

УРАВНЕНИЯ МАЛЫХ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ РЕЗОНАТОРА В ВИДЕ ТОНКОЙ ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ С УЧЕТОМ НЕЛИНЕЙНОЙ ЖЕСТКОСТИ

*Ниналалов И.Г., Астахов С.В., Сайпулаев Г.Р., Сайпулаев М.Р., Салимов М.С.
Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва*

Ключевые слова: волновой твердотельный гироскоп, динамика оболочки вращения, нелинейная жесткость, свободные колебания резонатора, дрейф гироскопа, прецессия волновой картины колебаний.

Аннотация. В работе исследуются методы повышения точности волнового твердотельного гироскопа интегрирующего типа в виде тонкой оболочки вращения благодаря определению аналитических формул для дрейфа гироскопа, обусловленного нелинейными эффектами. Построена математическая модель колебаний резонатора, учитывающая нелинейную жесткость, и получена формула для дрейфа волнового твердотельного гироскопа на подвижном основании. С использованием метода осреднения Крылова-Боголюбова была исследована нелинейная динамика волнового твердотельного гироскопа в свободных колебаниях полусферического резонатора. Показано, что нелинейная жесткость приводит к дополнительной прецессии волновой картины и изменению фазы колебаний волнового твердотельного гироскопа. С помощью численного примера проведена оценка погрешности гироскопа, возникающей из-за нелинейной жесткости. Делается вывод о необходимости учета нелинейной жесткости при построении методик алгоритмической компенсации погрешности гироскопа.

EQUATIONS OF SMALL VIBRATIONS OF A THIN SHELL OF ROTATION WITH NONLINEAR RIGIDITY OF THE RESONATOR

*Ninalalov I.G., Astakhov S.V., Saypulaev G.R., Saypulaev M.R., Salimov M.S.
National Research University “Moscow Power Engineering Institute”, Moscow*

Keywords: Solid-state gyroscope wave, rotation shell, angular rate sensor, nonlinear stiffness, free nonlinear oscillations, precession of the wave pattern of oscillations.

Abstract. In the work, the authors investigated methods for increasing the accuracy of an integrating-type solid-state gyroscope in the form of a thin shell of rotation. For this purpose, analytical formulas were determined for the drift of the gyroscope; this drift was due to nonlinear effects. The authors of the study obtained a mathematical model of resonator oscillations, which takes into account nonlinear stiffness. In this work, a formula was obtained for the drift of a solid-state gyroscope on a moving base. The nonlinear dynamics of a wave solid-state gyroscope in free oscillations of a hemispherical resonator was studied using the Krylov-Bogolyubov averaging method. The work showed that nonlinear stiffness leads to additional precession of the wave pattern and a change in the oscillation phase of the gyroscope. In a numerical example, the gyroscope error due to nonlinear rigidity was assessed. It was concluded that it is necessary to take into account nonlinear stiffness when constructing methods for algorithmic compensation of gyroscope errors.

Введение

Исследование прецизионных микромеханических инерциальных навигационных модулей и систем является актуальной задачей для автоматического управления движением объектов [1, 2]. Миниатюрные резонаторы требуются для целого ряда областей применений, включая обработку сигналов, синхронизацию, регулирование частоты и инерциальное зондирование [3]. Применение новых физических принципов измерений движения в инерциальном пространстве, использование новых конструкционных материалов и технологий микроэлектромеханических систем позволяет обеспечить снижение массово-габаритных характеристик, энергопотребления и стоимости датчиков инерциальной информации – гироскопов, акселерометров и систем на их основе.

Полусферический резонаторный гироскоп, принцип работы которого основан на эффекте Брайана, имеет много особенностей в отличие от других гироскопов: высокая точность, широкий диапазон температур и меньшая стоимость. Преимущество полусферического гироскопа по сравнению с кольцевым резонатором были

продемонстрированы в [4]. В [5] был предложен подход, уменьшающий дефект изготовления, благодаря исследованию гипотезы о том, что пластическая деформация, вызванная поверхностным натяжением или выдуванием стекла, [6] может служить механизмом создания гладких резонаторов. Другие конструкторско-технологические способы повышения характеристик гироскопических устройств рассматривались в [7, 8], где для повышения чувствительности используются материалы с малыми внутренними потерями (такие как кварц и кремний) и принимаются меры по уменьшению внешнего трения и остаточного давления.

В данной статье поставлена задача исследования влияния нелинейности упругих свойств материала резонатора на динамику и точность гироскопа. Отличие представленной работы от известных публикаций заключается в учете модели деформаций резонатора [9, 10] повышенной точности.

Материалы и методы исследований. Рассмотрим резонатор волнового твердотельного гироскопа (ВТГ) в виде оболочки вращения (рис. 1). Пусть резонатор имеет форму купола. На краях резонатора условия линейные и однородные. Серединная поверхность образована поворотом кривой G вокруг оси Z . В данных условиях задача исследования свободных колебаний сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

На основании прибора построим ортогональную систему координат $OXYZ$ (рис. 1): ось Z направлена по оси симметрии резонатора. Чтобы описать деформации резонатора введем ортогональный треугольник $\eta\xi\xi$, который будет связан с медианами и параллелями его серединной поверхности.

