

МОДИФИКАЦИЯ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ ПРИ РЕШЕНИИ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ

Гуляев В.А., Козлов А.А., Логинов Н.Ю.

Тольяттинский государственный университет, Тольятти

Ключевые слова: теория упругости, сферический контакт, напряжения, осесимметричные задачи, контактные деформации, интерферометрия, изохромы.

Аннотация. В статье при исследовании контактного взаимодействия неподвижных сопряжений используются теоретические и экспериментальные методы моделирования конструкционных контактных задач, в том числе методы фотомеханики, тензометрирования и др. для решения сферической контактной задачи. В работе были использованы подходы исследования процессов контактного взаимодействия неподвижных сопряжений такие, как физическое моделирование на моделях из оптически чувствительных материалов методами фотомеханики, а также на моделях из натуральных металлических образцов с использованием голографической интерферометрии и спеклфотографии. Проведено исследование взаимодействия контактных пар – жесткой сферы с упругой сферой и двух упругодеформируемых сфер из одинаковых материалов. Проведенный анализ процесса контактного взаимодействия твердых тел позволяет осуществить более точную тарировку модельных материалов и определить их оптико-механические характеристики путем использования любой из указанных контактных пар, определить область контактных давлений, закон их распределения и их интенсивность.

BOUNDARY CONDITIONS MODIFICATION IN SOLVING CONTACT PROBLEMS

Gulyaev V.A., Kozlov A.A., Loginov N.Yu.

Togliatti State University, Togliatti

Keywords: theory of elasticity, spherical contact, stresses, axisymmetric problems, contact deformations, interferometry, isochromes.

Abstract. In the article, in the contact interaction of fixed mates study, theoretical and experimental methods for modeling structural contact problems, including methods of photomechanics, strain gauges, etc., are used to solve a spherical contact problem. In the work, approaches were used to study the fixed mates contact interaction processes, such as physical modeling on models from optically sensitive materials using photomechanics methods, as well as on models from full-scale metal samples using holographic interferometry and speckle photography. The contact pair's interaction is study – a rigid sphere with an elastic sphere and two elastically deformable spheres made of the same materials. The analysis contact interaction process of solids allows for a more model materials accurate calibration and to determine their optical and mechanical characteristics by using any of these contact pairs, to determine the contact pressures area, their distribution law and their intensity.

Введение

В линейной теории упругости контактную задачу для сфер обычно решают методами, разработанными применительно к решению задач о контакте плоскостей. В работе [1] получено уточненное решение задачи о сферическом контакте и рассмотрен вопрос об усовершенствовании теории Герца. Уточненное решение сферической контактной задачи (когда тела рассматриваются как сферы, а не как полупространства) содержит члены одного порядка с поправками, вводимыми в граничные условия для рассмотрения кривизны высшего порядка при использовании метода, разработанного для контакта плоскостей. Установлено, что эти поправки несовместимы с постановкой задачи в рамках линейной теории упругости, где упругими постоянными высшего порядка пренебрегают.

Материалы и методы исследований

Покажем, что погрешность, обусловленная использованием приближенного краевого условия, меньше погрешности, вносимой предположением о бесконечно малых деформациях. Рассмотрим задачу о контакте двух сферических (разных радиусов) поверхностей из разных однородных и изотропных упругих материалов, свободных от инерционных и температурных воздействий, а также от объемных сил. Расчетная схема представлена на рисунке 1.

Для ненагруженных сферических поверхностей справедливы зависимости для зоны потенциальной деформации верхней сферической поверхности L_1 и нижней L_2

$$L_1 = r_1 - (r_1^2 - a_1^2)^{1/2}; \quad L_2 = r_2 - (r_2^2 - a_2^2)^{1/2}, \quad (1)$$

где r_1 и r_2 радиусы первой и второй сфер соответственно; a_1 и a_2 радиусы пятна контакта для первой и второй сфер соответственно.

При приложении нагрузки возникают контактные давления и деформации; кинематика взаимодействия сфер описывается уравнением

$$L_1 + u_1(a) + L_2 + u_2(a) = s = u_1(0) + u_2(0), \quad (2)$$

справедливым для любой точки, принадлежащей области контакта с переменным радиусом контакта a . Здесь $u_1(a)$ и $u_2(a)$ – вертикальные линейные перемещения точек поверхности первой и второй сфер соответственно; s – относительное сближение сферических поверхностей; $u_1(0)$ и $u_2(0)$ – вертикальные линейные перемещения точек поверхности соответственно первой и второй сфер в момент касания.

С учетом зависимостей уравнение (2) принимает вид

$$u_1(a) + u_2(a) = s - r_1 - r_2 + (r_1^2 - a^2)^{1/2} + (r_2^2 - a^2)^{1/2}; \quad (3)$$

$$\sigma_{x1}(a) = \begin{cases} \sigma_{x2}(a) & \text{при } a \leq r_0, \\ \sigma_{x2}(a) = 0 & \text{при } a \geq r_0; \end{cases} \quad (4)$$

$$\sigma_{rx1}(a) = \sigma_{rx2}(a) = 0; \quad (5)$$

$$P = - \int_0^{r_0} 2\pi \sigma_{x1}(a) a da, \quad (6)$$

где σ_{x1} и σ_{x2} напряжения, возникающие при контакте в первой и второй сферах соответственно; r_0 радиус области контакта; σ_{rx1} и σ_{rx2} напряжения в момент касания в первой и второй сферах соответственно; P – нагрузка, возникающая в области контакта.

