

КИНЕМАТИКА И ДИНАМИКА ПАДАЮЩИХ НЕУПРАВЛЯЕМЫХ ТЕЛ

Чернопятова С.А., Кухаренко С.П.

*Военный учебно-научный центр ВВС «Военно-воздушная академия
имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», Воронеж*

Ключевые слова: падающие неуправляемые тела, кинематика, динамика полета, численное моделирование, шаг интегрирования, визуализация параметров, среда программирования, угол тангажа.

Аннотация. В статье представлен алгоритм расчета кинематических параметров движения падающего тела без учета и с учетом влияния силы лобового сопротивления. Алгоритм основан на численном решении задачи динамики полета, обеспечивая расчет необходимых параметров траектории полета. Опорные траектории для координат формируются в вертикальной плоскости. Структура зависимости коэффициента лобового сопротивления от числа Маха представлена параболической функцией. В качестве примера представлены расчетные случаи падения тела с высоты 6000 м с начальной скоростью 700 м/с без учета силы сопротивления и с учетом силы сопротивления. Результаты расчета показали приемлемую точность численного решения, как для кинематических, так и для динамических задач при шаге интегрирования равном 0,005 секунды.

KINEMATICS AND DYNAMICS OF FALLING UNCONTROLLABLE BODIES

Chernopyatova S.A., Kukharensko S.P.

*Military Educational and Scientific Center of the Air Force
«N.E. Zhukovsky and Yu.A. Gagarin Air Force Academy», Voronezh*

Keywords: falling uncontrollable bodies, kinematics, flight dynamics, numerical simulation, integration step, parameter visualization, programming environment, pitch angle.

Abstract. The article presents an algorithm for calculating the kinematic parameters of the motion of a falling body without taking into account and taking into account the influence of the drag force. The algorithm is based on the numerical solution of the flight dynamics problem, providing the calculation of the necessary parameters of the flight trajectory. Reference trajectories for coordinates are formed in the vertical plane. The structure of the dependence of the drag coefficient on the Mach number is represented by a parabolic function. As an example, the calculated cases of a body falling from a height of 6000 m with an initial speed of 700 m/s are presented without taking into account the resistance force and taking into account the resistance force. The calculation results showed an acceptable accuracy of the numerical solution for both kinematic and dynamic problems with an integration step of 0,005 seconds.

Введение. В настоящее время задачи доставки малогабаритных грузов в назначенные районы в том числе с помощью беспилотных летательных аппаратов часто выполняются в горных условиях. При ведении боевых действий активно используются авиация и артиллерия, причем средства поражения зачастую применяются вне видимости цели.

Горные условия создают целый ряд особенностей при стрельбе из артиллерийских систем и боевом применении авиационных средств поражения. Повышение эффективности боевых действий в этих условиях вызывает необходимость проведения предварительного моделирования. В отличие от классических учебников [1], где точка бросания и точка падения находятся на одной плоскости, мы осуществляем постановку задачи для более общего случая, когда точка сброса находится на произвольной высоте. Кроме того, в реальности на падение тела действует еще сила лобового сопротивления.

Великий русский ученый Н.Е. Жуковский отмечал: «Для прицельного бомбометания с летательных аппаратов необходимо всегда учитывать силы взаимодействия падающей бомбы и воздушной атмосферы» [2]. Как она повлияет на кинематические параметры движения тела? Что будет с углом бросания, который обеспечит наибольшую дальность?

Поскольку сила лобового сопротивления сложным образом зависит от скорости, высоты, числа Маха (M) полета и формы тела, аналитическое интегрирование системы

уравнений движения исключается. Решение подобных задач невозможно без применения методов автоматизации громоздких расчетов. Разработка алгоритма решения такой задачи связана с численными методами интегрирования.

Теоретические основы решения поставленной задачи

Наиболее просто решается задача, когда мы не учитываем влияние силы лобового сопротивления. В этом случае движение тела, брошенного под углом к горизонту (рис. 1), в общем случае, без учета силы сопротивления описывается следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + (V_0 \cdot \cos \alpha) \cdot t, \\ y &= y_0 + (V_0 \cdot \sin \alpha) \cdot t - g \cdot \frac{t^2}{2}, \end{aligned} \quad (1)$$

где x , y – координаты тела в вертикальной плоскости в момент времени t ; x_0 , y_0 – координаты тела в начальный момент времени $t = 0$; V_0 – начальная скорость тела; α – угол бросания.

