

## ИЗУЧЕНИЕ ОПЫТНЫХ ДАННЫХ НА ОСНОВЕ ЕДИНОГО УРАВНЕНИЯ ДИАГРАММЫ НАГРУЗКА-ДЕФОРМАЦИЯ

*Дуйшеналиев Т.Б., Мозгунова А.И., Москвин В.Г.*  
*Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва*

**Ключевые слова:** цилиндрический образец, осевое растяжение (сжатие), краевая задача, обобщенный закон Гука, диаграмма нагрузка-деформация, модуль Юнга, коэффициент Пуассона, константы Ламе.

**Аннотация.** Состоятельность обобщенного закона Гука проверяется по соотношениям, полученным из решения краевой задачи о равновесии цилиндра, граничные условия на основаниях которого упрощены на основе суженого и общего принципов Сен-Венана. Однако, эти соотношения – не есть обобщенный закон Гука, а тот его вид, в котором незримо присутствуют указанные принципы. Для обсуждения опытных данных предлагается новый критерий, полученный интегрированием дифференциального уравнения осевого движения цилиндра без упрощения граничных условий и гипотезы об одноосном характере напряженного состояния. Выведенное уравнение связывает нагрузку с осевой и кольцевой деформациями, достоверность его подтверждена экспериментальными данными. Новый критерий, являющийся и уравнением диаграммы нагрузка-деформация, хорошо описывает результаты экспериментов во всех областях деформирования при одних и тех же значениях констант Ламе. Это уравнение может рассматриваться как критерий для обсуждения обобщенного закона Гука.

## THE STUDY OF EXPERIMENTAL DATA BASED ON THE NEW EQUATION OF THE LOAD-DEFORMATION DIAGRAM

*Duishenaliev T.B., Mozgunova A.I., Moskvina V.G.*  
*National Research University "Moscow Power Engineering Institute", Moscow*

**Keywords:** cylindrical sample, axial tension (compression), boundary value problem, generalized Hooke's law, load-deformation diagram, Young's modulus, Poisson's ratio, Lamé constants.

**Abstract.** The validity of the generalized Hooke's law is checked by the relations obtained from the solution of the boundary value problem of the equilibrium of the cylinder, the boundary conditions on the basis of which are simplified on the basis of the narrowed and general principles of Saint-Venant. However, these relations are not a generalized Hooke's law, but the kind in which these principles are invisibly present. To discuss the experimental data, a new criterion is proposed, obtained by integrating the differential equation of the axial motion of the cylinder without simplifying the boundary conditions and the hypothesis of the uniaxial nature of the stress state. The derived equation relates the load to axial and annular deformations, its reliability is confirmed by experimental data. The new criterion, which is also the equation of the load-strain diagram, well describes the results of experiments in all areas of deformation at the same values of the Lamé constants. This equation can be considered as a criterion for discussing the generalized Hooke's law.

### Введение

Осевое растяжение (сжатие) – самый распространенный вид механических испытаний материалов. Измеряемые при этом величины нагрузки, осевой и кольцевой деформации используются для выяснения состоятельности законов, связывающих компоненты деформации с компонентами напряжения.

Таким испытаниям подвергаются все материалы, которые используются в практической деятельности человека (машиностроение, авиа- и судостроение, энергетика, строительство и т.д.). Для них определяются модуль Юнга и коэффициент Пуассона, а также указываются пределы применимости обобщенного закона Гука [1-3].

Обобщенный закон Гука в цилиндрической системе координат  $r$ ,  $\varphi$ ,  $z$  для осесимметричных напряженных состояний записывается в следующем виде [2, 4]:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= (\lambda + 2\mu)\epsilon_r + \lambda(\epsilon_\varphi + \epsilon_z), \quad \sigma_\varphi = \lambda\epsilon_r + (\lambda + 2\mu)\epsilon_\varphi + \lambda\epsilon_z, \\ \sigma_z &= \lambda(\epsilon_r + \epsilon_\varphi) + (\lambda + 2\mu)\epsilon_z,\end{aligned}\tag{1}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{1}{E} [\sigma_r - \nu(\sigma_\varphi + \sigma_z)], \quad \varepsilon_\varphi = \frac{1}{E} [\sigma_\varphi - \nu(\sigma_z + \sigma_r)], \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_\varphi)],\end{aligned}\quad (2)$$

где  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\varphi$ ,  $\sigma_z$  – соответственно, радиальное, кольцевое и осевое напряжения;  $\varepsilon_r$ ,  $\varepsilon_\varphi$ ,  $\varepsilon_z$  – радиальная, кольцевая и осевая деформации;  $\lambda$ ,  $\mu$  – константы Ламе;  $E$ ,  $\nu$  – модуль Юнга и коэффициент Пуассона.