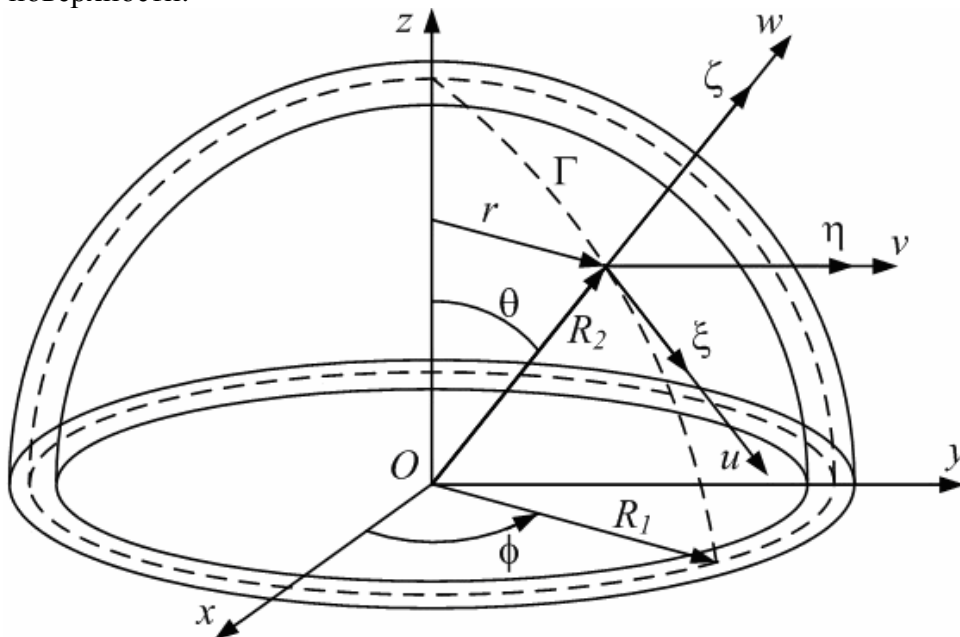


Рис. 1. Схематичное изображение полусферического резонатора ВТГ

Углы θ и ϕ возьмем в качестве криволинейных координат. Угол θ образован внешней нормалью к серединной поверхности и осью симметрии, а ϕ в окружном направлении. Тогда коэффициенты Ламе примут вид:

$$A = R_1, B = R_2 \sin \theta, \quad (1)$$

где R_1, R_2 – радиусы соответственной кривизны меридиана и нормального сечения, проведенного кривой G .

Через вектор $\mathbf{u} = \|u, v, w\|^T$ обозначим вектор смещения произвольной точки серединной поверхности оболочки.

Для вывода уравнений движения оболочки воспользуемся формализмом Лагранжа. Введем функцию Лагранжа:

$$L = T - P. \quad (2)$$

Кинетическая энергия будет представлена следующим образом:

$$T = \frac{1}{2} \int_{\sigma} \rho h V^2 d\sigma. \quad (3)$$

где V – вектор абсолютной скорости точки срединной поверхности оболочки, $d\sigma = ABd\varphi d\theta$ – элементарная площадь срединной поверхности, ρ – плотность материала оболочки, h – толщина оболочки.

Будем считать, что оболочка вращается вокруг своей оси симметрии с угловой скоростью Ω , тогда абсолютная скорость точки срединной поверхности определяется выражением:

$$\Omega = \|- \Omega \sin \theta, 0, \Omega \cos \theta\|^T, \quad r = \|- \Omega \sin \theta, 0, \Omega \cos \theta\|^T. \quad (4)$$

Теперь подставим (4) в выражение абсолютной скорости срединной поверхности оболочки:

$$V = \|\dot{u} - \Omega v \cos \theta, \dot{v} + \Omega((R_2 + w) \sin \theta) + u \cos \theta, \dot{w} - \Omega v \sin \theta\|^T. \quad (5)$$

Здесь u – вектор перемещений, вызванных упругими деформациями, находится по следующей формуле:

$$u = f_k(t)u_k^{(1)}(\theta, \varphi) + g_k(t)u_k^{(2)}(\theta, \varphi), \quad (6)$$

где k – номер формы колебаний, $f_k(t)$ и $g_k(t)$ – искомые функции, $A(\hat{\varepsilon}_0, \Psi_0^2) = A_0(\hat{\varepsilon}_0, \Psi_0^2) + \hat{A}(\hat{\varepsilon}_0, \Psi_0^2)$ – собственные формы свободных колебаний оболочки, которые соответствуют частоте колебаний ω_k резонатора постоянной толщины.

Собственные формы колебаний $u_k^{(j)}$ асимметричной оболочки будем искать в виде:

$$\begin{aligned} u_k^{(1)} &= \|u_k(\theta) \cos(k\varphi)v_k(\theta) \sin(k\varphi) - w_k(\theta) \cos(k\varphi)\|^T, \\ u_k^{(2)} &= \|-u_k(\theta) \sin(k\varphi)v_k(\theta) \cos(k\varphi) - w_k(\theta) \sin(k\varphi)\|^T, \end{aligned} \quad (7)$$

Кинетическую энергию получим, подставляя выражения (4)-(7) и интегрируя по окружной координате φ :

$$T = \frac{1}{2} \left(m_k (\dot{f}_k^2 + \dot{g}_k^2) + 2\hat{\delta}_k \Omega (f_k \dot{g}_k + g_k \dot{f}_k) + \hat{\alpha}_k \Omega^2 (f_k^2 + g_k^2) \right), \quad (8)$$

где m_k – приведенная масса резонатора, которая соответствует k -ой гармонике:

$$\begin{aligned} m_k &= \pi \rho h \int_{\theta_0}^{\theta_1} (u_k^2 + v_k^2 + w_k^2) AB d\theta, \\ \hat{\delta}_k^2 &= 2\pi \rho h \int_{\theta_0}^{\theta_1} (w_k \sin \theta - u_k \cos \theta) AB d\theta, \\ \hat{\alpha}_k &= \pi \rho h \int_{\theta_0}^{\theta_1} (v_k^2 \sin^2 \theta - (w_k \sin \theta - u_k \cos \theta)^2) AB d\theta. \end{aligned} \quad (9)$$

Потенциальную энергию запишем через выражение для удельной работы деформации, вычисляемой как сумма работ изменений объема A_0 и формы \hat{A} [11]:

$$A(\hat{\varepsilon}_0, \Psi_0^2) = A_0(\hat{\varepsilon}_0, \Psi_0^2) + \hat{A}(\hat{\varepsilon}_0, \Psi_0^2), \quad (10)$$

где $\hat{\varepsilon}_0$ – среднее удлинение, Ψ_0 – интенсивность деформации сдвига.

Для работ изменений объема и формы справедливы следующие соотношения:

$$\frac{dA_0}{d\hat{\varepsilon}_0} = 9K\hat{\varepsilon}_0 \kappa(\hat{\varepsilon}_0); \quad \frac{d\hat{A}}{d\Psi_0^2} = \frac{3}{4} G\gamma(\Psi_0^2); \quad \lim_{\hat{\varepsilon}_0 \rightarrow 0} \kappa(\hat{\varepsilon}_0) = 1; \quad \lim_{\Psi_0 \rightarrow 0} \gamma(\Psi_0^2) = 1. \quad (11)$$

где $\kappa(\hat{\varepsilon}_0)$ – функция удлинения, $\gamma(\psi_0^2)$ – функция сдвига материала, $K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$ – модуль объёмного сжатия, $G = \frac{E}{3(1+2\nu)}$ – модуль сдвига, E – модуль упругости, ν – коэффициент Пуассона.

