

## ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ ВОЛЧКА ТОМПСОНА

*Андреев А.И., Чанчиков В.А., Славин Б.М., Перекрестов А.П.  
Астраханский государственный технический университет, Астрахань*

**Ключевые слова:** волчок Томпсона, прецессия волчка, движение центра масс, кинетическая энергия, динамика волчка.

**Аннотация.** В работе рассматриваются энергетические зависимости прецессии волчка Томпсона, а именно, динамика кинетической энергии. Проведён эксперимент по исследованию изменения угловой скорости в ходе вращения волчка Томпсона. В ходе эксперимента изменялся коэффициент трения, для этого подбирались как материал поверхности, так и материал волчка. Полученные данные дают возможность рассматривать динамику кинетической энергии как нелинейную величину и зависящую от коэффициента трения. Также проведён анализ кинетической энергии с учётом изменения осевого момента инерции. Анализ результатов эксперимента показывает возможность использования волчка Томпсона в методах измерения коэффициента трения, как одного из главных составляющих изменения угловой скорости и кинетической энергии. В результате предложено возможное направление использования волчка Томпсона в скоростных трибометрах.

## INVESTIGATION OF THE DYNAMICS OF THE KINETIC ENERGY OF THE THOMPSON TOP

*Andreev A.I., Chanchikov V.A., Slavin B.M., Perekrestov A.P.  
Astrakhan State Technical University, Astrakhan*

**Keywords:** Thompson's top, top precession, movement of the center of mass, kinetic energy, top dynamics.

**Abstract.** The paper considers the energy dependences of the precession of the Thompson top, namely, the dynamics of the kinetic energy. An experiment was carried out to study the change in the angular velocity during the rotation of the Thompson top. During the experiment, the coefficient of friction was changed; for this, both the material of the surface and the material of the top were selected. The data obtained make it possible to consider the dynamics of kinetic energy as a nonlinear quantity and dependent on the friction coefficient. An analysis of the kinetic energy was also carried out, taking into account the change in the axial moment of inertia. An analysis of the experimental results shows the possibility of using the Thompson top in methods for measuring the coefficient of friction, as one of the main components of the change in angular velocity and kinetic energy. As a result, a possible direction of using the Thompson top in high-speed tribometers was proposed.

### Введение

Исследование китайского волчка является интересной задачей как с точки зрения исследования механики твёрдого тела, так и в практическом применении, например, в трибометрах или гравиметрах.

При прецессии волчка особое место играет динамика кинетической энергии во время всей прецессии.

В работе [1] показано, что для начала прецессии кинетическая энергия должна как минимум вдвое превосходить потенциальную энергию:

$$J\omega^2 > 2mg\Delta h, \quad (1)$$

где  $J$  – осевой момент инерции волчка,  $\omega$  – угловая скорость вращения,  $m$  – масса тела,  $\Delta h$  – изменение положения центра тяжести,  $g$  – ускорение свободного падения.

В данном исследовании говорится также о сложности описания перехода кинетической энергии в потенциальную.

Подобные выкладки в других исследованиях [2-4] показывают схожую картину. В общем случае кинетическая и потенциальная энергии вращающегося тела могут быть представлены в виде уравнений:

$$\begin{cases} T_k = \frac{1}{2} m V_O^2 + m V_O * V_{gr} + T_r, \\ U = mg(l \cos \theta + \omega(t)), \\ T_r = \frac{1}{2} W(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} J(\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi})^2, \end{cases} \quad (2)$$

где  $W$  и  $J$  – экваториальный и осевой моменты инерции для точки  $O$ ,  $l$  – расстояние от точки касания до центра масс  $G$  волчка,  $V_O$  – скорость точки  $O$ ,  $V_{gr}$  и  $T_r$  – относительные (в системе координат  $OXYZ$ ) скорости центра масс волчка и его кинетическая энергия вращательного движения,  $\psi$ ,  $\theta$ ,  $\phi$  – обобщенные координаты углов.

Скорость изменения кинетической энергии зависит от потерь на трение и возникающего гироскопического момента при вращении волчка:

$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}_{mp}], \quad (3)$$

где  $\vec{F}_{mp}$  – сила трения,  $\vec{r}$  – радиус-вектор (расстояние) до центра тяжести волчка от точки касания.