Состоятельность обобщенного закона Гука проверяется по соотношениям (3), полученным из решения краевой задачи о равновесии цилиндра, граничные условия на основаниях которого упрощены на основе суженого и общего принципов Сен-Венана [3]:

$$\varepsilon_r(r, z) = -\frac{\nu}{E} \frac{P}{\pi R^2}, \quad \varepsilon_\varphi(r, z) = -\frac{\nu}{E} \frac{P}{\pi R^2}, \quad \varepsilon_z(r, z) = \frac{1}{E} \frac{P}{\pi R^2}, \quad (3)$$

где  $P$  – осевая нагрузка;  $\varepsilon_r(r, z)$ ,  $\varepsilon_\varphi(r, z)$ ,  $\varepsilon_z(r, z)$  – соответственно, радиальная, кольцевая и осевая деформации;  $R$  – радиус цилиндра.

Из соотношений (3) модуль Юнга и коэффициент Пуассона определяются как:

$$E = \frac{\sigma_z(R, z)}{\varepsilon_z(R, z)}, \quad \nu = -\frac{\varepsilon_\varphi(R, z)}{\varepsilon_z(R, z)}. \quad (4)$$

Однако, обычный критерий (3) имеет силу лишь в том случае, когда на основаниях цилиндра внешних касательных напряжений нет, а осевые напряжения распределены равномерно (рис. 1, з).

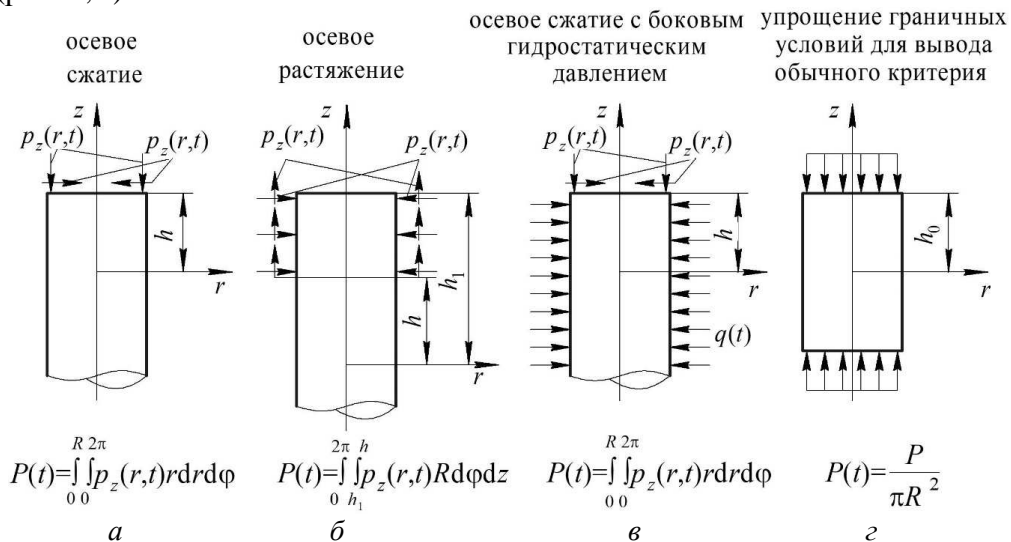


Рис. 1. Граничные условия, используемые при выводе нового (схемы а, б, в) и обычного (схема з) критериев

## Методы исследования

### Краевая задача

Пусть  $u(r, z, t)$ ,  $w(r, z, t)$  – соответственно, функции радиального и осевого перемещений.

Краевая задача для растягиваемого или сжимаемого цилиндрического образца высотой  $2h$  (схемы а, б, в на рис. 1) представляется уравнениями движения:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\sigma_{zr}}{r} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (5)$$

совместности деформаций:

$$\nabla^2 \sigma_r - \frac{2}{r^2} (\sigma_r - \sigma_\varphi) + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial r^2} + \frac{\rho}{E} \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = 0,$$

$$\nabla^2 \sigma_\varphi - \frac{2}{r^2} (\sigma_r - \sigma_\varphi) + \frac{1}{1+\nu} \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma}{\partial r} + \frac{\rho}{E} \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = 0,$$

$$\nabla^2 \sigma_z + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2} + \frac{\rho}{E} \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = 0, \quad (6)$$

$$\nabla^2 \sigma_{rz} - \frac{1}{r^2} \sigma_{rz} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial r \partial z} = 0,$$

где  $\nabla^2 = \Delta^2 - \frac{\rho}{E} 2\nu \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ ,  $\Delta^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ ,  $\sigma = \sigma_r + \sigma_\phi + \sigma_z$ ,

граничными условиями:

$$\sigma_z(r, \pm h, t) = p_r(r, t), \sigma_z(r, \pm h, t) = p_z(r, t), \sigma_r(R, z, t) = 0, \sigma_{rz}(R, z, t) = 0 \quad (7)$$

и начальными условиями:

$$u(r, z, 0) = 0, w(r, z, 0) = 0, \frac{\partial u(r, z, 0)}{\partial t} = 0, \frac{\partial w(r, z, 0)}{\partial t} = 0. \quad (8)$$

Эта весьма сложная задача. Она не решаема из-за неизвестности функций распределения осевого  $p_z(r, t)$  и радиального  $p_r(r, t)$  усилий на основаниях образца (рис. 1) [3, 4].