Совместно с соотношениями (4)-(6) уравнение (3) составляет необходимое краевое условие.

Граничное условие задачи Герца [2, 3] можно получить из уравнения (3) путем разложения в нем членов, содержащих радикалы, в биномиальные ряды. При сохранении первых двух членов биномиального разложения получаем соотношение

$$u_1(a) + u_2(a) = s - 0,5a^2 / (r^{-1} + r^{-2}). \quad (7)$$

Если радиус области контакта r_0 значительно меньше радиусов сфер r_1 и r_2 ($r_0 \ll r_1, r_2$), перемещения и давление в окрестности области контакта приближенно равны перемещениям и напряжениям, возникающим в упругом полупространстве при идентичной нагрузке и граничных условиях (3)-(6). Такая аппроксимация справедлива лишь при малых значениях отношений r_0/r_1 и a/r_2 . Поскольку уравнения (3) и (7) различаются лишь членами высшего порядка малости по a/r , решения уравнения (3) для полупространства не более характерно для решения задач о контакте сфер, чем решение уравнения (7). Сравнительный анализ этих решений позволяет оценить погрешность, возникающую в результате использования уравнения (7) в качестве граничного условия вместо уравнения (3) при аналитических исследованиях рассматриваемого класса объемных контактных задач.

Построим решение для перемещений и напряжений, возникающих в полупространстве с поверхностью, свободной от напряжений при $a > r_0$. Считаем, что в упругом полупространстве заданы симметричные нормальные перемещения при $a \ll r_0$ и нулевые касательные напряжения при $x=0$. Для решения этой осесимметричной задачи наиболее эффективен метод Ростовцева, основанный на использовании комплексных функций напряжений [4]. Аналитические выражения для относительного сближения и нагрузки имеют вид

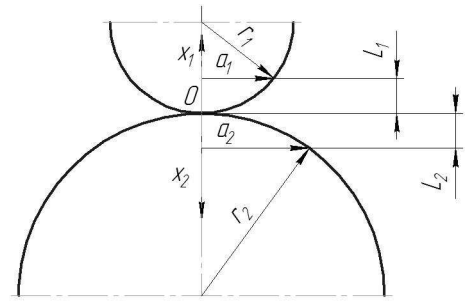


Рис. 1. Расчетная схема

$$s = \sum_{i=1}^{n=2} \{4r_i \ln(1 - \beta_i^2) / 3 + [5r_i \beta_i / 4 + r_i \beta_i^3 / 12] \ln K_3 - r_i \beta_i^2 / 6\}; \quad (8)$$

$$P = (K_1 + K_2)^{-1} \sum_{i=1}^2 r_i^2 \{[\beta_i^4 / 4 + 5\beta_i^2 / 2 - 11/4] \ln K_3 - \beta_i^3 + 11\beta_i / 2\}. \quad (9)$$

Здесь $K_1=(1-\nu_1)/G_1$; $K_2=(1-\nu_2)/G_2$; $K_3=(1+\beta_i)/(1-\beta_i)$; $\beta_i=r/r_i$; ν и G – коэффициент Пуассона и модуль сдвига [$G=0.5E/(1+\nu)$]; E – модуль упругости. Первой сфере соответствует индекс 1, а второй – 2.

Результаты теоретических исследований

Решение классической контактной задачи Герца [2, 5, 3] можно получить в результате подстановки в уравнения (8) и (9) нескольких первых членов разложения логарифмических сомножителей в указанных уравнениях.

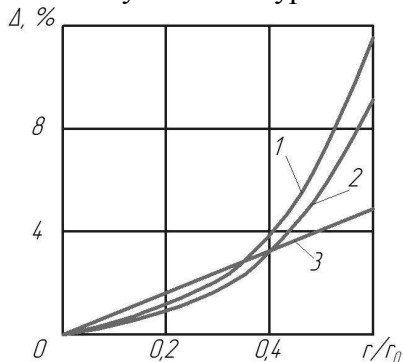


Рис. 2. Погрешность Δ от безразмерного радиуса области контакта r_0/r при классическом решении задачи Герца

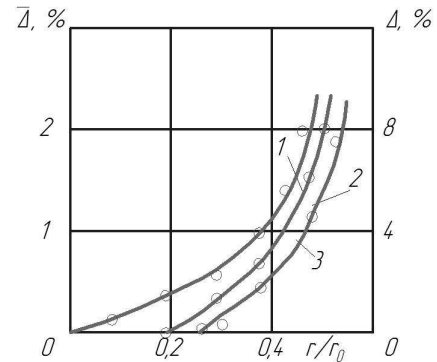


Рис. 3. Погрешность Δ от безразмерного радиуса области контакта r_0/r при усовершенствованном решении задачи Герца

Кривые зависимостей $\Delta=f(r_0/r)$ для s и P (соответственно кривые 2 и 1), полученные по теории Герца (рис. 2), расположены незначительно ниже аналогичных кривых, полученных путем усовершенствования решения для всех значений радиуса r_0 контактной области (рис. 3). При этом теория Герца обуславливает пропорциональную зависимость деформации от безразмерного радиуса области контакта (кривая 3).