Это в свою очередь зависит от коэффициентов трения в паре. Исследуя прецессию при разных значениях коэффициента трения, можно установить отношения перехода кинетической энергии в потенциальную и возможные пределы существования прецессии на поверхностях с различной шероховатостью.

Подобное исследование позволяет более детально понять динамику энергии при прецессии волчка Томпсона и установить возможные формы перехода энергии и её диссипации при вращательном движении.

Существенным отличием прецессии волчка Томпсона от прецессии стационарного гироскопа видится то, что волчок Томпсона прецессирует при собственном вращении.

Актуальность данной работы заключается в экспериментальном исследовании изменения кинетической энергии при прецессии волчка Томпсона на поверхностях с различной шероховатостью.

Новизна работы заключается в получении теоретических и экспериментальных данных по динамике волчка Томпсона в зависимости от угловой скорости и коэффициента трения в паре.

### Материалы и методы

В исследовании проводились опыты на двух волчках Томпсона разной массы, изготовленных из пластмассы и стали. Масса каждого из волчка – 30 г. Волчки запускались на поверхностях с разной шероховатостью. Прежде всего, использовались покрытия – сталь, дерево и пластмасса. Скорость прецессии (рис. 1) определялась в ходе замедленной съёмки, для этого на поверхность волчка наносили линию, хорошо заметную при обработке видео.

Коэффициенты трения в парах приведены в таблице 1.

При проведении опытов были получены данные прецессии для описанных волчков. Для достоверности опыт по прецессии на одной и той же поверхности проводился три раза с целью уменьшения случайных погрешностей в ходе эксперимента.

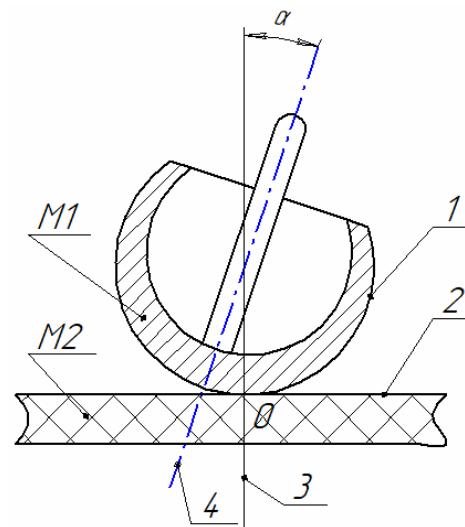


Рис. 1. Прецессия волчка на поверхности с установленной шероховатостью: 1 – волчок, 2 – поверхность, 3 – нормаль к поверхности, 4 – ось симметрии волчка,  $O$  – точка касания волчка и поверхности,  $M_1$  – материал волчка,  $M_2$  – материал поверхности,  $\alpha$  – угол между осями симметрии и нормали к поверхности

Табл. 1. Коэффициенты трения при прецессии волчка

	Сталь ( $M_1$ )	Пластик ( $M_1$ ) – ПП
Сталь ( $M_2$ )	0,14	0,2
Пластик ( $M_2$ ) – ПВХ	0,32	0,37
Дерево ( $M_2$ )	0,56	0,63

### Экспериментальные данные

Данные проведённых экспериментов – зависимости падения угловой скорости при совершении волчком Томпсона прецессии – показаны на рисунке 2. В качестве данных приведены экспериментальные результаты с шагом коэффициента трения 0,1. Также на рисунке приведена расчётная зависимость, полученная на основании обработки всех проведённых экспериментов (теоретическое решение). Графики зависимостей близки к экспоненциальным функциям. Выглаживание графика функции соответствует подъёму волчка на ножку.