### Уравнение диаграмм нагрузка-деформация

Проинтегрируем второе из уравнений осевого движения (5) по верхней половине испытуемого образца (рис. 1):

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^h \left( \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} \right) r \, dr \, d\phi \, dz = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^h \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} r \, dr \, d\phi \, dz.$$

Интегрирование приводит к выражению:

$$P(t) = 2\pi \int_0^R \sigma_z(r, 0, t) \, dr + \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^h \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} r \, dr \, d\phi \, dz.$$

По обобщенному закону Гука осевое напряжение определяется как:

$$\sigma_z(r, 0, t) = \lambda \left( \frac{\partial u(r, 0, t)}{\partial r} + \frac{u(r, 0, t)}{r} \right) + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial w(r, 0, t)}{\partial z}.$$

Его подстановка в предыдущее выражение дает:

$$P(t) = \pi R^2 \left( \frac{\lambda(\lambda + 2\mu)}{R^2} \int_0^R \frac{\partial w(r, 0, t)}{\partial z} r \, dr + 2\lambda \frac{u(R, 0, t)}{R} \right) + \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^h \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} r \, dr \, d\phi \, dz.$$

Из-за симметрии нагрузки  $w(r, 0, t) = 0$ . По соображениям непрерывности и при значениях  $z$ , близких к нулю, зависимость этой функции от  $r$  очень слабая, что позволяет сделать приближение:

$$\frac{\partial w(r, 0, t)}{\partial z} = \frac{\partial w(R, 0, t)}{\partial z} = \varepsilon_z(R, 0, t).$$

Теперь предыдущее выражение приводится к виду:

$$\varepsilon_z(R, 0, t) = \frac{1}{\lambda + 2\mu} \left( \frac{P(t)}{\pi R^2} - 2\lambda \varepsilon_\phi(R, 0, t) \right) - \frac{1}{(\lambda + 2\mu)\pi R^2} \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^h \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} r \, dr \, d\phi \, dz.$$

Величина последнего слагаемого во много раз меньше величин деформаций. Ввиду этого, последнее выражение, без ущемления его точности, можно представить в виде:

$$\varepsilon_z(R, 0, t) = \frac{1}{\lambda + 2\mu} \left( \frac{P(t)}{\pi R^2} - 2\lambda \varepsilon_\phi(R, 0, t) \right). \quad (9)$$

В этом уравнении  $\lambda, \mu$  – константы Ламе,  $P(t)$  – нагрузка,  $\varepsilon_z(R, 0, t)$  – осевая деформация,  $\varepsilon_\phi(R, 0, t)$  – кольцевая деформация.

Интегрирование уравнения динамического равновесия цилиндра в осесимметричных напряженных состояниях привел к уравнению (9), которое содержит только те величины, которые замеряются при опытах, но, тем не менее, соответствует самому общему представлению граничных условий краевой задачи.

### Определение констант Ламе

Допустим, что в моменты времени  $t_1$  и  $t_2$  при осесимметричном сжатии (растяжении) цилиндров измерены осевая нагрузка, осевая и кольцевая деформации:

$$P(t_1), \varepsilon_\varphi(R, 0, t_1), \varepsilon_z(R, 0, t_1), \\ P(t_2), \varepsilon_\varphi(R, 0, t_2), \varepsilon_z(R, 0, t_2).$$

Этих данных достаточно для определения констант Ламе для испытываемого материала. Напишем уравнение (9) для этих двух моментов времени в виде:

$$(\lambda + 2\mu) \cdot \varepsilon_z(R, 0, t_1) + 2\lambda \varepsilon_\varphi(R, 0, t_1) = \frac{P(t_1)}{\pi R^2}, \\ (\lambda + 2\mu) \cdot \varepsilon_z(R, 0, t_2) + 2\lambda \cdot \varepsilon_\varphi(R, 0, t_2) = \frac{P(t_2)}{\pi R^2}. \quad (10)$$

Решая уравнения (10) относительно  $(\lambda + 2\mu)$  и  $2\lambda$ , находим:

$$(\lambda + 2\mu) = \left( \frac{P(t_1)}{\pi R^2} \varepsilon_\varphi(R, 0, t_2) - \frac{P(t_2)}{\pi R^2} \varepsilon_\varphi(R, 0, t_1) \right) / \Delta, \\ 2\lambda = \left( \frac{P(t_2)}{\pi R^2} \varepsilon_z(R, 0, t_1) - \frac{P(t_1)}{\pi R^2} \varepsilon_z(R, 0, t_2) \right) / \Delta, \quad (11)$$

где  $\Delta = \varepsilon_z(R, 0, t_1) \cdot \varepsilon_\varphi(R, 0, t_2) - \varepsilon_z(R, 0, t_2) \cdot \varepsilon_\varphi(R, 0, t_1)$ .

Далее, из уравнений (11) нетрудно определить значения  $\lambda$ ,  $\mu$ .

Модуль упругости и коэффициент Пуассона для изучаемого материала можно определить, используя известные равенства [1-4]:

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}.$$

Изучение многочисленных экспериментальных данных, полученных различными исследователями при испытаниях материалов на осевое растяжение и сжатие, осуществлялось на основании компьютерной программы в системе MathCad [5, 6].