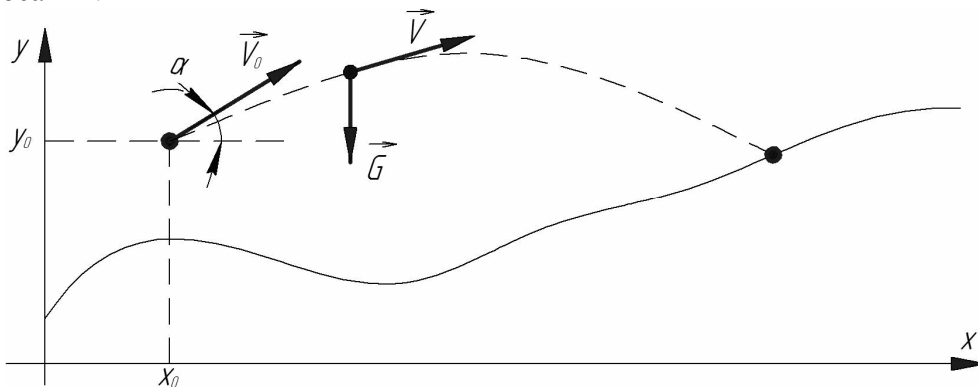


Рис. 1. Схема движения падающих неуправляемых тел в горных условиях

При планировании доставки грузов в назначенные районы со сложным рельефом земной поверхности (при ведении боевых действий с использованием артиллерии и авиации) могут решаться следующие задачи:

- определение дальности (относ тела) при заданных начальных условиях;
- определение начального угла наклона траектории, обеспечивающего наибольшую дальность;
- определение угла наклона траектории и высоты, обеспечивающих заданную дальность, попадание в заданную точку.

Наиболее просто эти три задачи решаются, когда орудие и цель находятся на одной горизонтальной плоскости [1, 3]. Так, дальность полёта тела (A) при заданных начальных условиях определяется по формуле:

$$A = \frac{V_0^2}{g} \cdot \sin 2\alpha, \quad (2)$$

где $g \approx 9,81 \text{ м/с}^2$ – ускорение свободного падения.

Отсюда видно, что наибольшая дальность получается при $\alpha = 45^\circ$. Выражение (2) позволяет решить и третью задачу – определение угла наклона ствола (наклона траектории), обеспечивающего заданную дальность:

$$\sin 2\alpha = g \cdot \frac{A_{зад}}{V_0^2}, \quad (3)$$

где $A_{зад}$ – заданная дальность до цели.

Следует заметить, что перед решением этой задачи следует проверить, не превышает ли заданная дальность до цели максимальную дальность.

Уравнения (1) позволяют найти и основные кинематические характеристики тела (скорость и ускорение) в любой момент времени:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = V_0 \cdot \cos \alpha ; \quad (4)$$

$$V_y = \frac{dy}{dt} = V_0 \cdot \sin \alpha - g \cdot t ; \quad (5)$$

$$W_x = \frac{dV_x}{dt} = 0 ; W_y = \frac{dV_y}{dt} = -g. \quad (6)$$

Сравнительно просто решается задача и для случая, когда тело и цель доставки находятся на одной наклонной плоскости (рис. 2).

Движение тела и в этом случае описывается теми же уравнениями (1). Так как рассматриваемые задачи являются плоскими, то склон горы можно представить в виде прямой, уравнение которой имеет вид:

$$y_1(x) = x \cdot \operatorname{tg} \beta.$$

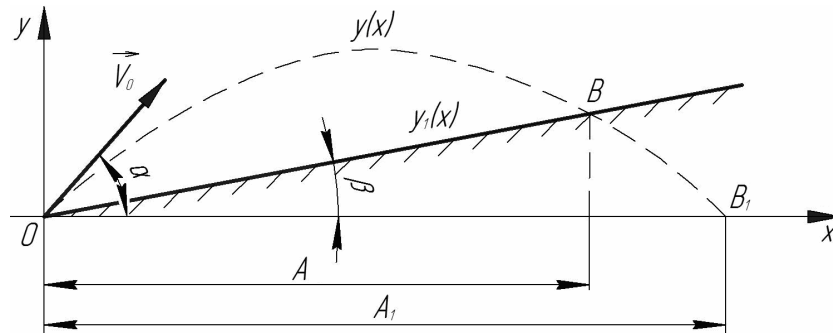


Рис. 2. Движение тела над наклонной плоской поверхностью

В точке встречи с поверхностью $y(x) = y_1(x)$, тогда нетрудно найти:

$$A = \frac{2 \cdot V_0^2 \cdot \cos^2 \alpha}{g} \cdot (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta). \quad (7)$$

Так решается в этом случае первая из перечисленных выше задач.