Проинтегрировав уравнения (11), получим следующее выражение для потенциальной энергии:

$$A(\hat{\varepsilon}_0, \psi_0^2) = 9K \int_0^{\hat{\varepsilon}_0} \tilde{\kappa}(\tilde{\varepsilon}) d\tilde{\varepsilon} + \frac{2}{3} G \int_0^{\psi_0} \psi \gamma(\psi^2) d\psi. \quad (12)$$

Функции удлинения и сдвига материала представим в виде степенных рядов с коэффициентами a_j и s_{2j} , причем эти коэффициенты близки к 1 [12]:

$$\begin{aligned} \kappa(\hat{\varepsilon}_0) &= 1 - a_1 \hat{\varepsilon}_0 - a_2 \hat{\varepsilon}_0^2 - a_3 \hat{\varepsilon}_0^3 - \dots, \\ \gamma(\psi_0^2) &= 1 - s_2 \psi_0^2 - s_4 \psi_0^4 - s_6 \psi_0^6 - \dots \end{aligned} \quad (13)$$

Учитывая (13) и дальнейшее интегрирование (11), получим следующее выражение для удельной работы:

$$A(\hat{\varepsilon}_0, \psi_0^2) = \frac{9}{2} \hat{\varepsilon}_0 \left(1 - 2(a_1 \hat{\varepsilon}_0 + a_2 \hat{\varepsilon}_0^2 + a_3 \hat{\varepsilon}_0^3 + \dots) \right) + \frac{3}{4} G \psi_0^2 \left(1 - 2(s_2 \psi_0^2 + s_4 \psi_0^4 + s_6 \psi_0^6 + \dots) \right). \quad (14)$$

Интенсивность деформации сдвига в произвольной системе координат $\eta\zeta\xi$ будем считать:

$$\psi_0^2 = \frac{4}{3} \left(\frac{2}{3} (\varepsilon_\eta^2 + \varepsilon_\zeta^2 + \varepsilon_\xi^2 - \varepsilon_\xi \varepsilon_\zeta - \varepsilon_\eta \varepsilon_\zeta - \varepsilon_\xi \varepsilon_\eta) + \frac{1}{2} (\psi_{\xi\eta}^2 + \psi_{\zeta\xi}^2 + \psi_{\zeta\eta}^2) \right), \quad (15)$$

где $\varepsilon_\eta, \varepsilon_\xi, \varepsilon_\zeta$ – удлинение в точке в направлении η, ζ, ξ соответственно, $\psi_{\xi\eta}, \psi_{\zeta\xi}, \psi_{\zeta\eta}$ – сдвиг в точке в плоскости.

Компонента полной деформации оболочки и средняя деформация описываются выражениями:

$$\varepsilon_\zeta = -\frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_\xi + \varepsilon_\eta); \quad \hat{\varepsilon}_0 = \frac{1}{3} (\varepsilon_\xi + \varepsilon_\eta + \varepsilon_\zeta). \quad (16)$$

Считаем, что $\psi_{\xi\eta} = \psi_{\zeta\xi} = 0$, то есть сдвиг происходит в плоскости ($\eta\xi$). Тогда формулы для деформации в точке имеют вид:

$$\varepsilon_\xi = e_\xi + \xi \chi_\xi, \quad \varepsilon_\eta = e_\eta + \xi \chi_\eta, \quad \psi_{\xi\eta} = 2e_{\xi\eta} + 2\xi \chi_{\xi\eta}. \quad (17)$$

где $e_\eta, e_\xi, e_{\eta\xi}$ – компоненты тангенциальной деформаций, $\chi_\eta, \chi_\xi, \chi_{\eta\xi}$ – параметры изгибной деформации.

Формулы для компонент тангенциальной и изгибной деформаций оболочки имеют следующий вид [13]:

$$\begin{aligned} e_\xi &= \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \varphi} + \frac{w}{R_1}; \quad e_\eta = \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \theta} + \frac{w}{R_1}; \\ e_{\eta\xi} &= \frac{1}{2} \left(\frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{v}{B} \right) + \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{u}{A} \right) \right); \quad \chi_\eta = \frac{1}{R_1} \frac{\partial \gamma_1}{\partial \varphi} - \frac{\gamma_2^2}{2R_1}; \\ \chi_\xi &= -\frac{1}{B} \frac{\partial \gamma_2}{\partial \theta} + \frac{1}{BR_1} \frac{\partial B}{\partial \varphi} \gamma_1 - \frac{\gamma_1^2}{2R_2}; \quad \chi_{\xi\eta} = -\frac{1}{BR_1} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial B}{\partial \varphi} \gamma_2 - \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{B}{R_2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right); \\ \gamma_1 &= \frac{1}{R_1} \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} + u \right); \quad \gamma_2 = -\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{v}{R_2}. \end{aligned} \quad (18)$$

Для практических задач выражения (13) можно представить в сокращенной форме (как это было сделано в [13]):

$$\kappa(\hat{\epsilon}_0) = 1 - a_1 \epsilon_0^2, \gamma(\psi_0^2) = 1 - s_2 \psi_0^2. \quad (19)$$

Используя формулы (15)-(18) и (19), выведем удельную потенциальную энергию:

$$P = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \left[(\epsilon_\xi + \epsilon_\eta)^2 - 2(1-\nu_0) \left(\epsilon_\xi \epsilon_\eta - \frac{1}{4} \psi_{\xi\eta}^2 \right) \right] - \frac{E(1-2\nu)^3}{108(1-\nu)^4}; \quad (20)$$

$$a_2 (\epsilon_\xi + \epsilon_\eta)^4 - \frac{E}{3(1+\nu)} s_2 \left[\frac{2}{3} (\epsilon_\xi + \epsilon_\eta)^2 \left(\frac{1}{1-\nu} + \frac{\nu}{(1-\nu)^2} \right) - 2 \left(\epsilon_\xi \epsilon_\eta - \frac{1}{4} \psi_{\xi\eta}^2 \right) \right].$$

Будем считать, что срединная линия нерастяжима, тогда справедливо следующее выражения:

$$e_\eta = e_\xi = e_{\eta\xi} = 0. \quad (21)$$

Запишем формулу потенциальной энергии оболочки:

$$\Pi = \iiint P(\epsilon_0, \psi_0^2) dV. \quad (22)$$

Подставляя (19)-(21) в (22) и интегрируя, получим:

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} D \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left((\chi_\xi + \chi_\eta)^2 - 2(1-\nu)(\chi_\eta \chi_\xi - \chi_{\eta\xi}^2) \right) d\sigma d\varphi - \\ &- \frac{1}{2} D_1 s_2 \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left((\chi_\xi + \chi_\eta)^2 d_1 - (\chi_\eta \chi_\xi - \chi_{\eta\xi}^2) \right)^2 d\sigma d\varphi - \\ &- \frac{1}{2} D_2 a_2 \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left((\chi_\eta \chi_\xi - \chi_{\eta\xi}^2) \right)^4 d\sigma d\varphi, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\text{где } D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, D_1 = \frac{Eh^5}{30(1+\nu)}, D_2 = \frac{Eh^5(1-2\nu)^3}{4320(1-\nu)^4}, d_1 = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1-\nu} + \frac{\nu^2}{(1-\nu)^2} \right), \quad (1)$$

где $d\sigma = ABd\varphi d\theta$, D_1 – цилиндрическая жесткость.