Напишем уравнение (9) в виде:

$$\lambda + 2\mu = \frac{P(t)}{\pi R^2 \left( \varepsilon_z(R, 0, t) + \frac{2\lambda}{\lambda + 2\mu} \varepsilon_\varphi(R, 0, t) \right)}. \quad (12)$$

Допустим, для данного материала отношение  $\frac{2\lambda}{\lambda + 2\mu} = a$  известно.

В этом случае величина дроби в правой части (12) должна оставаться постоянной на любой стадии деформирования. Иными словами, эта дробь должна иметь одну и ту же величину в начальной части, в области течения и в зоне упрочнения опытной диаграммы. При составлении компьютерной программы исходным являлось это обстоятельство [6].

### Обсуждение результатов

#### Определение радиальной деформации и напряжений на боковой поверхности цилиндра при его осевом сжатии (растяжении)

Радиальная деформация не замеряется при осевом растяжении и сжатии цилиндрических образцов, ибо это невозможно осуществить.

Однако, величину этой деформации на боковой поверхности цилиндра можно определить из условия отсутствия внешних усилий на этой поверхности [3]

$$\sigma_r(R, 0, t) = (\lambda + 2\mu) \cdot \varepsilon_r(R, 0, t) + \lambda(\varepsilon_\varphi(R, 0, t) + \varepsilon_z(R, 0, t)) = 0. \quad (13)$$

Из этого граничного условия следует:

$$\varepsilon_r(R, 0, t) = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} (\varepsilon_\varphi(R, 0, t) + \varepsilon_z(R, 0, t)). \quad (14)$$

Величины кольцевой и осевой деформации поддаются измерению на всех стадиях деформирования. Соответствующие им радиальные деформации можно установить, используя равенство (14).

Теперь, зная величины трех компонентов деформации, нетрудно определить величины осевого и кольцевого напряжения в точках боковой поверхности цилиндра. В упомянутой выше компьютерной программе наряду с определением упругих констант материала производится и вычисление величин радиальной деформации  $\varepsilon_r(R,0,t)$ , осевого  $\varepsilon_z(R,0,t)$  и кольцевого  $\sigma_\phi(R,0,t)$  напряжений.

Радиальная деформация вычисляется с помощью выражения (14), а величины осевого и кольцевого напряжений в точке боковой поверхности определяются по следующим выражениям:

$$\sigma_\phi(R,0,t) = \lambda \cdot \varepsilon_r(R,0,t) + (\lambda + 2\mu) \cdot \varepsilon_\phi(R,0,t) + \lambda \cdot \varepsilon_z(R,0,t), \quad (15)$$

$$\sigma_z(R,0,t) = \lambda \cdot \varepsilon_r(R,0,t) + \lambda \cdot \varepsilon_\phi(R,0,t) + (\lambda + 2\mu) \cdot \varepsilon_z(R,0,t). \quad (16)$$

Их значения приведены в столбцах (8), (9) таблиц 1 и 2.

### Новое толкование диаграмм деформирования материалов

Уравнение (9) дает новое толкование опытным кривым, построенным по результатам испытаний на осевое растяжение и сжатие цилиндрических образцов [3, 7] (рис. 2).

#### Осевое растяжение и сжатие

В таблице 1 приведены результаты сопоставления уравнения (9) для ряда материалов. Опыты над сталью 30 и алюминием принадлежат А.М. Жукову [8], над серым чугуном – В.А. Паняеву [9].

В четвертом столбце приводятся опытные величины осевой деформации, в пятом столбце даны значения этой деформации, рассчитанные по уравнению (9). Их отклонения в % приводятся в шестом столбце. Для наглядности опытные и расчетные величины осевой деформации показаны на рисунке 3.

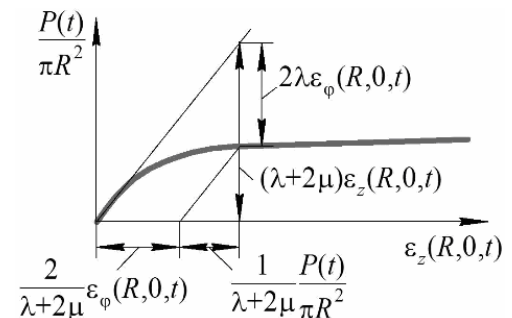


Рис. 2. Толкование диаграмм нагрузка-деформация на основе уравнения (9)