Деформация ϵ_x в центре контактной области ($a=0$), вдавливаемой в полупространство сферы из того же материала ($E=200$ ГПа; $\nu=0,3$) [5]:

$$\epsilon_x = 0,182r_0 / r. \quad (10)$$

Зависимость между действительной ϵ_x' и бесконечно малой ϵ_x деформациями согласно нелинейной теории упругости, имеет вид

$$\epsilon_x' = \epsilon_x + 0,5\epsilon_x^2. \quad (11)$$

Предположение о бесконечно малой деформации ϵ_x в рассматриваемом случае приводит к погрешности $\Delta \approx 0,091r_0/r$ (%). Эта погрешность превышает погрешности, полученные при $r_0/r \leq 0,22$ или $\epsilon_x \leq 0,04$ (рис. 2). Следовательно, применение в теории Герца граничного условия (7) приемлемо для контакта стальных сферических поверхностей.

Отказ в расчетах от произведений градиентов перемещений ведет к большей погрешности, чем применение приближенных граничных условий, что подтверждается выводами работы [1], из которой, в частности, следует, что в рамках линейной теории упругости невозможны приемлемые усовершенствования теории Герца.

Кривые зависимости $\Delta=f(r_0/r)$ соответствующие (8) и (9) с учетом модифицированного граничного условия, для нагрузки и относительного сближения в диапазоне изменения отношения безразмерного радиуса области контакта от $r_0/r = 0$ до $r=2r_0$ (рис. 2) подобны: в диапазоне $0,225 \leq r_0/r \leq 0,375$ $\Delta \leq 1\%$; при $r_0 = 2r$ $\Delta_{\max} \approx 2\%$; при $0 \leq r_0/r \leq 0,2$ кривые 1 и 2 практически совпадают. Подобие кривых 1 и 2 свидетельствует об одинаковой зависимости погрешностей Δ от r_0/r для нагрузки и относительного сближения.

Погрешность для деформации ϵ_x в зоне контакта пропорциональна отношению r_0/r , причем коэффициент пропорциональности $k = \operatorname{tg}\alpha = 0,445$, где α – угол наклона кривой 3 к оси абсцисс. Это свидетельствует о пропорциональном увеличении различия значений контактной деформации, вычисленной по теории Герца и на основании модифицированного граничного условия. В указанном диапазоне изменения r_0/r погрешность достигает максимального значения (4%) при $r_0=2r$. При этом максимальные значения Δ для нагрузки и относительного сближения превышают Δ_{\max} для деформации соответственно на 60 и 50%, что свидетельствует о гораздо меньшей чувствительности деформации к способу ее вычисления в области контакта, т.е. о меньшем влиянии на нее граничных условий.

В диапазоне $0 \leq r_0/r \leq 0,25$ все зависимости $\Delta=f(r_0/r)$ сближаются, что свидетельствует о независимости типа определяемого параметра контактной задачи (P , s или ϵ_x) от краевых условий, т. е. от разницы их значений, полученных на основании различных решений:

Различие между погрешностями Δ для нагрузки и относительного сближения (кривая 1), нагрузки и деформации (кривая 2), относительного сближения и деформации (кривая 3) при увеличении безразмерного радиуса области контакта увеличивается (рис. 3). Все зависимости на рисунке 3 нелинейные; при увеличении β они сближаются и в диапазоне $0,4 \leq r_0/r \leq 0,6$ становятся подобными. Кривые 2 и 3 практически подобны во всем диапазоне изменения β , что позволяет, установив масштаб линейного подобия k_s , например, для сближения $s_H = k_s s_M$, определить погрешность для деформации ϵ_x . Аналогичный прием согласно теории подобия и анализа размерностей [6] можно применять для пересчета погрешности Δ для нагрузки P . Только в этом случае масштаб подобия между кривыми (например, 1 и 3 на рис. 3) представляет собой определенную функциональную зависимость, установить которую можно путем аппроксимации на ЭВМ. Таким образом, при большом радиусе сферической поверхности или малом радиусе контактной области (т.е. при $\beta > 0,4$) различие погрешностей Δ для всех параметров (P , s и ϵ_x) резко увеличивается, т.е. в указанном диапазоне их необходимо рассчитывать с учетом модернизированного граничного условия по формулам (8) и (9).

Рассмотрим еще один эффективный способ решения осесимметричных задач, в том числе нелинейных [2, 6-8] – применение экспериментальных оптических методов исследований. Эти методы дают возможность изучать поля контактных напряжений, деформаций и перемещений как путем физического моделирования (методы фотомеханики [6, 9]), так и непосредственно на конструкциях и их элементах (методы голографической интерферометрии, спеклфотографии [10] и др.). Опыт экспериментального исследования и разработанные методики [6, 9, 10] определения напряженно-деформированного состояния (НДС) оптическими методами позволяют получать корректные решения актуальных практически важных контактных задач.

При моделировании НДС элементов конструкций, результаты экспериментального изучения целесообразно представлять в обобщенной, критериальной форме. В рассмотренной задаче контактного взаимодействия сферических поверхностей зависимости $\Delta=f(\beta)$ и $\Delta=f(r_0/r)$ желательно представить через безразмерные критериальные комплексы:

$$\Delta = F\left(\frac{\beta P}{Gr_0^2}; \frac{\beta P}{Gsr_0}; \frac{\beta P}{Gus^2}; \frac{us}{sr_0r}; \frac{\sigma_0 s}{P^2}; S_i\right). \quad (12)$$

Согласно π -теореме теории размерностей всякое уравнение, связывающее N физических величин, среди которых k величин имеют независимые размерности, можно преобразовать в уравнение, связывающее $N-k$ безразмерных комплексов и симплексов, составленных из этих величин. Кроме того, согласно π -теореме из N размерных величин, связанных физическим уравнением, можно составить не более $N-k$ независимых безразмерных комплексов π_i и симплексов S_i , каждый из которых не может быть представлен в виде степенной функции остальных π_i и симплексов S_i .