Компоненты изгибных деформаций имеют вид:

$$\begin{aligned} e_\xi &= \sum_{k=2}^n c_{1,k} (f_k \cos k\theta - g_k \sin k\theta), \quad c_{1,k} = \frac{U'_k - W_k}{R_1}, \\ e_\eta &= \sum_{k=2}^n c_{2,k} (f_k \cos k\theta - g_k \sin k\theta), \quad c_{2,k} = \frac{kR_1 V_k - BW_k + U_k B'}{BR_1}, \\ e_\eta &= \sum_{k=2}^n c_{3,k} (f_k \cos k\theta + g_k \sin k\theta), \quad c_{3,k} = \frac{kR_1 V_k - V_k B' + BV'_k}{BR_1}, \\ \chi_\eta &= c_{4,k} (f_k \cos k\theta - g_k \sin k\theta) - c_{7,k} (f_k \cos k\theta + g_k \sin k\theta)^2, \\ c_{4,k} &= \frac{U'_k - R_1 W_k''}{R_1^2}, \quad c_{6,k} = \frac{B(V_k B' - BV'_k) + kR_2 (B(U_k + W'_k) - W_k B'_k)}{B^2 R_2 R_1}, \\ \chi_\xi &= c_{5,k} (f_k \cos k\theta - g_k \sin k\theta) - c_{8,k} (f_k \cos k\theta - g_k \sin k\theta)^2, \\ c_{5,k} &= \frac{k(BV_k - kR_2 W_k) R_1^2 + BB' R_2 (U_k + W'_k)}{B^2 R_2 R_1^2}, \\ \chi_{\xi\eta} &= c_{6,k} (f_k \sin k\theta + g_k \cos k\theta), \quad c_{7,k} = \frac{(BV_k - kR_2 W_k)^2}{2B^2 R_2^2 R_1}, \quad c_{8,k} = \frac{(U_k - W'_k)^2}{2R_1^2 R_2}. \end{aligned} \quad (25)$$

Подставляя компоненты изгибных деформаций (25) в выражение для потенциальной энергии (23) и интегрируя по окружной координате, получим потенциальную энергию оболочки:

$$\Pi = (f_k^2 + g_k^2)^4 \delta_4 + (f_k^2 + g_k^2)^3 \delta_3 + (f_k^2 + g_k^2)^2 \delta_2 + (f_k^2 + g_k^2) \delta_1. \quad (26)$$

где $\delta_0 = \frac{1}{128} AB\pi$, $\delta_1 = 16 \left(\left(3c_{4,k}^2 c_{5,k}^2 - 2c_{4,k} c_{5,k} c_{6,k}^2 + 3c_{6,k}^4 - 2(c_{4,k} + c_{5,k})^2 (3c_{4,k} c_{5,k} - c_{6,k}^2) d_1 + 3(c_{4,k} + c_{5,k})^4 d_1^2 \right) D_1 - 3(c_{4,k} + c_{5,k})^4 D_2 + 3D(c_{7,k}^2 + c_{8,k}^4 + 2c_{7,k} c_{8,k} \nu) \right) \delta_0$,

$$\delta_2 = 64D(c_{4,k}^2 + c_{5,k}^2 - c_{6,k}^2(-1 + \nu) + 2c_{4,k} c_{5,k} \nu),$$

$$\delta_3 = 8\delta_0 \left(10c_{6,k}^2 \left(-c_{7,k} c_{8,k} + (c_{7,k} + c_{8,k})^2 d_1 \right) D_1 \right) +$$

$$+ c_{4,k}^2 \left(\left(c_{8,k}^2 - 2c_{8,k} (3c_{7,k} + 2c_{8,k}) d_1 + 6(c_{7,k} + c_{8,k})^2 d_1 \right) D_1 - 6(c_{7,k} + c_{8,k})^2 D_2 \right) +$$

$$+ c_{5,k}^2 \left(\left(c_{7,k}^2 - c_{7,k} (2c_{7,k} + 3c_{8,k}) d_1 + 6(c_{7,k} + c_{8,k})^2 d_1^2 \right) D_1 - 6(c_{7,k} + c_{8,k})^2 D_2 \right) -$$

$$- 2c_{4,k} c_{5,k} \left(\left(2c_{7,k} c_{8,k} - (3c_{7,k}^2 + 8c_{7,k} c_{8,k} + 3c_{8,k}^2) d_1 - 6(c_{7,k} + c_{8,k})^2 d_1^2 \right) D_1 - 6(c_{7,k} + c_{8,k})^2 \right),$$

$$\delta_4 = 35\delta_0 \left(\left(c_{7,k} c_{8,k} - (c_{7,k} + c_{8,k})^2 d_1 \right) D_1 - (c_{7,k} + c_{8,k})^4 D_2 \right).$$

где $\delta_k, (k=1,2,3,4)$ – приведенные жесткости резонатора для компонент потенциальной энергии.

