакта для систем с неударяющими связями // Труды ОМИИТа. – 1966. – Вып. 69. – С. 93-99.
9. Ситов И.С., Елисеев А.В. Теоретические основы процессов взаимодействия материальной частицы с вибрирующей поверхностью с неударяющими связями // Системы. Методы. Технологии. – 2012. – № 4. – С. 19-29.
10. Елисеев С.В., Елисеев А.В. Обобщенные подходы в задачах определения контактных реакций в твердых телах при статических нагрузках с учетом неударяющих связей // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – 2013. – № 4. – С. 51-60.
11. Елисеев С.В., Елисеев А.В. Определение контактных реакций в составных твердых телах при динамических нагрузках с учетом неударяющих связей // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – 2014. – № 1. – С. 45-54.
12. Елисеев А.В., Сельвинский В.В., Елисеев С.В. Динамика вибрационных взаимодействий элементов технологических систем с учетом неударяющих связей. – Новосибирск: Наука, 2015. – 332 с.
13. Louis Gagnon, Marco Morandini, Gian Luca Ghiringhelli. A review of particle damping modeling and testing // Journal of Sound and Vibration. 2019, vol. 459, p. 114865. doi.org/10.1016/j.jsv.2019.114865.
14. Bronshtein, I.N., Semendyayev, K.A., Musiol, G., Mühlig, H. Function Theory // Handbook of Mathematics. – Springer, Berlin, Heidelberg, 2015. – P. 731-766. – doi.org/10.1007/978-3-662-46221-8\_14.
15. Елисеев С.В., Елисеев А.В., Кашуба В.Б. Особенности оценки зазора в модельной задаче подбрасывания материальной частицы с неударяющими связями // Машиностроение и безопасность жизнедеятельности. – 2013. – № 1. – С. 50-56.

## References

1. Lurie A.I. Analytical mechanics. – M.: GIFML, 1961. – 824 p.
2. Loitsyansky L.G., Lurie A.I. Course of theoretical mechanics: in 2 v. Vol. 2. Dynamics. – M.: Science, 1983. – 640 p.
3. Artobolevsky I.I. Theory of mechanisms and machines. – M.: Science. Main ed. of phys.-mat. lit., 1988. – 640 p.
4. Blekhman I.I., Dzhanelidze G.Yu. Vibrational displacement. – M.: Science, 1964. – 410 p.
5. Bansevicius R.Yu., Ragulskis K.M. Vibration motors. – Vilnius: Mokslas, 1981. – 193 p.
6. Eliseev S.V., Markov K. K. Continuous movement of a particle through a vibrating sieve under the action of dry and viscous friction forces // Research on the mechanics of deformable media: interuniversity collection of articles. – Irkutsk: Irkut. polytech. in-t, 1976. – P. 189-195.
7. Eliseev S.V., Markov K.K. Some questions of the dynamics of the oscillatory process with unilateral ties // Mechanics and control processes. – Irkutsk: IPI, 1971. – P. 71-83.
8. Eliseev S.V., Lotkin O.I. Conditions of existence and contact disorders for systems with non-holding connections // Proceedings of OMIIT. 1966, iss. 69, pp. 93-99.
9. Sitov I.S., Eliseev A.V. Theoretical foundations of the processes of interaction of a material particle with a vibrating surface with unilateral ties // Systems. Methods. Technologies. 2012, no. 4, pp. 19-29.
10. Eliseev S.V., Eliseev A.V. Generalized approaches to the problems of determining contact reactions in solids under static loads, taking into account non-holding bonds // Modern technologies. System analysis. Modeling. 2013, no. 4, pp. 51-60.
11. Eliseev S.V., Eliseev A.V. Determination of contact reactions in composite solids under dynamic loads, taking into account unstopable bonds // Modern technologies. System analysis. Modeling. 2014. no. 1, pp. 45-54.
12. Eliseev A.V., Selvinsky V.V., Eliseev S.V. Dynamics of vibrational interactions of elements of technological systems taking into account unstopable connections. – Novosibirsk: Science, 2015. – 332 p.
16. Louis Gagnon, Marco Morandini, Gian Luca Ghiringhelli. A review of particle damping modeling and testing // Journal of Sound and Vibration. 2019, vol. 459, p. 114865. doi.org/10.1016/j.jsv.2019.114865.
13. Bronshtein, I.N., Semendyayev, K.A., Musiol, G., Mühlig, H. Function Theory // Handbook of Mathematics. – Springer, Berlin, Heidelberg, 2015. – P. 731-766. – doi.org/10.1007/978-3-662-46221-8\_14.
14. Eliseev S.V., Eliseev A.V., Kashuba V.B. Features of gap estimation in the model problem of tossing a material particle with unstopable bonds // Mechanical engineering and life safety. 2013, no. 1, pp. 50-56.

### *Сведения об авторах:*

### *Information about authors:*

<b>Елисеев Андрей Владимирович</b> – кандидат технических наук, доцент кафедры математики, ИрГУПС; доцент кафедры конструирования и стандартизации в машиностроении ИрННТУ	<b>Eliseev Andrey Vladimirovich</b> – candidate of technical sciences, associate professor of Department of mathematics of IrSTUniversity; associate professor of the Department of design and standardization in mechanical engineering of IrNRTU
<b>Кузнецов Николай Константинович</b> – доктор технических наук, профессор кафедры конструирования и стандартизации в машиностроении	<b>Kuznetsov Nikolai Konstantinovich</b> - doctor of technical sciences, professor of the Department of engineering and standardization in mechanical engineering
eavsh@ya.ru	

Получена 30.11.2023