Из (7) можно получить и выражение для определения начального угла наклона траектории (ствола), обеспечивающего наибольшую дальность:

$$\alpha_{opt} = 45 + \frac{\beta}{2}.$$

Рассмотрим теперь случай, когда тело падает с некоторой высоты на горизонтальную поверхность (рис. 3).

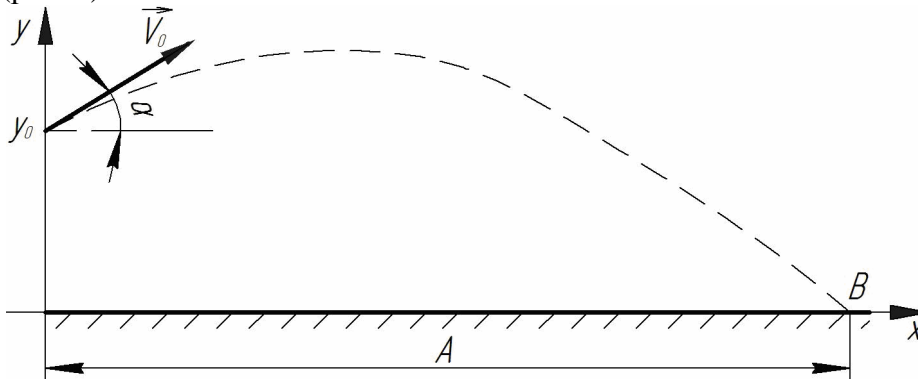


Рис. 3. Превышение точки сброса над целью

Можно показать, что в этом случае дальность полета (относ):

$$A = \frac{(V_0 \cdot \cos \alpha)^2}{g} \left(\operatorname{tg} \alpha + \sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{2 \cdot g \cdot y_0}{(V_0 \cdot \cos \alpha)^2}} \right). \quad (8)$$

Аналитическое определение угла наклона траектории (ствола), обеспечивающего заданную дальность, вызывает определенные затруднения. Можно найти этот угол методом подбора угла α , но это уже требует для решения задачи привлечения ЭВМ.

Если падение тела с некоторой высоты происходит на наклонную плоскость (рис. 4), то в этом случае необходимо совместное решение уравнений:

$$y(x) = y_0 + (tg\alpha) \cdot x - \frac{g}{2(V_0 \cdot \cos\alpha)^2} \cdot x^2; \quad (9)$$

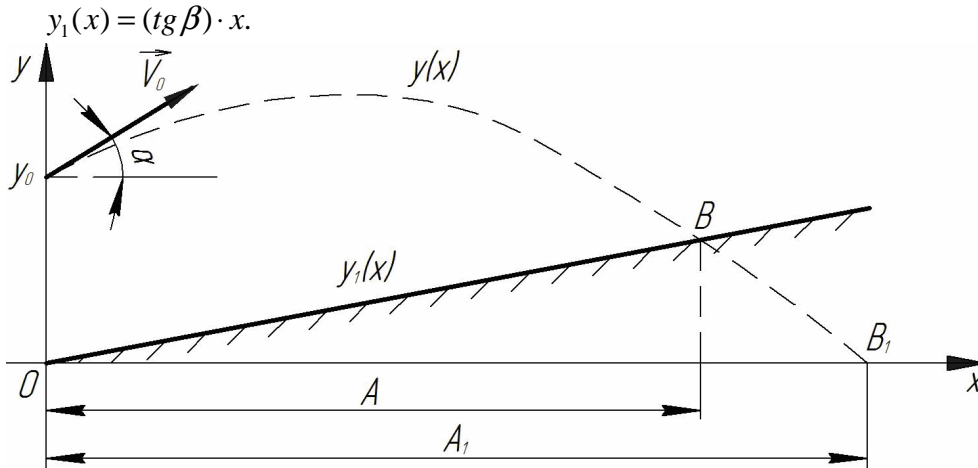


Рис. 4. Падение тела на наклонную плоскость

Если найти дальность падения тела (относ) при заданных начальных условиях еще и в этом случае нетрудно [4, 5], то найти начальный угол наклона траектории, обеспечивающий максимальную дальность или заданную дальность, без привлечения ЭВМ не удастся. Мы приходим к необходимости численного моделирования кинематики падающего тела.