Подставим (26) и (8) в функцию Лагранжа:

$$L = \frac{1}{2} \left(m_k (\dot{f}_k^2 + \dot{g}_k^2) + 2\hat{\delta}_k \Omega (\dot{f}_k g_k + \dot{g}_k f_k) + \alpha_k^2 \Omega^2 (f_k^2 + g_k^2) \right) -$$

$$- (f_k^2 + g_k^2)^4 \delta_4 - (f_k^2 + g_k^2)^3 \delta_3 - (f_k^2 + g_k^2)^2 \delta_2 - (f_k^2 + g_k^2) \delta_1. \quad (28)$$

Получим нелинейную систему нестационарных дифференциальных уравнений с помощью формализма Лагранжа:

$$\ddot{f}_k + 2\delta\Omega\dot{g}_k + \hat{\delta}_k \dot{\Omega} g_k - \alpha_k^2 \Omega^2 f_k - 2\delta_1 f_k + 4\delta_2 f_k (f_k^2 + g_k^2) +$$

$$+ 6\delta_3 f_k (f_k^2 + g_k^2)^2 + 8\delta_4 f_k (f_k^2 + g_k^2)^3 + a_1 \omega \dot{f}_k + \omega^2 f_k = 0,$$

$$\ddot{g}_k + 2\delta\Omega\dot{f}_k - \hat{\delta}_k \dot{\Omega} f_k - \alpha_k^2 \Omega^2 g_k - 2\delta_1 g_k + 4\delta_2 g_k (f_k^2 + g_k^2) +$$

$$+ 6\delta_3 g_k (f_k^2 + g_k^2)^2 + 8\delta_4 g_k (f_k^2 + g_k^2)^3 + a_1 \omega \dot{g}_k + \omega^2 g_k = 0. \quad (29)$$

Коэффициенты Ламе поверхности для полусферического резонатора:

$$R_1 = R_2 = R; \quad A = R; \quad B = R \sin \theta; \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2. \quad (30)$$

Для определения векторов перемещения $u^{(j)}, (j=1,2)$ в (6) воспользуемся формулами Рэлея [14]:

$$u_k = v_k(\theta) = \sin \theta \operatorname{tg} \left(\frac{\theta}{2} \right)^k, \quad w_k = (k + \cos \theta) \operatorname{tg} \left(\frac{\theta}{2} \right)^k. \quad (31)$$

Используя выражения (31), получим формулы для параметров модели полусферической оболочки в виде:

$$m_k = \pi \rho h \int_0^{2\pi} \operatorname{tg} \left(\frac{\theta}{2} \right)^{2k} \left(2 \sin^2 \theta + (k + \cos \theta)^2 \right) R^2 \sin \theta d\theta = \pi \rho h R^2 i_k,$$

$$\hat{\delta}_k^2 = 2\pi \rho h \int_0^{2\pi} \operatorname{tg} \left(\frac{\theta}{2} \right)^{2k} k R^2 \sin^3 \theta d\theta = \pi \rho h R^2 s_k, \quad (2)$$

$$\hat{\alpha}_k^2 = \pi \rho h \int_0^{2\pi} \operatorname{tg} \left(\frac{\theta}{2} \right)^{2k} \left(k^2 + \sin^2 \theta \right) R^2 \sin^3 \theta AB d\theta = \pi \rho h R^2 n_k,$$

где

$$\begin{aligned}
i_1 &= \frac{4}{3}, & i_2 &= 1.5296, & i_3 &= 1.8813, & i_4 &= 2.2964, \\
s_1 &= \frac{2}{3}, & s_2 &= 0.8473, & s_3 &= 0.9157, & s_4 &= 0.9475, \\
n_1 &= \frac{19}{30}, & n_2 &= 1.0474, & n_3 &= 1.5209, & n_4 &= 2.0107.
\end{aligned}
\tag{33}$$

Результаты. Рассмотрим случай, когда основание, на котором установлен резонатор, вращается с медленноменяющейся скоростью. Уравнения динамики резонатора, вращающегося с переменной скоростью при наличии силы диссипации, имеют вид:

$$\begin{aligned}
&\ddot{f}_k + 2\delta\Omega\dot{g}_k + \hat{\delta}_k\dot{\Omega}g_k - \alpha_k^2\Omega^2 f_k - 2\delta_1 f_k + 4\delta_2 f_k (f_k^2 + g_k^2) + \\
&+ 6\delta_3 f_k (f_k^2 + g_k^2)^2 + 8\delta_4 f_k (f_k^2 + g_k^2)^3 + a_1\omega\dot{f}_k + \omega^2 f_k = 0, \\
&\ddot{g}_k + 2\delta\Omega\dot{f}_k - \hat{\delta}_k\dot{\Omega}f_k - \alpha_k^2\Omega^2 g_k - 2\delta_1 g_k + 4\delta_2 g_k (f_k^2 + g_k^2) + \\
&+ 6\delta_3 g_k (f_k^2 + g_k^2)^2 + 8\delta_4 g_k (f_k^2 + g_k^2)^3 + a_1\omega\dot{g}_k + \omega^2 g_k = 0/
\end{aligned}
\tag{34}$$

Заменим обобщенные координаты для анализа свободных колебаний резонатора:

$$g_k = Rg\sqrt{\varepsilon}, f_k = Rf\sqrt{\varepsilon}, \delta_k = \zeta_k\sqrt{\varepsilon}. \tag{35}$$

где f, g – новые обобщенные координаты. Нелинейные слагаемые, связанные с нелинейностью демпфирования $\delta_k, (k = 1, 2, 3, 4)$, будем считать малыми (порядка малости ε).

К невозмущенной одночастотной системе (34) применим метод усреднения Крылова–Боголюбова и приведем ее к стандартному виду посредством перехода от переменных f, \dot{f}, g, \dot{g} к оскулирующим переменным q_1, q_2, p_1, p_2 по формулам:

$$\begin{aligned}
f &= q_1 \cos \omega\tau + p_1 \sin \omega\tau, & \dot{f} &= -q_1\omega \sin \omega\tau + p_1 \cos \omega\tau, \\
g &= q_1 \cos \omega\tau + p_1 \sin \omega\tau, & \dot{g} &= -q_1\omega \sin \omega\tau + p_1 \cos \omega\tau.
\end{aligned}
\tag{36}$$