Число независимых безразмерных комплексов и симплексов не может превышать числа зависимых размерностей, т.е. $N-k$ [10]. В рассматриваемом случае $N=7$ (P , σ , u , s , G , r_0 , r),

$k = 2 (P; r)$, т. е. $N-k=7-2=5$, что соответствует уравнению (12). В первом критериальном комплексе функциональной зависимости (12) при прочих постоянных параметрах изменяется радиус контактной области r_0 , во втором – сближение s , в третьем – вертикальное u , в четвертом – деформация e_x , в пятом – напряжение σ_x . В уравнении (12) через S_i обозначены соответствующие симплексы типа r_0/r , s/u и т. д. Характер графических зависимостей, приведенных на рисунках 2 и 3, в новых координатах $\Delta-\pi_i$, и $\Delta-\pi_i$ ($i=5$) не изменяется (изменяются лишь масштабы осей абсцисс и ординат), поэтому результаты, полученные при перестроении зависимостей, можно обобщить на все задачи подобного класса.

Результаты экспериментальных исследований

Для экспериментального исследования были выбраны сфера и полупространство (рис. 4, а) и две сферы (рис. 4, б). Экспериментальное подтверждение влияния граничных условий на характер распределения контактных давлений, деформаций и сближения показано на рисунках 5. На рисунках 5, а и б приведено контактное взаимодействие жесткой сферы со свободной поверхностью упругого полупространства; на рисунках 5, в и г – при контакте жесткой и упругой сфер. Приведены кривые изменения $\tau_{\max} = (\sigma_1 - \sigma_2)/2$ в двух горизонтальных сечениях $I-I$ и $I'-I'$ (рис. 5, а и б) и в вертикальных сечениях $II-II$ (рис. 5, в и г), проходящих через центр области контакта. Кривые 1 и 2 построены для контакта жесткой сферы соответственно с полупространством и упругой сферической поверхностью. Различие этих графических зависимостей подтверждает экспериментально зарегистрированную погрешность при различных краевых условиях задачи.

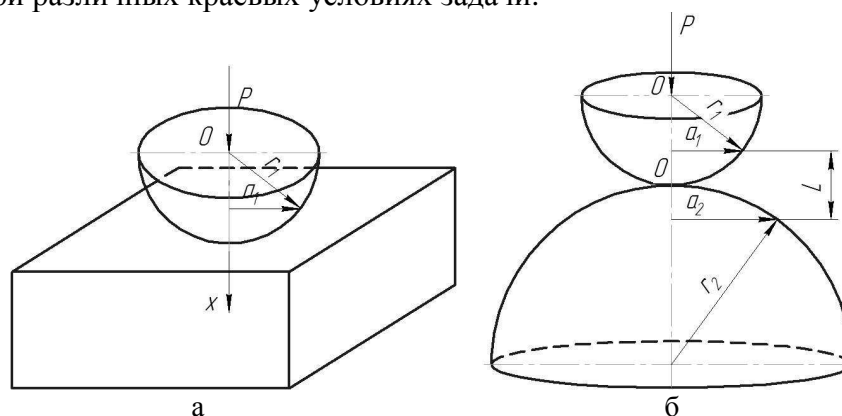


Рис. 4. Расчетные схемы

Таким образом, аналитически и экспериментально установлены закономерности изменения погрешностей определения значений P , s , ϵ_x и τ_{\max} при разных граничных условиях объемной контактной осесимметричной задачи и увеличении радиуса контактной области ($0 \leq \beta \leq 0,6$) по сравнению с аналогичными решениями по теории Герца.

Результаты экспериментов показывают, что при $r_2 \gg r_1$ и $r_2 \rightarrow \infty$ характер распределения изохром (или максимальных касательных напряжений) в области контакта при контактировании жесткой сферы со свободной поверхностью и с упругой сферой одинаков (при прочих идентичных условиях). Отсюда вытекает задача установления зависимости максимальных контактных напряжений от r_2 (рис. 1 и 4).

На основании анализа распределения интерференционных полос и их максимальных порядков n_1^{\max} при нескольких значениях радиуса r_2 нижней сферической поверхности построена зависимость $n/n^{\max} = f(r_2/r_1)$ при $r_1 = \text{const}$ (рис. 6). Эта зависимость представлена также в безразмерных напряжениях τ_{\max}/E_2 , где E_2 – модуль упругости материала нижней сферической поверхности взаимодействующих тел (рис. 7). Максимальные контактные напряжения увеличиваются при $r_2 \rightarrow 0$ и уменьшаются при $r_2 \rightarrow 4$. Эта экспоненциальная зависимость позволяет определить значение τ_{\max} при любом значении r_2 в исследованном диапазоне изменения радиуса нижней сферы.