Теперь осуществим постановку задачи для самого общего случая (рис. 5).

Рельеф местности задается с помощью опорных точек (x_i, y_i) , которые снимаются с карты местности.

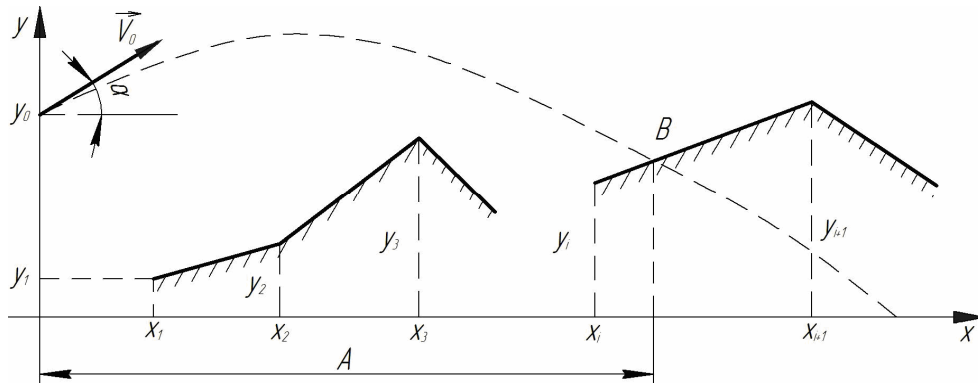


Рис. 5. Схема кинематики падения неуправляемых тел в общем случае

В точке встречи с землей $y(x) = y_i(x)$, где

$$y_i(x) = y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \cdot (x - x_i). \quad (10)$$

Процесс решения задачи сводится к следующему.

Тело начинает движение. На каждом шаге при известной координате x вычисляется $y(x)$ и $y_i(x)$. Если $y(x) > y_i(x)$ процесс расчета (движение тела) продолжается. Если $y(x) \leq y_i(x)$ расчет заканчивается. Последнее рассчитанное значение x и будет искомым дальностью.

Приведенные ранее аналитические зависимости позволяют проверить точность разработанной математической модели, а также проводить исследования зависимости точности численного решения от значения шага интегрирования.

Перейдем теперь к решению общей задачи движения падающего тела с учетом силы сопротивления воздуха.

Расчетная схема динамики движения неуправляемых тел в этом случае, представлена на рисунке 6. Горная местность, как и в предыдущей задаче, задается в виде опорных точек (x_i, y_i) в плоскости движения средства поражения. Задаются начальные условия: координаты (x_0, y_0) , начальная скорость (V_0) и угол наклона траектории α .

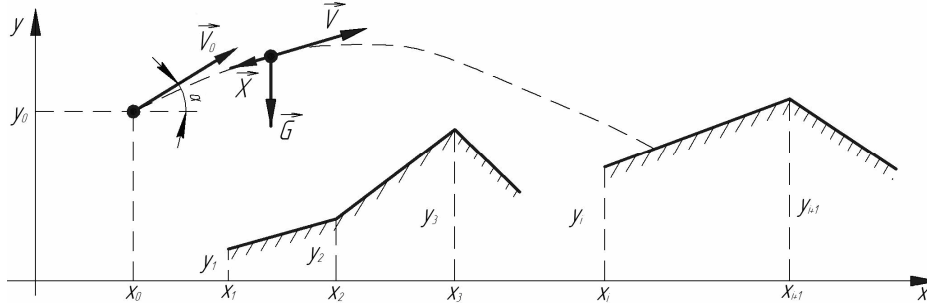


Рис. 6. Расчетная схема динамики движения тел для общего случая

В процессе движения на тело действуют:

– сила тяжести $G = mg$ (m – масса тела; g – ускорение свободного падения);

– сила лобового сопротивления $X = c_x \frac{\rho V^2}{2} S$ (c_x – коэффициент лобового сопротивления; ρ – плотность воздуха; V – скорость; S – характерная площадь падающего тела).