Уравнения движения в медленных переменных Ван-дер-Поля q_1, q_2, p_1, p_2 в первом приближении метода осреднения имеют вид:

$$\begin{aligned}
\dot{q}_1 &= -\frac{1}{8\omega^2} \left(15\zeta_3\omega^2 p_1^5 + 36\zeta_3\omega^2 p_1^2 p_2 q_1 q_2 + 6\omega^2 p_1^3 \left(2\zeta_1 + \zeta_3 \left(5(p_2^2 + q_1^2) + q_2^2 \right) \right) + \right. \\
&+ 4\omega \left(\omega q_1 (a_1 + \mu_2 + p_2 q_2 \left(2\zeta_1 + 3\zeta_3 (p_2^2 + q_1^2 + q_2^2) \right)) - 2\delta q_2 \Omega \right) + \\
&+ p_1 \left(\omega^2 (8\zeta_2 + 3(5\zeta_3 p_2^4 + 4\zeta_1 q_1^2 + 5\zeta_3 q_1^4 + p_2^2 (4\zeta_1 + 6\zeta_3 q_1^2))) + \right. \\
&+ 2(2\zeta_1 + 9\zeta_3 (p_2^2 + q_1^2)) + 3\zeta_3 q_2^4 + 4\alpha^2 \Omega^2 \left. \right) + 4\delta p_2 \dot{\Omega} \left. \right), \\
\dot{p}_1 &= \frac{1}{8\omega^2} \left(15\zeta_3\omega^2 p_1^4 + 15\zeta_3\omega^2 p_1^5 + 12\zeta_3\omega^2 p_1^2 p_2 q_2 + \right. \\
&+ 6\omega^2 p_1^2 q_1 \left(2\zeta_1 + 3\zeta_3 p_2^2 + 5\zeta_3 p_2^2 + 3\zeta_3 q_2^2 \right) + 6\omega^2 q_1 \left(2\zeta_1 + \zeta_3 p_2^2 + 5\zeta_3 q_2^2 \right) - \\
&- 4\omega^2 p_1 \left(a_1 + \mu - p_2 q_2 \left(2\zeta_1 + \zeta_3 (p_2^2 + 3q_1^2 + q_2^2) \right) \right) + \\
&+ q_1 \left(\omega^2 (8\zeta_2 + 4\zeta_1 p_2^2 + 3\zeta_3 q_2^4 + 6(2\zeta_1 + 3\zeta_3 p_2^2) q_2^2 + 15\zeta_3 q_2^4) + 4\alpha^2 \omega^2 \right) + \\
&+ 4\delta (2\omega p_2 \Omega + 4q_2 \dot{\Omega}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{q}_2 = & -\frac{1}{8\omega^2} \left(15\zeta_3 \omega^2 p_2^5 + 36\zeta_3 \omega^2 p_2^2 p_1 q_1 q_2 + 6\omega^2 p_2^3 \left(2\zeta_1 + \zeta_3 \left(5(p_2^2 + q_1^2) + q_1^2 \right) \right) + \right. \\
& + 4\omega \left(\omega q_2 (a_1 + \mu_2 + p_1 q_1 \left(2\zeta_1 + 3\zeta_3 (p_1^2 + q_1^2 + q_2^2) \right) \right) - 2\delta q_1 \Omega \left. \right) + \\
& + p_2 \left(\omega^2 (8\zeta_2 + 15\zeta_3 p_1^4 + 4\zeta_1 q_1^2 + 3\zeta_3 q_1^4 + 6q_2^2 (2\zeta_1 + 3\zeta_3 q_1^2) + 15\zeta_3 q_2^4 + \right. \\
& + 6p_1^2 (2\zeta_1 + 3\zeta_3 (q_2^2 + q_1^2)) + 4\alpha^2 \Omega^2 \left. \right) + 4\delta p_1 \dot{\Omega} \left. \right), \\
\dot{p}_2 = & \frac{1}{8\omega^2} \left(15\zeta_3 \omega^2 q_2^5 + 15\zeta_3 \omega^2 p_2^4 q_2 + 12\zeta_3 \omega^2 p_1^3 p_2 q_2 + 6\omega^2 \left(2\zeta_1 + 3\zeta_3 p_1^2 + 5\zeta_3 q_1^2 \right) + \right. \\
& + 4\omega^2 p_1 \left(a_1 + \mu_2 - q_1 p_1 \left(2\zeta_1 + 3\zeta_3 (p_2^2 + q_1^2 + 3q_2^2) \right) \right) - 8\delta \omega p_1 \Omega + \\
& + q_2 \left(\omega^2 (8\zeta_2 + 4\zeta_1 p_2^2 + 3\zeta_3 q_1^4 + 6(2\zeta_1 + 3\zeta_3 p_1^2) q_1^2 + 15\zeta_3 q_1^4) + 4\alpha^2 \omega^2 \right) + \\
& + 4\delta (4q_1 \dot{\Omega}) \left. \right).
\end{aligned} \tag{37}$$

Аналитически проинтегрировать систему нелинейных дифференциальных уравнений (37) для произвольных начальных условий не удастся. Интегрирование системы можно осуществить численными методами. Значения амплитуд стационарных колебаний определяются как особые точки системы.

Функцию нормального прогиба резонатора на свободной кромке, запишем в виде (измерение прогиба можно осуществлять, используя электростатические датчики):

$$w = f \cos n\varphi + g \sin n\varphi. \tag{38}$$

Рассмотрим случай переменной скорости вращения основания. Учитывая известное представление волновой картины колебаний резонатора в элементах орбиты $r, k, \hat{\theta}, \hat{\chi}$ [13]:

$$w = r \sin n(\varphi + \hat{\theta}) \cos \left(\omega \int_0^t i(\tau) d\tau + \hat{\chi} \right) + k \cos n(\varphi + \hat{\theta}) \sin \left(\omega \int_0^t i(\tau) d\tau + \hat{\chi} \right). \tag{39}$$

где
$$i(\tau) = \sqrt{1 + \left(\frac{\Omega(\tau)}{\omega} \right)^2} (4\delta^2 - \hat{\delta}). \tag{40}$$

С учетом формул перехода (36) выражение для функции прогиба (39) запишем в виде:

$$w = (q_1 \cos \omega_0 t + p_1 \sin \omega_0 t) \cos n\varphi + (q_2 \cos \omega_0 t + p_2 \sin \omega_0 t) \sin n\varphi. \tag{41}$$

где
$$\begin{aligned}
q_1 &= A_1 \cos(-\delta\Omega t + \alpha_1) + A_2 \cos(-\delta\Omega t + \alpha_2), \\
q_2 &= -A_1 \sin(-\delta\Omega t + \alpha_1) + A_2 \sin(-\delta\Omega t + \alpha_2), \\
p_1 &= -A_1 \sin(-\delta\Omega t + \alpha_1) + A_2 \sin(-\delta\Omega t + \alpha_2), \\
p_2 &= A_1 \cos(-\delta\Omega t + \alpha_1) - A_2 \cos(-\delta\Omega t + \alpha_2).
\end{aligned} \tag{42}$$