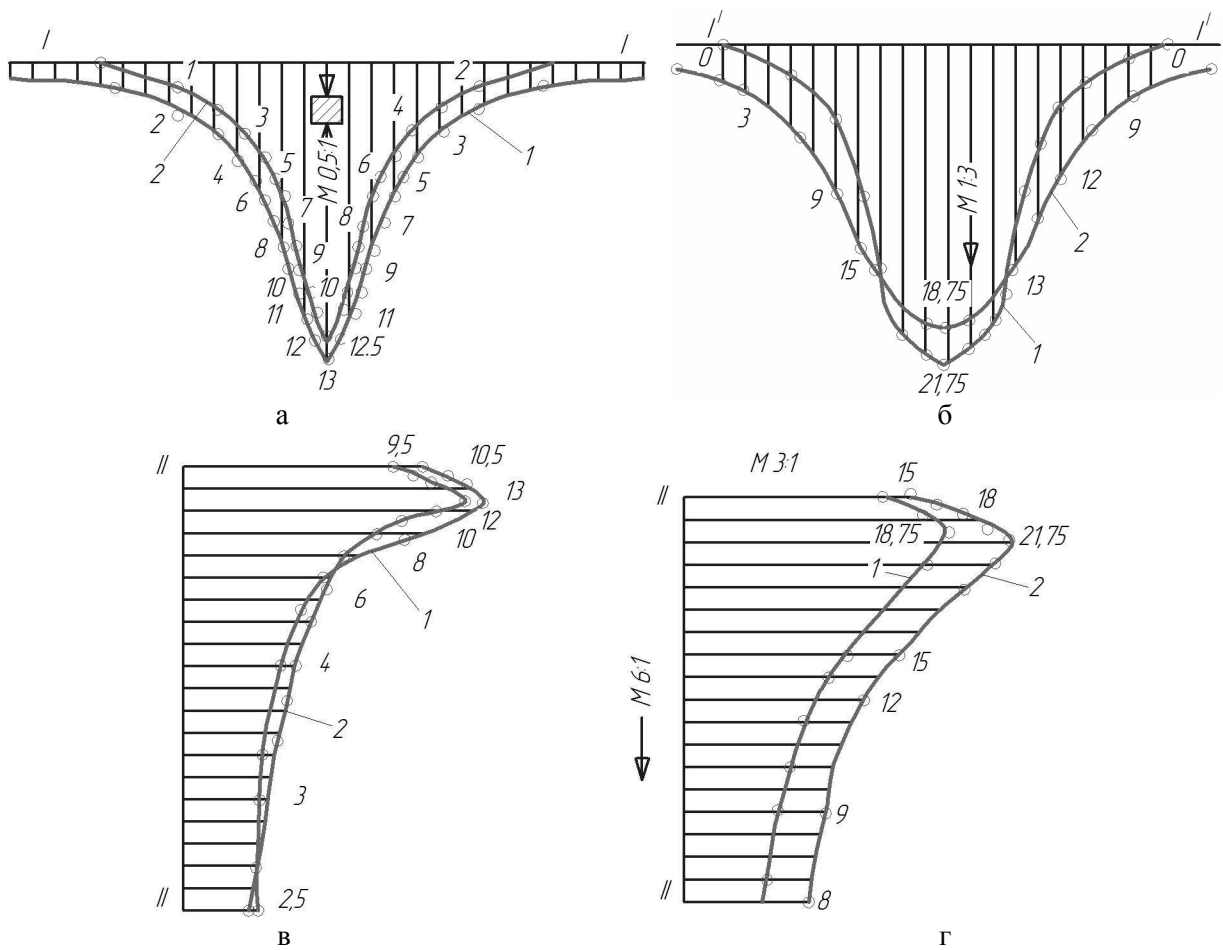


Рис. 5. Контактное взаимодействие жесткой сферы со свободной поверхностью упругого пространства (а и б) и упругой сферы (в и г)