Основные уравнения движения имеют вид [6]:

$$\begin{aligned} \frac{dV_x}{dt} &= -\frac{X}{m} \cos \Theta, \\ \frac{dV_y}{dt} &= -g - \frac{X}{m} \sin \Theta. \end{aligned} \quad (11)$$

Кроме того, используются еще кинематические уравнения связи:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= V \cos \Theta, \\ \frac{dy}{dt} &= V \sin \Theta, \end{aligned} \quad (12)$$

где Θ – угол наклона траектории.

Плотность воздуха зависит от высоты полета (координаты y) и может быть вычислена по приближенной формуле [7]:

$$\rho = \rho_0 \frac{20 - H}{20 + H}, \quad (13)$$

где ρ_0 – массовая плотность воздуха у Земли, равная $1,225 \text{ кг/м}^3$; H – высота полета в километрах.

В процессе численного расчета дифференциал dt заменяется конечным приращением Δt . На каждом шаге численного интегрирования определяются текущие значения координат x и y , и проводится сравнение y с $y_i(x)$, где

$$y_i(x) = y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} (x - x_i). \quad (14)$$

Если $y > y_i(x)$ – расчет продолжается, если $y \leq y_i(x)$ – тело встречается с землей и расчет прекращается.

Расчетная формула для вычисления силы лобового сопротивления зависит от коэффициента лобового сопротивления. В предлагаемой модели коэффициент лобового сопротивления задается в виде таблицы $c_{x0}(M)$.

На каждом шаге интегрирования определяется число M полета:

$$M = V / a, \quad (15)$$

где a – скорость звука на данной высоте (вычисленном значении u).

Скорость звука определяется по известной формуле:

$$a = 20,1\sqrt{T}, \quad (16)$$

где T – абсолютная температура воздуха на данной высоте.

Предполагаем, что характер изменения температуры воздуха соответствует стандартной атмосфере, т.е. до высоты 11000 м

$$T = 288 - 6,5H. \quad (17)$$

После вычисления числа M методом линейной интерполяции или экстраполяции определяется значение c_{x0} .

Если говорить о неуправляемых авиационных бомбах [8], то будем считать, что характер изменения $c_{x0}(M)$ для тел будет иметь один и тот же вид, т.е. графики для различных бомб будут представлять собой эквидистантные кривые:

$$c_{x0}(M) = c_{x0(M \leq 0,4)} \cdot K(M), \quad (18)$$

где $c_{x0(M \leq 0,4)}$ – коэффициент лобового сопротивления бомбы при $M \leq 0,4$ (для дозвуковых скоростей полета); $K(M)$ – параболическая функция, зависящая от M и характеризующая увеличение c_{x0} с изменением числа M полета.

В этом случае получена аппроксимирующая зависимость $K(M)$ в виде полинома второй степени

$$K(M) = 3,226 \cdot M^2 - 2,902 \cdot M + 1,645. \quad (19)$$

При этом погрешность аппроксимации составила 0,01%.

Значение коэффициента лобового сопротивления при $M \leq 0,4$ для различных бомб можно определить по значению их характеристической скорости:

$$V_0 = \sqrt{\frac{2mg_0}{c_{x0} S_m \rho_0}}, \quad (20)$$

где m – масса авиабомбы; g_0 – ускорение свободного падения у поверхности Земли; S_m – площадь миделя; ρ_0 – плотность воздуха у поверхности Земли.

Тогда

$$c_{x0(M \leq 0,4)} = \frac{2 \cdot m \cdot g_0}{\rho_0 \cdot S_m \cdot V_0^2}. \quad (21)$$

Результаты моделирования. Обязательной процедурой численного моделирования любого физического процесса является проверка достоверности получаемых результатов. В данной задаче проводилось сравнение результатов расчета по программе с точными решениями расчета дальности полета снаряда при различных значениях его начальной скорости V_0 и угла наклона траектории α . При этом значение шага интегрирования изменялось от 0,1 с до 0,0001 с.

В качестве оценки точности рассматривалась относительная погрешность численного решения ε , равная

$$\varepsilon = \left| \frac{A_{ч.р.} - A_{т.р.}}{A_{т.р.}} \right| \cdot 100\%, \quad (22)$$

где $A_{ч.р.}$ – численное решение; $A_{т.р.}$ – точное решение.