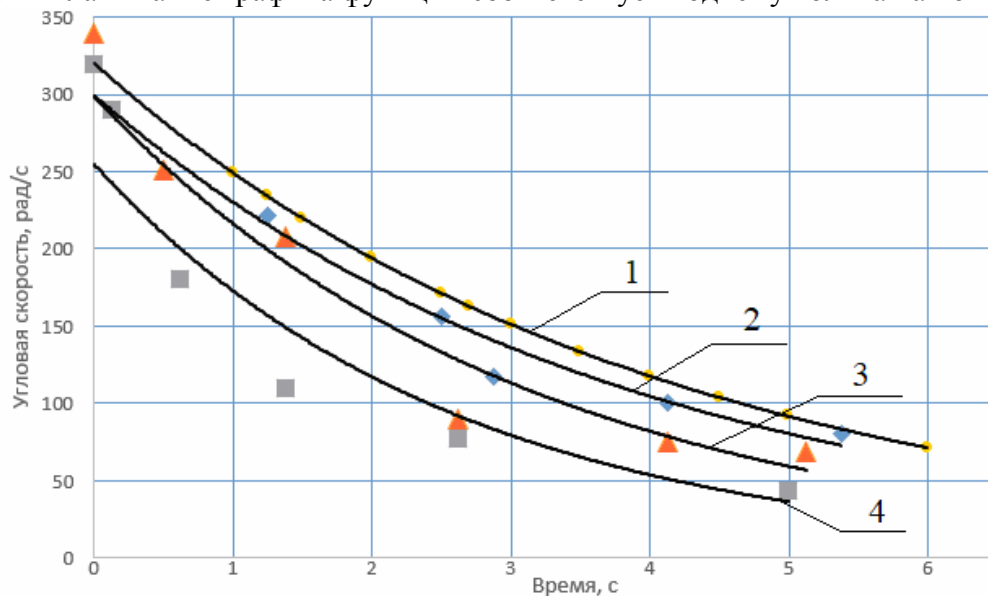


Рис. 2. Изменение угловой скорости при прецессии волчка Томпсона на поверхностях с разной шероховатостью: 1 – теоретическое решение, 2 – коэффициент трения  $\xi = 0,22$  ( $\diamond$ ), 3 – коэффициент трения  $\xi = 0,31$  ( $\Delta$ ), 4 – коэффициент трения  $\xi = 0,51$  ( $\square$ )

### Обработка экспериментальных данных

Анализ полученных зависимостей показывает, что скорость падения угловой скорости от времени прецессии зависит от коэффициента трения, и более того, эта зависимость близка к экспоненциальной:

$$\omega = \omega_0 e^{-C\xi t}, \quad (4)$$

где  $\omega_0$  – начальная угловая скорость,  $t$  – время прецессии,  $\xi$  – коэффициент трения,  $C$  – коэффициент пропорциональности.

На рисунке 2 теоретическая зависимость получена с помощью формулы (4) и подстановкой коэффициента трения равного 0,25.

Выражение для определения полной энергии системы можно переписать, исходя из закона сохранения энергии и динамики кинетической и потенциальной энергий [6]:

$$dE = \frac{1}{2} J \omega_0 e^{-2C\xi t} + mg \frac{dh}{dt} + P_{mp}, \quad (5)$$

где  $P_{mp}$  – потери на трение,  $h$  – положение центра тяжести.

Потери на трение рассматривались, ориентируясь на работу [7] для трения верчения волчков, исходя из формулы нормальных напряжений.

Из данных исследования видно, что изменение момента инерции волчка за счёт момента силы трения изменяет его момент импульса до тех пор, пока волчок не переворачивается на ножку [8, 9].

$$dL = \omega_0 e^{-C\xi(t_{пер}-t_{нач})} \int mr^2 dt, \quad (6)$$

где  $t_{нач}$ ,  $t_{пер}$  – время начала отсчёта и время переворота на ножку,  $r$  – радиус вращающегося тела.

Принимая осевой момент инерции таким же, как при вращении шара и применяя теорему Гюйгенса–Штайнера при отклонении центра тяжести в ходе прецессии, можно получить зависимость изменения кинетической энергии с учётом изменения момента инерции (рис. 3).