Связь между (39) и (41) можно представить в виде:

$$\begin{aligned}
q_1 &= r \cos(n\hat{\theta}) \cos \hat{\chi} - k \cos(n\hat{\theta}) \sin \hat{\chi}, \quad p_1 = r \cos(n\hat{\theta}) \sin \hat{\chi} - k \sin(n\hat{\theta}) \cos \hat{\chi}, \\
q_2 &= r \sin(n\hat{\theta}) \cos \hat{\chi} + k \sin(n\hat{\theta}) \sin \hat{\chi}, \quad p_2 = -r \sin(n\hat{\theta}) \sin \hat{\chi} - k \cos(n\hat{\theta}) \sin \hat{\chi}.
\end{aligned} \tag{43}$$

Из (43) можно вывести следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
k^2 + r^2 &= p_2^2 + p_1^2 + q_1^2 + q_2^2, \quad kr = p_1 q_2 - p_2 q_1, \\
tg(2n\hat{\theta}) &= \frac{2(p_1 q_2 + p_2 q_1)}{-p_2^2 + p_1^2 + q_1^2 - q_2^2}, \quad tg(2n\hat{\theta}) = \frac{2(p_1 q_2 + p_2 q_1)}{p_2^2 + p_1^2 - q_1^2 - q_2^2}.
\end{aligned} \tag{44}$$

Подставляя (43) в (44), получим переход от медленных переменных $A_1, A_2, \alpha_1, \alpha_2$ к переменным орбиты:

$$r = A_1 + A_2, \quad k = A_1 - A_2, \quad \theta_* = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2n}, \quad \hat{\theta} = -\frac{\delta}{n} \int_0^t \Omega(\tau) dt + \theta_*, \quad \hat{\chi} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}. \quad (45)$$

где θ_* – дополнительная медленная прецессия волновой картины, характеризующая погрешность гироскопа; $\hat{\chi}$ – фаза колебаний.

Проведем числовую оценку погрешности гироскопа. Для этого возьмем следующие параметры прибора [9, 10, 15]: радиус $R = 0,5$ мм, толщину поперечного сечения $h = 4$ мкм, плотность материала $\rho = 2328$ кг/м³, модуль Юнга $E = 150$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,17$, а коэффициент нелинейной упругости материала $s_2 = 1$. Рассмотрим вращение основания с угловой скоростью $\Omega = 100 \cos(\pi t / 60) \text{ c}^{-1}$. По результатам численного моделирования динамики полусферического резонатора были получены графики зависимостей медленно изменяющихся параметров волновой картины колебаний, представленные на рисунке 2.

Выводы. Анализируя зависимости, представленные на рисунке 2, можно заметить значительное влияние нелинейной жесткости материала резонатора на дополнительную прецессию волновой картины колебаний прибора. Для рассмотренного числового примера уход гироскопа с полусферическим резонатором при учете нелинейной жесткости отличается на 0,01954 рад. по сравнению с зависимостью, полученной для модели резонатора с линейной жесткостью материала резонатора, что является существенной для данного типа приборов. Полученные результаты приводят к выводу о необходимости учета нелинейной жесткости при построении методик алгоритмической компенсации погрешности гироскопа.

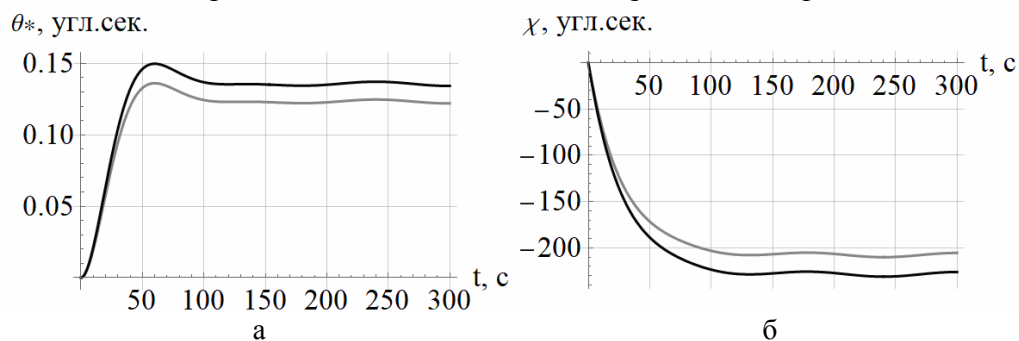


Рис. 2. Графики изменения дополнительной прецессии волновой картины (а) и фазы колебаний (б) (в радианах): серая линия – с учетом нелинейной жесткости, черная линия – без учета нелинейной жесткости

Заключение

Построена новая математическая модель изгибных колебаний резонатора с учетом нелинейной жесткости. С помощью метода осреднения Крылова–Боголюбова исследована динамика полусферического резонатора и получена формула для оценки дополнительного дрейфа гироскопа, возникающего из-за физической и геометрической нелинейности полусферического резонатора. Угловая скорость основания прибора являлась медленно изменяющейся функцией времени, в работе была предложена методика разделения движения резонатора для медленно изменяющихся во времени амплитуд и фаз колебаний устройства. В примере показано существенное влияние нелинейной жесткости резонатора на прецессию волновой картины гироскопа. Выявлена дополнительная погрешность, возникающая в работе данного класса приборов.

Список литературы

1. Peshekhonov V.G. The Outlook for Gyroscopy // Gyroscopy and Navigation. 2020, no. 11, pp. 193-197.
2. Журавлев В.Ф. Волновой твердотельный гироскоп: современное состояние, некоторые аспекты // Актуальные проблемы авиационных аэрокосмических систем: процессы, модели, эксперимент. – 2011. – №2(33). – С. 118-123.