Табл. 1. Деформации и напряжения при растяжении цилиндрического тела

Нагрузка, кгс/мм <sup>2</sup>	Деформации на боковой поверхности цилиндра, *10 <sup>3</sup> мм/мм				Отклонение ε <sub>z</sub> (R,0,t) %	Напряжения на боковой поверхности цилиндра, кгс/мм <sup>2</sup>		
	ε <sub>r</sub> (R,0,t) (расчет)	ε <sub>φ</sub> (R,0,t) (опыт)	ε <sub>z</sub> (R,0,t) (опыт)	ε <sub>z</sub> (R,0,t) (расчет)		σ <sub>r</sub> (R,0,t) (опыт)	σ <sub>φ</sub> (R,0,t) (расчет)	σ <sub>z</sub> (R,0,t) (расчет)
(опыт)	(расчет)	(опыт)	(опыт)	(расчет)	%	(опыт)	(расчет)	(расчет)
1	2	3	4	5	6	7	8	9
Сталь 30 [9]: λ = 43321 кгс/мм <sup>2</sup> , μ = 1394 кгс/мм <sup>2</sup> , E = 4140 кгс/мм <sup>2</sup> , ν = 0,484								
10,0	-0,314	-0,136	0,470	0,472	-1	0	0,5	2,2
15,0	-0,467	-0,203	0,700	0,707	-1	0	0,7	3,3
20,0	-0,627	-0,273	0,940	0,947	-1	0	1,0	4,4
25,0	-0,874	-0,380	1,310	1,256	4	0	1,4	6,1
30,0	-0,930	-0,420	1,410	1,440	-2	0	1,4	6,5
32,0	-1,067	-0,464	1,600	1,566	2	0	1,7	7,4
33,6	-2,819	-2,600	5,600	5,614	0	0	0,6	23,5
35,6	-3,683	-3,600	7,520	7,537	0	0	0,2	31,2
38,4	-4,961	-5,120	10,400	10,453	-1	0	-0,4	42,8
41,6	-7,122	-7,520	15,100	15,033	0	0	-1,1	62,0

Табл. 1. Продолжение

Нагрузка, кгс/мм <sup>2</sup>	Деформации на боковой поверхности цилиндра, *10 <sup>3</sup> мм/мм				Откло- нение $\varepsilon_z(R,0,t)$	Напряжения на боковой поверхности цилиндра, кгс/мм <sup>2</sup>		
	$\varepsilon_r(R,0,t)$ (расчет)	$\varepsilon_\varphi(R,0,t)$ (опыт)	$\varepsilon_z(R,0,t)$ (опыт)	$\varepsilon_z(R,0,t)$ (расчет)		$\sigma_r(R,0,t)$ (опыт)	$\sigma_\varphi(R,0,t)$ (расчет)	$\sigma_z(R,0,t)$ (расчет)
(опыт)	(расчет)	(опыт)	(опыт)	(расчет)	%	(опыт)	(расчет)	(расчет)
1	2	3	4	5	6	7	8	9
Серый чугун [10]: $\lambda = 13768$ кгс/мм <sup>2</sup> , $\mu = 2805$ кгс/мм <sup>2</sup> , $E = 7940$ кгс/мм <sup>2</sup> , $\nu = 0,415$								
-1,9	0,073	0,034	-0,137	-0,146	-7	0	-0,2	-1,2
-3,8	0,158	0,071	-0,293	-0,297	-1	0	-0,5	-2,5
-5,8	0,243	0,114	-0,456	-0,461	-1	0	-0,7	-3,9
-7,7	0,323	0,158	-0,612	-0,622	-2	0	-0,9	-5,2
-9,6	0,398	0,200	-0,760	-0,780	-3	0	-1,1	-6,5
-11,6	0,480	0,255	-0,930	-0,961	-3	0	-1,3	-7,9
-13,5	0,553	0,310	-1,088	-1,137	-5	0	-1,4	-9,2
-15,4	0,629	0,372	-1,258	-1,323	-5	0	-1,4	-10,6
-17,3	0,710	0,433	-1,432	-1,508	-5	0	-1,6	-12,0
-19,3	0,786	0,504	-1,610	-1,712	-6	0	-1,6	-13,4
-21,4	0,884	0,582	-1,826	-1,931	-6	0	-1,7	-15,2
-23,1	0,995	0,682	-2,082	-2,161	-4	0	-1,8	-17,3
-25,0	1,115	0,816	-2,386	-2,450	-3	0	-1,7	-19,6
-26,9	1,241	0,994	-2,740	-2,801	-2	0	-1,4	-22,3
-28,9	1,428	1,304	-3,314	-3,344	-1	0	-0,7	-26,6
-30,8	1,691	1,786	-4,166	-4,127	1	0	0,5	-32,9
-32,7	2,072	2,394	-5,310	-5,089	4	0	1,8	-41,4
-34,6	2,441	3,182	-6,576	-6,307	4	0	4,3	-50,4
-36,6	2,822	4,206	-8,178	-7,861	4	0	7,8	-61,7
-38,5	3,203	5,350	-9,858	-9,589	3	0	12,0	-73,3
-40,4	3,499	6,585	-11,51	-11,44	1	0	17,3	-84,2
-42,3	3,972	7,940	-13,53	-13,465	0	0	22,3	-98,2
-44,3	4,650	9,265	-15,81	-15,451	2	0	25,9	-114,8
-46,2	5,144	11,080	-18,32	-18,129	1	0	33,3	-131,6
-48,1	5,847	12,760	-20,99	-20,614	2	0	38,8	-150,6
Алюминий [9]: $\lambda = 13128$ кгс/мм <sup>2</sup> , $\mu = 538$ кгс/мм <sup>2</sup> , $E = 1494$ кгс/мм <sup>2</sup> , $\nu = 0,48$								
3,0	-0,268	-0,130	0,420	0,451	-7	0	0,1	0,7
4,5	-0,402	-0,195	0,630	0,667	-7	0	0,2	1,1
6,0	-0,536	-0,260	0,840	0,903	-7	0	0,3	1,5
7,5	-0,961	-0,460	1,500	1,378	8	0	0,5	2,7
8,0	-1,017	-0,500	1,600	1,487	7	0	0,6	2,8
9,0	-1,904	-1,700	3,760	3,776	-0	0	0,2	6,1
10,5	-4,806	-5,200	10,400	10,351	0	0	-0,4	16,4
12,0	-9,057	-10,40	20,200	20,068	1	0	-1,4	31,5

### Осевое сжатие с боковым гидростатическим давлением

Рассматриваются опыты, проведенные по схеме, показанной на рисунке 1, в. По этой схеме проводятся опыты на трехосное сжатие горных пород в камерах высокого давления [3]. Здесь наличие бокового давления надо учесть в граничном условии – радиальное напряжение равно приложенному боковому давлению.