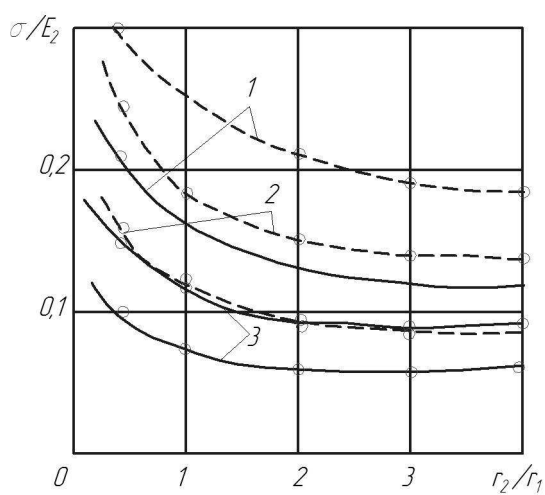


Рис. 6. Распределение интерференционных полос при $r_1 = \text{const}$

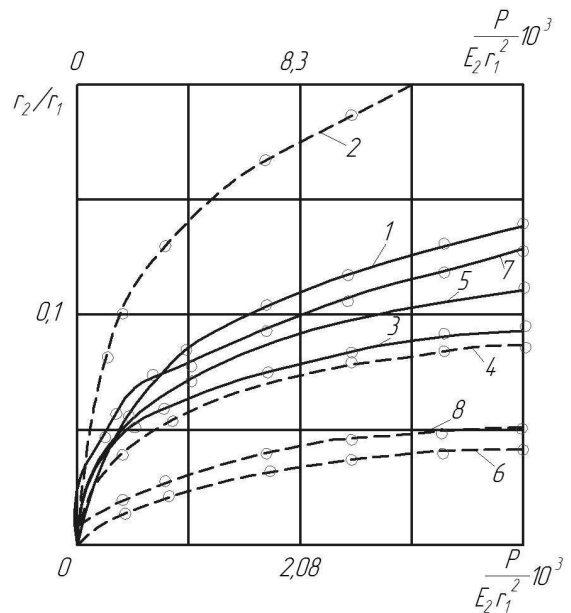


Рис. 7. Распределение интерференционных полос в безразмерных напряжениях

Таким образом, анализ влияния граничных условий на решение осесимметричных пространственных контактных задач теории упругости показывает, что экспериментально-аналитический метод позволяет достаточно просто и наглядно оценивать эффекты, связанные с увеличением износостойкости, прочности и жесткости взаимодействующих элементов в области контакта.

Табл. 1. Результаты теоретических исследований

Нагрузка P , кН	Радиус r_a , см, области контакта при				Максимальное контактное напряжение, МПа,				
	r_2				при r_2				
	∞	$0,5r_1$	r_1	$4r_1$	∞	$0,5r_1$	r_1	$2r_1$	$4r_1$
–	0,0514	0,0720	0,0821	0,0959	112,79	234,53	179,02	147,97	130,89
0,25	0,0816	0,0344	0,0160	0,0187	179,15	372,29	284,14	234,88	207,70
	0,1000	0,0903	0,1034	0,1209	142,14	295,56	225,55	186,43	164,91
0,50	0,1028	0,0433	0,0201	0,0235	225,70	469,06	357,99	295,93	261,69
	0,1630	0,1178	0,1303	0,1523	179,05	372,39	284,18	234,89	207,78
1,00	0,1290	0,0546	0,0253	0,0296	284,40	590,98	451,04	372,85	329,71
	0,2060	0,1433	0,1641	0,1919	25,59	469,18	358,04	295,94	261,78
2,00	0,1632	0,0687	0,0319	0,0373	358,30	744,58	568,28	469,76	415,41
	0,2350	0,1641	0,1900	0,2196	258,20	537,07	409,86	338,77	299,67
3,00	0,2869	0,0787	0,0365	0,0427	410,20	852,33	650,52	537,75	475,52
	0,2590	0,1806	0,2100	0,2417	284,20	501,13	451,11	372,87	329,82
4,00	0,2049	0,0866	0,0402	0,0470	451,40	938,12	715,99	591,87	523,38
	0,2790	0,1945	0,2200	0,2604	300,00	636,80	485,94	401,66	355,29
5,00	0,2215	0,0933	0,0433	0,0507	486,30	1010,50	771,27	637,57	563,80

Примечание. В числителе указаны значения, полученные при $r_1=2$ см, в знаменателе – при $r_1=1$ см.

Зависимости на рисунке 6 построены для двух случаев контактного взаимодействия: при $r_1 = 2$ см (сплошные кривые: 1 – для нагрузки $P=5000$ Н; 2 – для $P=2000$ Н; 3 – для $P=5000$ Н) и $r_1 = 1$ см (штриховые кривые для тех же значений нагрузки). По данным, указанным в табл. 1, построены зависимости нагрузки от радиуса r_0 области контакта при $r_1 = 2$ см (сплошные линии) и $r_1 = 1$ см (штриховые линии на рис. 8). Кривые 1 и 2 построены для полупространства, 3 и 4 – для сферы с $r_1 = 2r_2$, 5 и 6 – для сферы с $r_1 = r_2=2$ см, 7 и 8 – для сферы с $r_2=4r_1$. Анализ зависимостей на рис. 8 позволяет оценить влияние кривизны контактной упругой сферической поверхности на изменение нормальных напряжений и размеров контактной области. Анализ кривых, приведенных на рисунках 7 и 8, показывает нелинейность зависимости между внешней нагрузкой P , перемещениями и напряжениями смятия (табл. 1). На рисунке 8 приведены зависимости безразмерного смещения точки x_0 по вертикальной оси симметрии нижней сферы от безразмерного параметра нагрузки. Сплошные линии (правая ось ординат) соответствуют $r_1=2$ см (кривая 1 – для $r_2=4r_1$; 2 – для $r_2=r_1=2$ см; 3 – для $r_2=2r_1$), штриховые (левая ось) – $r_1=1$ см (1 – для $r_2=2r_1$; 2 – для $r_2=r_1=2$ см; 3 – для $r_2=4r_1$). Максимальное расхождение значений x_0 при увеличении r_1 в 2 раза достигает 80% при $r_2=4r_1$.

Анализ зависимостей на рисунке 8 показывает, что при увеличении радиуса r_1 максимальные напряжения τ_{\max} в упругой сфере радиусом r_2 возникают дальше от поверхности контакта. Таким образом, зависимость x_0 от P неоднозначная. Сплошные кривые, определяющие более высокий уровень напряжений, являются нелинейными. Это можно объяснить увеличением чувствительности напряжений τ_{\max} к изменению нагрузки при увеличении радиуса r_1 верхней сферы. Зависимости, показанные штриховыми линиями на рисунке 8, в диапазоне нагрузки $0 \leq P \leq 2 \cdot 10^3$ Н также не линейны, но в значительно меньшей степени, чем показанные сплошными линиями. При $P > 2 \cdot 10^3$ Н штриховые линии практически прямые, что свидетельствует о пропорциональности τ_{\max} и внешней нагрузки.