Пример численных экспериментов для скорости $V_0 = 700$ м/с и различных значениях угла наклона начальной траектории приведен на рисунке 7. Как видно, с уменьшением шага интегрирования относительная ошибка для всех значений начального угла траектории уменьшается, а затем начинает резко увеличиваться. Другими словами, с определенного значения Δt при его дальнейшем уменьшении имеет место процесс расхождения численного решения. Это наблюдается при всех рассмотренных значениях V_0 и α .

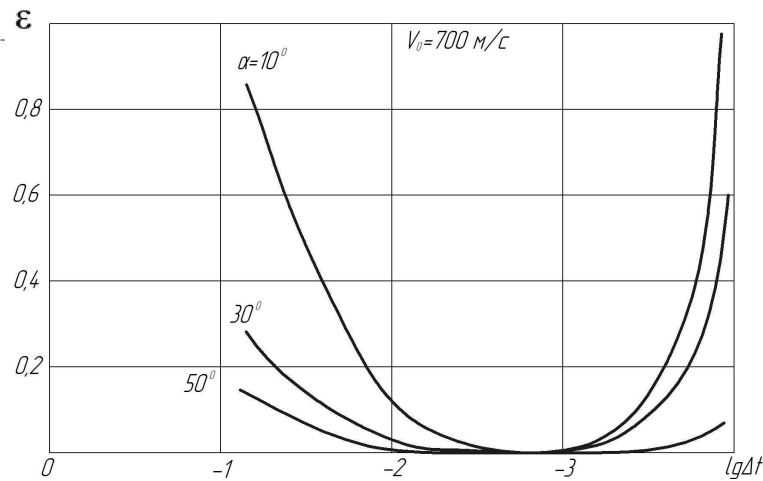


Рис. 7. Зависимость относительной ошибки от шага интегрирования

В соответствии с графиком зависимости $\varepsilon = f(\Delta t)$, представленной на рисунке 7, минимальное значение относительной погрешности численного расчета, равное 0,01%, обеспечивается при шаге интегрирования, равном $\approx 0,005$ с.

В соответствии с предлагаемой математической моделью была разработана компьютерная программа численного расчета кинематических параметров неуправляемых тел в горных условиях с учетом силы лобового сопротивления. Разработка программы осуществлялась в интегрированной среде визуальной разработки приложений C++ Builder 6 [9, 10].