Сравнение уравнения (9) с результатами экспериментальных исследований алевролита в камере трехосного сжатия приведено в таблице 2 и на рисунке 4. Опыт принадлежит Ставрогину А.Н. и Протосене А.Г. [10].

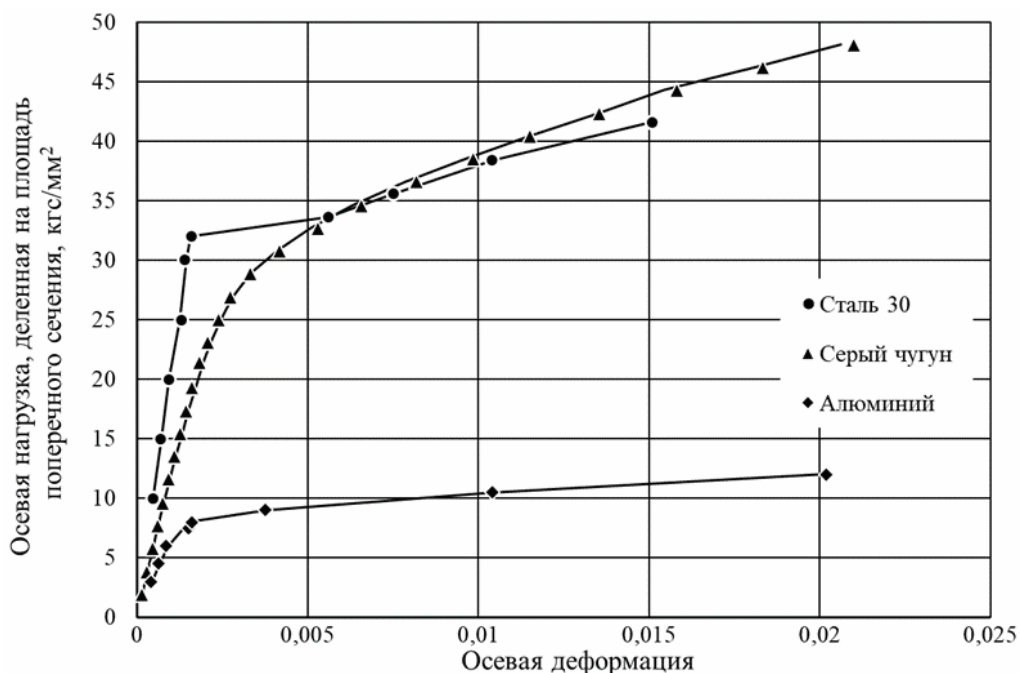


Рис. 3. Сравнение опытных и расчетных величин осевой деформации: точки – опытные данные [8, 9], линии – расчет по формуле (9)

Табл. 2. Деформации и напряжения при всестороннем сжатии цилиндрического тела

Нагрузка, кгс/мм <sup>2</sup>	Деформации на боковой поверхности цилиндра, *10 <sup>3</sup>				Отклонение $\epsilon_z(R,0,t)$	Напряжения на боковой поверхности цилиндра, кгс/мм <sup>2</sup>		
	$\epsilon_r(R,0,t)$	$\epsilon_\phi(R,0,t)$	$\epsilon_z(R,0,t)$	$\epsilon_z(R,0,t)$		$\sigma_r(R,0,t)$	$\sigma_\phi(R,0,t)$	$\sigma_z(R,0,t)$
(опыт)	(расчет)	(опыт)	(опыт)	(расчет)	%	(опыт)	(расчет)	(расчет)
1	2	3	4	5	6	7	8	9
Алевролит [11]: $\lambda = 234625$ кгс/мм <sup>2</sup> , $\mu = 109272$ кгс/мм <sup>2</sup> , $E = 293096$ кгс/мм <sup>2</sup> , $\nu = 0,341$								
-500	0,518	0,360	-1,360	-1,476	-9	0	-34,5	-410,4
-1000	1,245	0,545	-2,950	-2,771	6	0	-153,0	-916,8
-1500	1,755	1,140	-4,530	-4,490	1	0	-134,4	-1373,0
-1809	1,812	2,800	-6,300	-6,891	-9	0	-215,9	-1772,9
-1000	0,800	0,230	-2,270	-2,445	-8	-116,0	-240,6	-787,0
-2000	1,717	0,455	-4,760	-4,885	-3	-232,0	-507,8	-1647,5
-3000	2,768	1,270	-8,100	-7,935	2	-348,0	-675,4	-2723,2
-3784	3,401	3,150	-11,590	-11,612	0	-439,0	-493,9	-3715,2
-2000	1,309	-0,364	-4,100	-4,036	2	-454,0	-819,7	-1636,2
-4000	2,584	-0,220	-8,640	-8,599	1	-908,0	-1520,7	-3360,8
-5000	3,265	0,000	-11,140	-11,033	1	-1135,0	-1848,1	-4282,7
-6000	4,060	0,454	-14,100	-13,710	3	-1362,0	-2150,0	-5330,7
-7000	4,513	0,910	-16,400	-16,389	0	-1589,0	-2376,5	-6159,5
-8000	5,405	1,820	-20,000	-19,538	2	-1816,0	-2599,5	-7368,2
-9000	6,458	3,360	-24,540	-23,339	5	-2043,0	-2719,9	-8817,7
-10000	7,510	5,820	-30,000	-28,093	6	-2270,0	-2639,3	-10467,6
-10340	7,764	6,900	-31,900	-29,962	6	-2347,0	-2535,9	-11015,5