Кривые на рисунке 8, определяющие радиусы поверхностей касания для исследуемой задачи, а также ее силовые и физико-механические параметры, могут быть использованы для практических расчетов, так как на основании экспериментальных результатов установлено, что точка, в которой касательные напряжения максимальны, находится на оси симметрии взаимодействующих сфер на расстоянии $0,5r_0$ от точки их касания.

Таким образом, результаты теоретических исследований (табл. 1) хорошо согласуются с экспериментальными данными. Среднее различие теоретических и экспериментальных максимальных касательных напряжений для всех рассмотренных соотношений радиусов r_1 и r_2

не превышает 0,574% (0,312% для $r_1 = 1$ см и 0,836% для $r_1 = 2$ см), что обеспечивает вполне приемлемую точность при решении осесимметричных пространственных контактных задач, а также при разработке инженерных методов расчета жесткости контакта с учетом механических, геометрических и фрикционных характеристик контактирующих поверхностей.

На рисунке 9 приведены экспериментальные зависимости максимальных касательных напряжений от сжимающей нагрузки для двух значений радиусов нижней сферической поверхности: $r_2 = 2$ см (сплошные кривые, отнесенные к нижней оси абсцисс) и $r_2 = 1$ см (штриховые кривые, отнесенные к верхней оси абсцисс). Нелинейность характера изменения порядков изохром при увеличении нагрузки во всем рассмотренном диапазоне изменения свидетельствует о том, что деформации материала сфер неупругие при всех рассмотренных отношениях радиусов r_1 и r_2 .

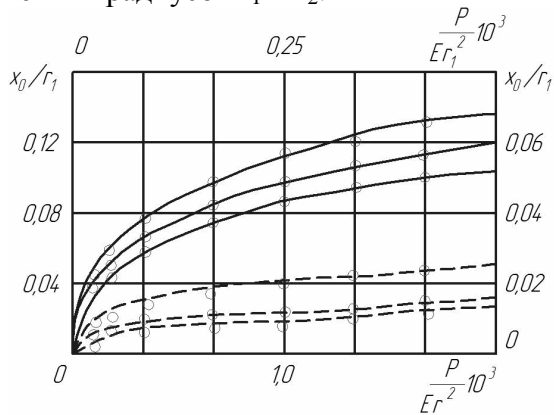


Рис. 8. Зависимости безразмерного смещения точки x_0

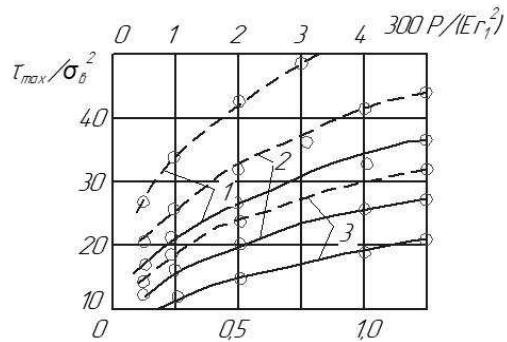


Рис. 9. Экспериментальные зависимости максимальных касательных напряжений от сжимающей нагрузки для двух значений радиусов нижней сферической поверхности

Картина интерференционных полос (изохром), показанная на рисунке 5, б, соответствует значению $n=21,5$, полученному для $r_2=r_1/2=1$ см и $P=10^3$ Н (сплошная кривая 1 на рис. 9). Картины изохром на рисунке 5 получены на объемных моделях согласно методике, изложенной в работах [8, 6]. Зависимости, показанные на рисунке 9, не линейны, причем штриховые кривые 1 и 2 ($r_1=1$ см) расположены значительно выше аналогичных кривых, построенных для $r_1 = 2$ см (нижняя ось абсцисс), что свидетельствует об увеличении τ_{max} при уменьшении радиуса r_1 верхней сферической поверхности. Сплошные кривые 1, 2 и 3 на рисунке 9 подобны, причем в диапазоне $5 \cdot 10^2 \leq P \leq 2 \cdot 10^3$ Н τ_{max} увеличивается в среднем до 36%, а затем при $P > 2 \cdot 10^3$ Н уменьшается в среднем до 26,6%. Анализ зависимостей, приведенных на рисунке 9, показывает, что при увеличении радиуса r_2 напряжения τ_{max} уменьшаются как при $r_1 = 1$ см, так и при $r_1 = 2$ см. Эта особенность нелинейных зависимостей $\tau_{max}=f(P)$ связана с соответствующим изменением радиуса r_0 области контакта и расстояния x_0 от поверхности контакта, на котором касательные напряжения максимальны.

Выводы

Путем сравнения экспериментальных данных установлен коэффициент пересчета максимального контактного давления и τ_{max} для двух рассмотренных случаев взаимодействия контактных пар – жесткой сферы r_1 с упругой сферой r_2 ($r_1 \neq r_2$) и двух упругодеформируемых сфер из одинаковых материалов: $0,63 \tau_{max}^{жестк} = \tau_{max}^{упр}$. Полученная зависимость позволяет существенно сократить объем экспериментальных исследований при определении НДС в области контакта. Кроме того, установленный переход по максимальным контактным давлению и касательному напряжению позволяет использовать их теоретические значения (табл. 1), полученные методом модификации граничных условий, для осуществления более точной тарировки модельных материалов и определения их оптико-механических характеристик путем использования любой из указанных контактных пар. Аналогичная зависимость пересчета получена для радиусов областей контакта поверхности $r_0^{упр} = 1,26 r_0^{жест}$.