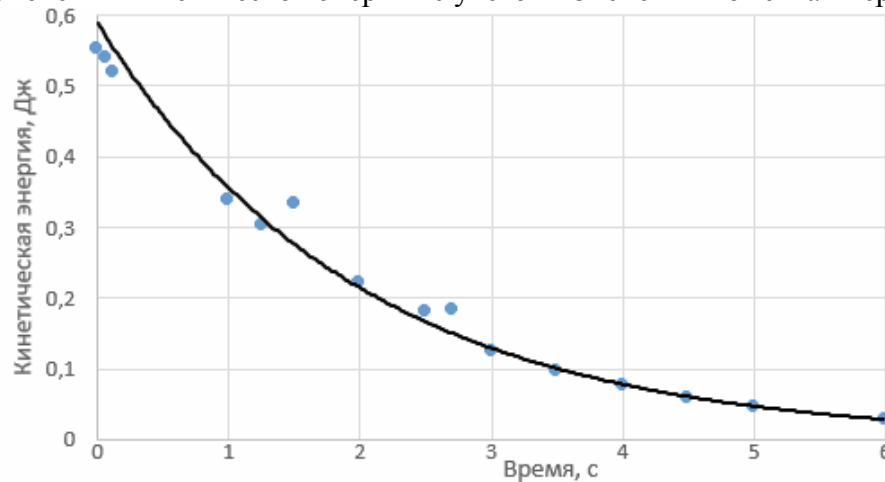


Рис. 3. Изменение кинетической энергии при прецессии волчка Томпсона

Однако эти данные носят предварительный характер и требуют дополнительных исследований и испытаний. Такой вывод связан с отклонениями расчётных данных (конкретных точек) от графика. Так, на рисунке 3 видно, что часть точек выбивается из графика, прежде всего на участке между 1 и 3 секундой движения, там, где происходит подъём волчка на ножку. В работах [6] и [10] показано, что изменение кинетической энергии квадратично от скорости. Полученные более поздние данные показывают, что зависимость близка к экспоненциальной. Данный вопрос также требует проверки и будет решён в дальнейших исследованиях.

### Практическое применение и дальнейшие исследования

Исследования изменения кинетической энергии и, как следствие, угловой скорости приводят к тому, что, на основе формулы (4), можно предложить методику измерения коэффициента трения, при условии, что известен коэффициент пропорциональности  $C$ . Для этого предполагается наблюдение за динамикой уменьшения угловой скорости или, что более технически просто, за изменением оборотов волчка при его прецессии.

Дальнейшие исследования направлены на изучение динамики волчка Томпсона, в особенности энергетических показателей, что позволит разработать обобщённую модель его поведения и спрогнозировать возможные конструкции на его основе.

### Заключение

Экспериментальные данные показывают, что падение числа оборотов волчка Томпсона и его угловой скорости при вращении происходит нелинейно и по характеру зависимости близко к экспоненциальной, что позволяет рассуждать о сложной закономерности при переходе кинетической энергии в потенциальную.

Исследования также показывают, что при отклонении волчка в ходе вращения от вертикального положения, происходит и изменение осевого момента инерции, что также сказывается на динамике кинетической энергии.

Дальнейшие исследования должны прояснить картину полной динамики кинетической энергии и показать действительную скорость изменения кинетической энергии, которая по ряду исследований носит нелинейный характер.

Также дальнейшие исследования должны дать общую картину параметров динамики при вращении волчка, в особенности энергетических показателей, что позволит разработать обобщённую модель его поведения и спроектировать возможные конструкции на его основе.

### Список литературы

1. Алюшин Ю.А. Механика твердого тела в переменных Лагранжа. – М.: Машиностроение, 2012. – 192 с.
2. Карапетян А.В. Глобальный качественный анализ динамики китайского волчка (тип-топ) // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2008. – № 3. – С. 33-41.
3. Адуенко А.А., Амелькин Н.И. О предельных движениях волчка с внутренней диссипацией в однородном поле тяжести // Труды Московского физико-технического института. – 2013. – Т. 5, № 2(18). – С. 126-133.
4. Журавлев В.Ф. О модели сухого трения в задаче качения твердых тел // Прикладная математика и механика. – 1998. – Т. 62, № 5. – С. 762-767.
5. Беличенко М.В., Холостова О.В. Об устойчивости стационарных вращений в приближенной задаче о движении волчка Лагранжа с вибрирующей точкой подвеса Нелинейная динамика. – 2017. – Т. 13, № 1. – С. 81-104. – DOI: 10.20537/nd1701006.
6. Андреев А.И., Чанчиков В.А., Славин Б.М., Перекрестов А.П., Козлова И.А. Исследование динамики потенциальной энергии волчка Томпсона и его применение в потенциометрах // Транспортное, горное и строительное машиностроение: наука и производство. – 2023. – № 19. – С. 30-34. – DOI: 10.26160/2658-3305-2023-19-30-34.
7. Иванов А.П. О трении качения // Доклады Академии наук. – 2019. – Т. 485, № 3. – С. 295-299.
8. Киреевков А.А., Семендяев С.В. Связанные модели трения скольжения и верчения: от теории к эксперименту // Труды Московского физико-технического института. – 2010. – Т. 2, № 3. – С. 174-181.
9. Емельянов Д.О., Иванов П.Ю., Дульский Е.Ю. Инновационная методика определения коэффициента трения в системе «Колодка-Колесо» // Известия Транссиба. – 2022. – № 3(51). – С. 99-112.
10. Андреев А.И., Чанчиков В.А., Славин Б.М., Перекрестов А.П., Козлова И.А. Способ трибологических исследований на основе волчка Томпсона // Транспортное, горное и строительное машиностроение: наука и производство. – 2022. – № 17-1. – С. 11-16. – DOI: 10.26160/2658-3305-2022-17-11-16.