Из таблиц 1, 2 видно, что уравнение (9) хорошо описывает поведение приведенных там материалов на всех стадиях деформирования. Рассчитанные по этому уравнению величины осевой деформации мало отличаются от величин, замеренных во время опыта. В этом можно убедиться, сравнивая данные 4-го и 5-го столбцов. Их отклонения в % приведены в столбце 6.

Это также наглядно видно из рисунков 3, 4, где опытные и расчетные величины осевой деформации хорошо совпадают между собой.

Приведенные в работе [3] результаты испытаний обширного класса горных пород (мрамор, уголь, песчаник, аргиллит, талькохлорит, диабаз и т.д.) также хорошо описываются уравнением (9).

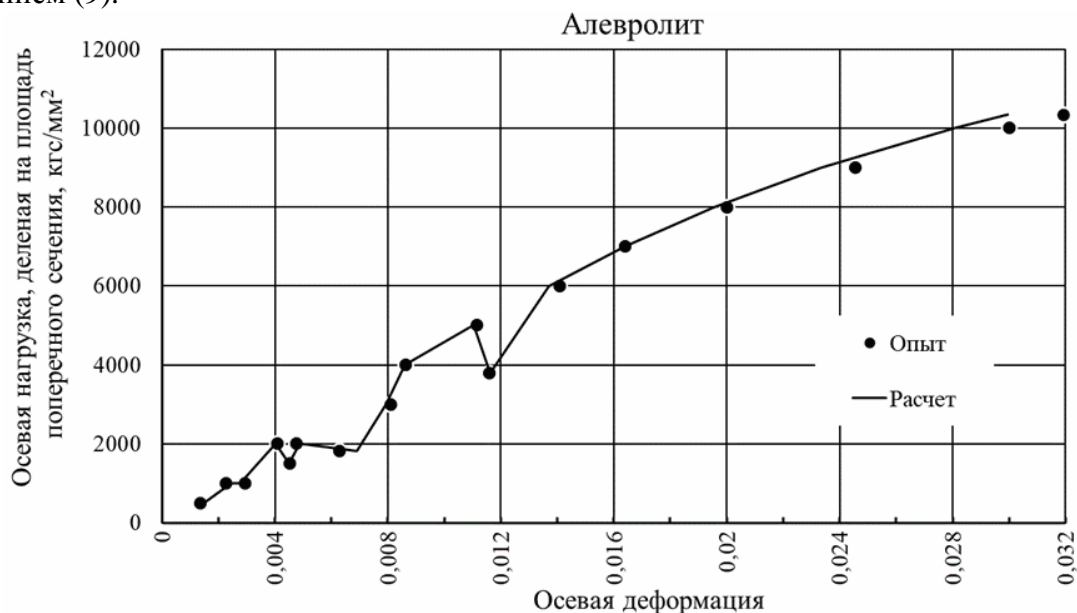


Рис. 4. Сравнение опытных [10] и рассчитанных по формуле (9) величин осевой деформации алевролита

### Заключение

Уравнение диаграмм нагрузка-деформация выведено путем интегрирования дифференциального уравнения, выражающего условие динамического равновесия цилиндра в осесимметричном сжатии, осесимметричном растяжении и осесимметричном сжатии с боковым гидростатическим давлением (рис. 1, схемы *a, b, c*) без упрощений, используемых при выводе общепринятого критерия (3). Граничные условия приняты без гипотезы об одноосности напряженного состояния.

Уравнение (9) обладает общностью – внешние усилия на схемах *a, б, в* (рис. 1) могут иметь любые, к тому же изменяющиеся во времени, распределения. Такая произвольность охватывает реальные распределения внешних усилий и изменения этих распределений в процессе испытаний. Уравнение (9) связывает нагрузку  $P(t)$  с осевой  $\epsilon_z(R,0,t)$  и кольцевой  $\epsilon_\varphi(R,0,t)$  деформациями, которые можно измерить инструментальными методами. Компоненты напряжения, как известно, не поддаются непосредственному замеру. Они рассчитываются по формулам (14), (15) и (16).

