

## УПРАВЛЯЕМОСТЬ И ОПТИМАЛЬНЫЙ СИНТЕЗ В ЗАДАЧАХ ОБСЛУЖИВАНИЯ

*Гукасян А.А.*

*Институт механики НАН Республики Армения, Ереван*

**Ключевые слова:** манипулятор, обслуживание, управляемость, синтез управления, технологический процесс.

**Аннотация.** Применяется подход построения матрицы управляемости для многоэтапного обслуживания манипулятором технологического процесса для определения условий управляемости трехэтапного обслуживания. Предполагается, что на первом этапе движение манипулятора описывается линейными дифференциальными уравнениями второго порядка, на втором этапе – третьего порядка, как модель электромеханического манипулятора, а на третьем этапе – второго порядка с нефиксированной массой на хвате. Матрица управляемости всей системы квадратичная, имеет Жорданову форму, где диагональные элементы являются матрицами управляемости для каждого этапа обслуживания. На основе принципа максимума разработан алгоритм оптимального по времени обслуживания и определены фазовые траектории движения манипулятора на каждом этапе и результаты обобщены для всех систем. Исследования могут быть полезны для специалистов в области теории управления и для разработчиков моделей управляемых технологических процессов.

## CONTROLLABILITY AND OPTIMAL SYNTHESIS IN MAINTENANCE TASKS

*Ghukasyan A.A.*

*Institute of Mechanics of NAS Republic of Armenia, Yerevan*

**Keywords:** manipulator, maintenance, controllability, control synthesis, technological process.

**Abstract.** The approach of constructing a controllability matrix for multi-stage maintenance by a process manipulator is used to determine the controllability conditions of three-stage maintenance. It is assumed that at the first stage, the movement of the manipulator is described by linear differential equations of the second order, at the second stage – of the third order, as an electromechanical manipulator, and at the third stage – of the second order with an unfixed mass on the grip. The controllability matrix of the entire system is quadratic, has a Jordan shape, where the diagonal elements are the controllability matrices for each stage of service. Based on the maximum principle, an algorithm for time-optimal maintenance has been developed and the phase trajectories of the manipulator movement at each stage have been determined and the results have been generalized for all systems. The research can be useful for specialists in the field of control theory and for developers of models of controlled technological processes.

### Введение

Важнейшей составной частью автоматизированных производственных систем являются роботы-манипуляторы, которые совершают самые разнообразные технологические операции. Монография [1] посвящена фундаментальным проблемам механики манипуляционных роботов, где основное внимание уделяется тем характеристикам, от которых зависят точность выполнения рабочих операций, производительность и уровень очувствления. В работах [2-4] исследованы различные модели процесса обслуживания манипулятором технологического участка. В частности, работа [2] посвящена оптимальному обслуживанию адаптивным манипулятором подвижных конвейеров. В [3, 4] приводятся результаты математического моделирования процесса многоэтапного обслуживания технологического участка, который состоит из подвижных или неподвижных объектов (целей) и управляемого многосвязного манипулятора. Приведено определение управляемости совокупных автономных динамических систем на всем интервале времени в зависимости от управляемости на каждом интервале времени. В [4] многоэтапное обслуживание осуществляется манипулятором с векторным управлением. Исследованы вопросы управляемости обслуживания в случае, когда на каждом этапе манипулятор имеет переменную структуру. Построена матрица управляемости всей системы в зависимости от матриц управляемости на каждом этапе обслуживания. В настоящей статье применяются результаты исследования выше указанных работ, в частности, для трехэтапного обслуживания манипулятором технологического процесса. Исследуются вопросы управляемости и возможность применения алгоритма

оптимального управления по быстродействию. Целью настоящего исследования является применение теоретических результатов, разработанных в [1-4] для конкретных случаев.

### 1. Модель процесса обслуживания

Следуя работам [3,4], приведем пример математической модели обслуживания манипулятором технологического процесса. Движение манипулятора на каждом интервале обслуживания  $[t_{i-1}, t_i]$  ( $i=1, 2, \dots, k$ ) представим линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами различных размеров и с векторным управлением