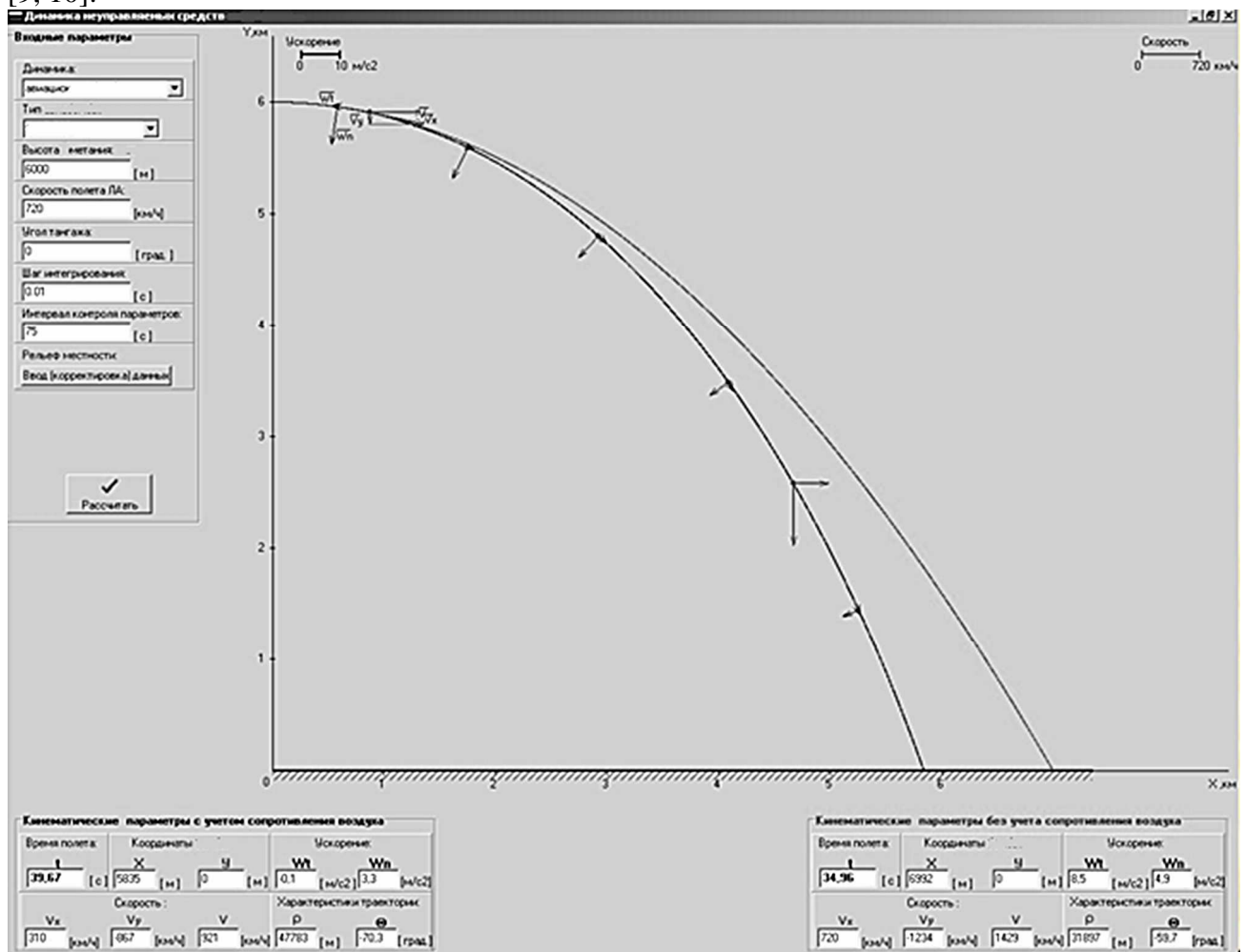


Рис. 8. Рабочее окно программы

Исходные данные вводятся посредством окон редактирования и окон выбора из списков, расположенных на левой панели рабочего окна, имеющей заголовок **Входные параметры**. Рядом с окнами редактирования представлена размерность вводимых величин. В нижней части панели **Входные параметры** имеется подсказка диапазона допустимых значений той величины, окно редактирования которой в данный момент находится в фокусе (т.е. ее значение вводится или редактируется). Диапазон допустимых значений входных параметров выбирался с учетом физического смысла решаемой задачи.

Выбор вида тела осуществляется на панели «Динамика» с помощью выпадающего списка строк.

Основными исходными данными для численного расчета являются: начальная скорость V_0 тела, начальный угол наклона траектории, высота полета летательного аппарата, геометрические характеристики рельефа местности в плоскости движения тела.

Дополнительными входными параметрами являются: шаг интегрирования Δt и интервал времени контроля кинематических параметров ΔT .

Блок вывода числовой информации позволяет фиксировать значения всех кинематических параметров сбрасываемого тела (с учетом и без учета силы лобового сопротивления) как в заданные, так и в конечный моменты времени: его координаты (дальность и высоту полета), скорости, ускорения и характеристики траектории (радиус кривизны ρ и угол наклона траектории θ).

Заключение. Разработанные математическая модель и программный продукт «Теоретическая механика. Практические занятия. Решение задач» [11] позволяют:

– проводить взаимосвязанные лабораторные занятия по кинематике точки и динамике материальной точки дисциплины «Теоретическая механика»;

– осуществлять постановку задач моделирования кинематики и динамики неуправляемых тел для проведения учебно-исследовательских лабораторных занятий в компьютерных классах.

Разработанные программы позволяют осуществлять методические исследования и выполнять с обучаемыми работы учебно-исследовательского характера. Они могут быть использованы в учебном процессе по специальностям, предусматривающим изучение теоретической механики.