На основании составленных компьютерных программ в системе MathCad определены константы материала, сопоставлены теоретические и экспериментальные значения деформаций и напряжений стали 30, серого чугуна, алюминия и алевролита. Опытные данные таковы, что, вычисляя правую часть уравнения (9) при одних и тех же величинах констант Ламе, получаем такие расчетные величины осевой деформации (столбец 5, табл. 1 и 2), которые хорошо совпадают с опытными величинами на всех уровнях деформирования (табл. 1, 2 и рис. 3, 4).

### Список литературы

1. Новацкий В. Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
2. Седов Л.И. Механика сплошной среды: учебник для вузов – 6-е изд. – СПб.: Лань, 2004. – Т. 1. – 528 с.; Т. 2. – 560 с.
3. Дуйшеналиев Т.Б. Неклассические решения механики деформируемого тела. – М.: Изд-во МЭИ, 2017. – 400 с.



4. Жакыпбеков А.Б., Дуйшеналиев Т.Б. Уравнение диаграммы нагрузки-деформации // Математический журнал. – 2004. – Т. 4, № 3(13). – С. 27-41.
5. Komissarova T., Duishenaliev T., Kudryavtseva J. Determination of Constants of Structural Materials // AIP Conference Proceedings. 2023, vol. 2697, p. 020004. doi.org/10.1063/5.0137116.
6. Duishenaliev T.B., Dogadina T.N., Dikarev D.S. Description of nonlinear deformation diagrams of electrotechnical materials // 2023 5th International Youth Conference on Radio Electronics, Electrical and Power Engineering (REEPE), Moscow, Russian Federation. 2023, pp. 1-5. doi.org/10.1109/REEPE57272.2023.10086760.
7. Дуйшеналиев Т.Б., Мекенбаев Б.Т., Щугорев В.Н., Цой В.Э. Неклассическая интерпретация экспериментальных диаграмм осевого растяжения (сжатия) цилиндрических образцов // Материалы 12-го Всероссийского съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. – Уфа, 2019. – Т. 3. – С. 1178-1180.
8. Жуков А.М. О коэффициенте Пуассона в пластической области // Известия Академии наук СССР. – 1954. – № 12. – С. 86-91.
9. Паняев В.А. О деформациях и разрушении полухрупких тел: дисс. ... канд. техн. наук. – Фрунзе, 1970. – 153 с.
10. Ставрогин А.Н., Протосеня А.Г. Пластичность горных пород. – М.: Недра, 1979. – 301 с.

### References

1. Nowacki W. Theory of Elasticity. – М.: World, 1975. – 872 p.
2. Sedov L.I. Continuum mechanics. – SPb.: Lan', 2004. – Vol. 1. – 528 p.; Vol. 2. – 560 p.
3. Duishenaliev T.B. Non-classical solutions of the mechanics of a deformable body. – М.: Publ. house MEI, 2017. – 400 p.
4. Zhakupbekov A.B., Duishenaliev T.B. The equation of the load-deformation diagram // Mathematical Journal. 2004, vol. 4, no. № 3(13), pp. 27-41.
5. Komissarova T., Duishenaliev T., Kudryavtseva J. Determination of Constants of Structural Materials // AIP Conference Proceedings. 2023, vol. 2697, p. 020004. doi.org/10.1063/5.0137116.
6. Duishenaliev T.B., Dogadina T.N., Dikarev D.S. Description of nonlinear deformation diagrams of electrotechnical materials // 2023 5th International Youth Conference on Radio Electronics, Electrical and Power Engineering (REEPE), Moscow, Russian Federation. 2023, pp. 1-5. doi.org/10.1109/REEPE57272.2023.10086760.
7. Duishenaliev T.B., Mekenbaev B.T., Shchugorev V.N., Tsoi V.E. Non-classical interpretation of experimental diagrams of axial tension (compression) of cylindrical specimens // Materials of the 12th All-Russian Congress on Fundamental Problems of Theoretical and Applied Mechanics. – Ufa, 2019. – Vol. 3. – P. 1178-1180.
8. Zhukov A.M. On Poisson's ratio in the plastic area // News of the Academy of Science of USSR. 1954, no. 12, pp. 86-91.
9. Panyaev V.A. On the mechanics of destruction of semi-brittle bodies: Diss. ... cand. of tech. sc. – Frunze, 1974. – 153 p.
10. Stavrogin A.N., Protesena A.G. Plasticity of rocks. – М.: Nedra, 1979. – 301 p.

#### *Сведения об авторах:*

#### *Information about authors:*

<b>Дуйшеналиев Туратбек Болотбекович</b> – доктор физико-математических наук, профессор	<b>Duishenaliev Turatbek Bolotbekovich</b> – doctor of physical and mathematical sciences, professor
<b>Мозгунова Анна Ивановна</b> – кандидат технических наук, доцент	<b>Mozgunova Anna Ivanovna</b> – candidate of technical sciences, associate professor
<b>Москвин Валерий Георгиевич</b> – кандидат технических наук, доцент	<b>Moskvin Valery Georgievich</b> – candidate of technical sciences, associate professor
DuyshenalievT@mpei.ru	

Получена 15.06.2023