### References

1. Alyushin Y.A. Rigid Body Mechanics in Lagrange Variables. – M.: Mechanical Engineering, 2012. – 192 p.
2. Karapetyan A.V. Global qualitative analysis of the dynamics of the Chinese spinning top (tip-top) // Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of a solid. 2008, no. 3, pp. 33-41.
3. Aduenko A.A., Amelkin N.I. On the limit motions of a top with internal dissipation in a uniform gravity field // Proceedings of the Moscow Institute of Physics and Technology. 2013, vol. 5, no. 2(18), pp. 126-133.
4. Zhuravlev V.F. On the model of dry friction in the problem of rolling solids // Applied Mathematics and Mechanics. 1998, vol. 62, no. 5, pp. 762-767.
5. Belichenko M.V., Kholostova O.V. On the stability of stationary rotations in the approximate problem of the motion of a Lagrange top with a vibrating suspension point // Nonlinear Dynamics. 2017, vol. 13, no. 1, pp. 81-104. DOI: 10.20537/nd1701006.
6. Andreev A.I., Chanchikov V.A., Slavin B.M., Perekrestov A.P., Kozlova I.A. Investigation of the dynamics of the potential energy of the Thompson top and its application in potentiometers // Transport, mining and construction engineering: science and production. 2023, no. 19, pp. 30-34. DOI: 10.26160/2658-3305-2023-19-30-34.
7. Ivanov A.P. On rolling friction // Reports of the Academy of Sciences. 2019, vol. 485, no. 3, pp. 295-299.
8. Kireenkov A.A., Semendyaev S.V., Coupled Models of Sliding and Spinning Friction: From Theory to Experiment // Proceedings of the Moscow Institute of Physics and Technology. 2010, vol. 2, no. 3, pp. 174-181.
9. Emelyanov D.O., Ivanov P. Yu., Dulsky E.Yu. Innovative method for determining the coefficient of friction in the “Kolodka-Wheel” system // Letters Transsib. 2022, no. 3(51), pp. 99-112.
10. Andreev A.I., Chanchikov V.A., Slavin B.M., Perekrestov A.P., Kozlova I.A. A method of tribological research based on the Thompson top // Transport, mining and construction engineering: science and production. 2022, no. 17-1, pp. 11-16. – DOI: 10.26160/2658-3305-2022-17-11-16.

#### Сведения об авторах:

#### Information about authors:

<b>Андреев Александр Иванович</b> – аспирант	<b>Andreev Aleksander Ivanovich</b> – postgraduate student
<b>Чанчиков Василий Александрович</b> – кандидат технических наук, доцент кафедры «Судостроение и энергетические комплексы морской техники»	<b>Chanchikov Vasily Aleksandrovich</b> – candidate of technical sciences, associate professor of the Department «Shipbuilding and energy complexes of marine engineering»
<b>Славин Борис Матвеевич</b> – кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедры «Механика и инженерная графика»	<b>Slavin Boris Matveyevich</b> – candidate of technical sciences, head of the Department «Mechanics and engineering graphics»
<b>Перекрестов Аршавир Петрович</b> – кандидат технических наук	<b>Perekrestov Arshavir Petrovich</b> – candidate of technical sciences
aresut79@mail.ru	

Получена 28.07.2023