Список литературы

1. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики: Учебник для вузов. – 20-е изд., стер. – М.: Высшая школа, 2010. – 416 с.
2. Жуковский Н.Е. Теоретическая механика. – М.: ГИТТЛ, 1952. – 812 с.
3. Вытришко Ф.М., Пастухов И.С. Проблемы баллистического обеспечения применения авиационных бомб // Известия ТулГУ. Технические науки. – 2017. – №11-3. – С. 37-43.
4. Кокотек Э.Г. Влияние начальных условий выстрела на угол наклона ствола, обеспечивающий наибольшую дальность стрельбы // Научные чтения по авиации, посвященные памяти Н.Е. Жуковского (тезисы докладов). – М.: ВАТУ, 2002. – 496 с.
5. Авиация ВВС России и научно-технический прогресс. Боевые комплексы и системы вчера, сегодня, завтра / под ред. Е.А. Федосова. – М.: Дрофа, 2005. – 734 с.
6. Нелюбов А.И., Новад А.А. Динамика полета боевых летательных аппаратов. – М.: ВВИА им. проф. Н.Е. Жуковского, 1992. – 440 с.
7. Краснов Н.Ф. Аэродинамика ракет. – М.: Высшая школа, 1968. – 772 с.
8. Самолет Су-7Б. Техническое описание. Кн. 1. Общие сведения и летно-технические характеристики. – М.: Оборонгиз, 1961. – 221 с.
9. Архангельский А.Я. Программирование в C++ Builder 6. – М.: ЗАО «Изд-во БИНОМ», 2003. – 1152 с.
10. Стародубцев В.А. Компьютерные и мультимедийные технологии в естественно-научном образовании. – Томск: Дельтаплан, 2002. – 224 с.
11. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ №2014616426 РФ. Теоретическая механика. Практические задачи. Решение задач / Э.Г. Кокотек С.П. Кухаренко, Л.А. Великанова, Е.С. Легостаева, Е.А. Лисиченко, С.С. Новикова – Заявл. 29.04.2014; опубл. 20.07.2014.

References

1. Targ S.M. A short course in theoretical mechanics: Textbook for higher education institutions. – 20th ed., erased. – M.: Higher school, 2010. – 416 p.
2. Zhukovsky N.E. Theoretical mechanics. – M.: GITTL, 1952. – 812 p.
3. Vytrishko F.M., Pastukhov I.S. Problems of ballistic support for the use of aircraft bombs // News of Tula State University. Technical science. 2017, no. 11-3, pp. 37-43.
4. Kokotek E.G. Influence of the initial conditions of the shot on the angle of inclination of the barrel, providing the greatest range of fire // Scientific readings on aviation, dedicated to the memory of N.E. Zhukovsky (abstracts). – M.: VATU, 2002. – 496 p.
5. Aviation of the Russian Air Force and scientific and technological progress. Combat complexes and systems yesterday, today, tomorrow / ed. E.A. Fedosova. – M.: Bustard, 2005. – 734 p.
6. Nelyubov A.I., Novad A.A. Flight dynamics of combat aircraft. – M.: VVIA n.a. prof. N.E. Zhukovsky, 1992. – 440 p.
7. Krasnov N.F. Rocket aerodynamics. – M.: Higher School, 1968. – 772 p.
8. Su-7B aircraft. Technical description. Book. 1. General information and flight performance. – M.: Oborongiz, 1961. – 221 c.
9. Arkhangelsky A.Ya. Programming in C ++ Builder 6. – M.: CJSC "Publ. house BINOM", 2003. – 1152 p.
10. Starodubtsev V.A. Computer and multimedia technologies in natural science education. – Tomsk: Hang-glider, 2002. – 224 p.
11. Certificate of registration of the computer program No. 2014616426 RU. Theoretical mechanics. Practical problems. Problem solving: computer program / E.G. Kokotek S.P. Kukharenko, L.A. Velikanova, E.S. Legostaeva, E.A. Lisichenko, S.S. Novikova. – Appl. 04/29/2014; publ. 07/20/2014.

Сведения об авторах:

Information about authors:

Кухаренко Сергей Павлович – кандидат технических наук, профессор кафедры общепрофессиональных дисциплин	Kukharenko Sergey Pavlovich – candidate of technical sciences, professor of the department of general professional disciplines
Чернопятова Светлана Александровна – кандидат технических наук, старший преподаватель кафедры общепрофессиональных дисциплин	Chernopyatova Svetlana Aleksandrovna – candidate of technical sciences, senior lecturer of the department of general professional disciplines
svvetkas@gmail.com	

Получена 30.07.2023