3. Nguyen C.T.-C. MEMS technology for timing and frequency Control // IEEE Transactions Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control. 2007, vol. 54, no. 2, pp. 251-270.
4. Zhuravlev V.Ph., Perelyaev S.E. 3-D micromachined spherical shell resonators: implementation vision // Information innovative technologies. 2019, no. 1, pp. 83-90.
5. Zotov S.A., Prikhodko I.P., Trusov A.A., Shkel A.M. 3-D micromachined spherical shell resonators with integrated electromagnetic and electrostatic transducers // Solid-state sensors, actuators, and microsystems: workshop Hilton Head Island. – USA, South Carolina: SCSU, 2010. – P. 11-14.
6. Eklund E.J., Shkel A.M. Glass Blowing on a Wafer Level // Journal of Microelectromechanical systems. 2007, vol. 16, no. 2, pp. 232-239. DOI: 10.1109/JMEMS.2007.892887.
7. Askari S., Asadian M.H., Shkel A.M. High quality factor MEMS gyroscope with whole angle mode of operation // IEEE International Symposium on Inertial Sensors and Systems (INERTIAL). – Italy: Lake Como, 2018. – P. 1-4. – DOI: 10.1109/ISISS.2018.8358148.
8. Xu Z., Xi B., Wang D. A novel model for fully closed-loop system of hemispherical resonator gyroscope under force-to-rebalance // IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement. 2020, vol. 69, no. 12, pp. 1-4. DOI: 10.1109/TIM.2020.3005282.
9. Астахов С.В., Меркурьев И.В., Подалков В.В. Влияние конечных деформаций резонатора на динамику и точность микромеханического гироскопа камертонного типа // Вестник МЭИ. – 2016. – №6. – С. 148-154.
10. Маслов А.А., Маслов Д.А., Меркурьев И.В., Подалков В.В. Влияние конечных деформаций резонатора на динамику микромеханического гироскопа интегрирующего типа на вибрирующем основании // XXIII Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам. – СПб.: АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2016. – С. 40-41.
11. Каудерер Г. Нелинейная механика. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1961. – 777 с.
12. Калёнова Н.В. Влияние угловых перемещений резонатора волнового твердотельного гироскопа на взаимосвязь рабочих колебаний с балочными // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2009. – №5. – С. 36-41.
13. Меркурьев И.В., Подалков В.В. Динамика микромеханического и волнового твердотельного гироскопов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 228 с.
14. Филин А.П. Элементы теории оболочек. – Л.: Стройиздат, 1987. – 384 с.
15. Ниналалов И.Г., Меркурьев И.В., Астахов С.В., Кубряк О.В. Методы повышения точности автономной системы ориентации и навигации на базе микромеханических гироскопов и оптико-электронных датчиков // XXIX Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам. – СПб.: АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2022. – С. 41-42.

References

1. Peshekhonov V.G. The Outlook for Gyroscopy // Gyroscopy and Navigation. 2020, no. 11, pp. 193-197.
2. Zhuravlev V.F. Hemispherical resonator gyroscope recent state, some aspects // Actual problems of aviation aerospace systems: processes, models, experiment. 2011, vol. 2(33), pp. 118-123.
3. Nguyen C.T.-C. MEMS technology for timing and frequency Control // IEEE Transactions Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control. 2007, vol. 54, no. 2, pp. 251-270.
4. Zhuravlev V.Ph., Perelyaev S.E. 3-D micromachined spherical shell resonators: implementation vision // Information innovative technologies. 2019, no. 1, pp. 83-90.
5. Zotov S.A., Prikhodko I.P., Trusov A.A., Shkel A.M. 3-D micromachined spherical shell resonators with integrated electromagnetic and electrostatic transducers // Solid-state sensors, actuators, and microsystems: workshop Hilton Head Island. – USA, South Carolina: SCSU, 2010. – P. 11-14.
6. Eklund E.J., Shkel A.M. Glass Blowing on a Wafer Level // Journal of Microelectromechanical systems. 2007, vol. 16, no. 2, pp. 232-239. DOI: 10.1109/JMEMS.2007.892887.
7. Askari S., Asadian M.H., Shkel A.M. High quality factor MEMS gyroscope with whole angle mode of operation // IEEE International Symposium on Inertial Sensors and Systems (INERTIAL). – Italy: Lake Como, 2018. – P. 1-4. – DOI: 10.1109/ISISS.2018.8358148.
8. Xu Z., Xi B., Wang D. A novel model for fully closed-loop system of hemispherical resonator gyroscope under force-to-rebalance // IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement. 2020, vol. 69, no. 12, pp. 1-4. DOI: 10.1109/TIM.2020.3005282.
9. Astakhov S.V., Merkur'yev I.V., Podalkov V.V. The influence of finite deformations of the resonator on the dynamics and accuracy of a tuning fork-type micromechanical gyroscope // Bulletin of MPEI. 2016, no. 6, pp. 148-154.
10. Maslov A.A., Maslov D.A., Merkur'yev I.V., Podalkov V.V. The influence of finite deformations of the resonator on the dynamics of an integrating-type micromechanical gyroscope on a vibrating base // XXIII Saint-Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems. – SPb.: CNII Elektropryor, 2016. – P. 40-41.
11. Kauderer G. Nonlinear mechanics. – М.: Foreign Literature Publishing House, 1961. – 777 p.
12. Kalenova N.V. Influence of the resonator angular displacements in a hemispherical resonator gyro on the coupling between the working and beam-type vibrations // Mechanics of Solids. 2009, no. 5, pp. 686-690.

13. Merkur'yev I.V., Podalkov V.V. Dynamics of micromechanical and wave solid-state gyroscopes. – M.: FIZMATLIT, 2009. – 228 p.
14. Filin A.P. Elements of shell theory. – L.: Stroizdat, 1987. – 384 p.
15. Ninalalov I.I., Merkur'yev I.V., Astakhov S.V., Kubryak O.V. Methods for increasing the accuracy of an autonomous orientation and navigation system based on micromechanical gyroscopes and optical-electronic sensors // XXIX Sait-Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems. – SPb.: CNII Elektropribor, 2022. – P. 41-42.

Сведения об авторах:

Information about authors:

Ниналалов Ибрагим Гусейнович – аспирант, ассистент кафедры Робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин	Ninalalov Ibragim Guseynovich – postgraduate student, assistant of the Department of robotics, mechatronics, dynamics and machine strength
Сайпулаев Гасан Русланович – аспирант, ассистент кафедры Робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин	Saypulaev Gasan Ruslanovich – postgraduate student, assistant of Department of robotics, mechatronics, dynamics and machine strength
Астахов Сергей Владимирович – кандидат технических наук, доцент кафедры Робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин	Astakhov Sergey Vladimirovich – candidate of technical science, associate professor of the Department of robotics, mechatronics, dynamics and machine strength
Сайпулаев Муса Русланович – кандидат технических наук, старший преподаватель кафедры Робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин	Saypulaev Musa Ruslanovich – candidate of technical sciences, senior lecturer of the Department of robotics, mechatronics, dynamics and machine strength
Салимов Максим Сергеевич – кандидат технических наук, старший преподаватель кафедры Робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин	Salimov Maksim Sergeevich – candidate of technical sciences, senior lecturer of the Department of robotics, mechatronics, dynamics and machine strength
ninalalov98@mail.ru	

Получена 15.09.2023