Таким образом, анализ результатов исследований позволяет рекомендовать предложенный экспериментально-теоретический способ для решения контактных задач подобного класса.

Список литературы

1. Ogar P., Gorokhov D., Zhuk A., Kushnarev V. Contact geometry during indentation of a sphere into an elastoplastic half-space // MATEC Web of Conferences ICMTMTE 2019. 2019, vol. 298, p.00093.
2. Monelli B.D. Mechanical characterization of metallic materials by instrumented spherical indentation testing: diss. PhD. 2010.
3. Айзикович С.М., Александров В.М., Белоконов А.В., Кренив Л.И. и Трубочик И.С. Контактные задачи теории упругости для неоднородных сред. – М.: Физматлит, 2006. – 240 с.
4. Öner E., Birin A. Continuous contact problem for two elastic layers resting on an elastic half-infinite plane // Journal of mechanics of materials and structures. 2014, vol. 9, no. 1, pp 105-119.
5. Филоненко-Бородич М.М. Теория Упругости. Издание четвертое дополненное и переработанное. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1959. – 364 с.
6. Славин О.К., Трумбачев В.Ф., Тарабасов Н.Д. Методы фотомеханики в машиностроении. – М.: Машиностроение, 1983. – 269 с.
7. Иванов Г.В., Волчков Ю.М., Аннин Б.Д. Численное решение динамических задач упругопластического деформирования твёрдых тел. – Новосибирск: Изд-во Сибирского университета, 2002. – 352 с.
8. Cipriano G.L. Determinacao do coeficiente de encruamento de metais atraves da morfologia das impressoes de dureza na escala macroscopica: diss. PhD. 2008.
9. Gulyaev V.A., Kozlov A.A., Loginov N.Y., Soldatov A.A. Problems of mathematical modelling of elastic boundary value in the stress-strain state of car body elements // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2019, vol. 560, p. 012143.
10. Горбатенко Б.Б., Гребенюк А.А., Максимова Л.А., Перепелицына О.А. и Рябухо В.П. Спекл-фотография и голографическая интерферометрия с цифровой записью дифракционного поля в фурье-плоскости // Компьютерная оптика. – 2010. – Т. 34, №1. – С. 69-81.

References

1. Ogar P., Gorokhov D., Zhuk A., Kushnarev V. Contact geometry during indentation of a sphere into an elastoplastic half-space // MATEC Web of Conferences ICMTMTE 2019. 2019, vol. 298, p.00093.
2. Monelli B.D. Mechanical characterization of metallic materials by instrumented spherical indentation testing: diss. PhD. 2010.
3. Aizikovich S.M., Alexandrov V.M., Belokon A.V., Krenov L.I., Trubchik I.S. Contact problems of elasticity theory for inhomogeneous media. – М.: Fizmatlit, 2006. – 240 p.
4. Öner E., Birin A. Continuous contact problem for two elastic layers resting on an elastic half-infinite plane // Journal of mechanics of materials and structures. 2014, vol. 9, no. 1, pp 105-119.
5. Filonenko-Borodich M.M. Theory of Elasticity. The fourth edition is supplemented and revised. – М.: State Publishing House of Physical and Mathematical Literature, 1959. – 364 p.
6. Slavin O.K., Trumbachev V.F., Tarabasov N.D. Methods of photomechanics in mechanical engineering. – М.: Mechanical Engineering, 1983. – 269 p.
7. Ivanov G.V., Volchkov Yu.M., Annin B.D. Numerical solution of dynamic problems of elastic-plastic deformation of solids. – Novosibirsk: Siberian University Press, 2002. – 352 p.
8. Cipriano G.L. Determinacao do coeficiente de encruamento de metais atraves da morfologia das impressoes de dureza na escala macroscopica: diss. PhD. 2008.
9. Gulyaev V.A., Kozlov A.A., Loginov N.Y., Soldatov A.A. Problems of mathematical modelling of elastic boundary value in the stress-strain state of car body elements // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2019, vol. 560, p. 012143.
10. Gorbatenko B.B., Grebenyuk A.A., Maksimova L.A., Perepelitsyna O.A., Ryabukho V.P. Speckle-photography and holographic interferometry with digital recording of the diffraction field in the Fourier plane // Computer optics. 2010, vol. 34, no. 1, pp. 69-81.

Сведения об авторах:

Information about authors:

Гуляев Вадим Анатольевич – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры «Оборудование и технологии машиностроительного производства»	Gulyaev Vadim Anatolyevich – candidate of technical sciences, associate professor, associate professor of the Department «Equipment and technologies of machine-building production»
Козлов Антон Александрович – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры «Оборудование и технологии машиностроительного производства»	Kozlov Anton Alexandrovich – candidate of technical sciences, associate professor, associate professor of the Department «Equipment and technologies of machine-building production»
Логинов Николай Юрьевич – кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой «Оборудование и технологии машиностроительного производства» Colmy@tltsu.ru	Loginov Nikolay Yuryevich – candidate of technical sciences, associate professor, head of the Department «Equipment and technologies of machine-building production»

Получена 15.05.2023