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}^1 = \mathbf{A}_1 \mathbf{x}^1 + \mathbf{B}_1 \mathbf{u}^1, t_0 \leq t \leq t_{1-}, \\ \dot{\mathbf{x}}^2 = \mathbf{A}_2 \mathbf{x}^2 + \mathbf{B}_2 \mathbf{u}^2, t_{1+} \leq t \leq t_{2-}, \\ \text{-----} \\ \dot{\mathbf{x}}^{k-1} = \mathbf{A}_{k-1} \mathbf{x}^{k-1} + \mathbf{B}_{k-1} \mathbf{u}^{k-1}, t_{(k-2)+} \leq t \leq t_{(k-1)-}, \\ \dot{\mathbf{x}}^k = \mathbf{A}_k \mathbf{x}^k + \mathbf{B}_k \mathbf{u}^k, t_{(k-1)+} \leq t \leq t_k = T, \end{cases} \quad (1.1)$$

где  $k$  – количество интервалов обслуживания  $[t_{i-1}, t_i]$  ( $i=1, 2, \dots, k$ ),  $\mathbf{x}^i$  –  $n_i$ -мерный фазовый вектор состояния манипулятора на интервале времени  $[t_{i-1}, t_i]$ ,  $\mathbf{A}_i$  –  $(n_i \times n_i)$ -мерная матрица с постоянными элементами  $\{a_{l,j}^i(\omega^j)\}_{l,j=1}^{n_i, n_i}$ ,  $\mathbf{B}_i$  –  $(n_i \times r_i)$ -мерная матрица с постоянными элементами  $\{b_{l,j}^i\}_{l,j=1}^{n_i, r_i}$  на интервале времени  $[t_{i-1}, t_i]$ ,  $\mathbf{u}^i$  –  $r_i$  ( $r_i \leq n_i$ ) -мерный вектор управления,  $t \in [t_0, T]$  ( $t_0$  – начальный,  $t_k = T$  – конечный моменты времени) [3, 4].

Предполагаем, что движения объектов на каждом интервале обслуживания  $[t_{i-1}, t_i]$  ( $i=1, 2, \dots, k$ ) заданы, то есть  $\mathbf{z}^i = \mathbf{z}^i(t)$  и  $t \in [t_{i-1}, t_i]$ .

Пусть в пространстве состояния заданы произвольные начальное ( $t=t_0, i=1$ ) и конечное ( $t=T, i=k$ ) положения системы (1.1) в виде

$$\mathbf{x}^1(t_0) = \mathbf{x}_{t_0}^1, \mathbf{x}^k(t_k) = \mathbf{x}^k(T) = \mathbf{x}_T^k, \quad (1.2)$$

где фазовый вектор  $\mathbf{x}_{t_0}^1$  имеет размерность  $n_1$ , а  $\mathbf{x}_T^k$  – размерность  $n_k$ .

В общем случае предполагается, что  $n_1 \neq n_k, r_1 \neq r_k$  и в промежуточные моменты времени  $t_i$  ( $i=1, 2, \dots, k-1$ ), когда происходит переход из одного этапа обслуживания в другое, фазовые векторы систем (1.1) удовлетворяют условиям:

$$\Phi_j(\mathbf{x}^i(t_i), \mathbf{z}^i(t_i), \mathbf{x}^{i+1}(t_i)) = 0, (j=1, 2, \dots, k-1, i=1, 2, \dots, k). \quad (1.3)$$

Это означает, что конец движения манипулятора на интервале  $t \in [t_{i-1}, t_i]$ , состояния объекта обслуживания и начальное состояние манипулятора на следующем интервале  $t \in [t_i, t_{i+1}]$  принадлежат некоторому многообразию. Условия (1.3) обеспечивают преемственность процесса обслуживания [11].

В частном случае, (1.3) может быть следующим соотношением

$$\mathbf{x}^i(t_i) = \mathbf{z}^i(t_i) = \mathbf{x}^{i+1}(t_i), (i=1, 2, \dots, k), \quad (1.4)$$

где  $\mathbf{z}^i(t_i)$  – фазовое состояние объектов в моменты времени  $t_i$  ( $i=1, 2, \dots, k-1$ ).

Не нарушая общности, предполагаем что  $n_{i+1} > n_i, r_{i+1} > r_i$  ( $r_i \leq n_i, r_{i+1} \leq n_{i+1}$ ) ( $i=1, 2, \dots, k-1$ ). Для согласования размерности фазовых векторов на разных этапах движения формально считаем, что движение на  $i$ -ом этапе происходит в  $n_{i+1}$ -мерном

пространстве  $R^{n_{i+1}}$ , где последние  $(n_{i+1} - n_i)$  компоненты фазового вектора  $\mathbf{x}^i(t)$  тождественно равны нулю [4].

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^i(t) &= (x_1^i, x_2^i, \dots, x_{n_i}^i, 0_{n_{i+1}}, 0_{n_{i+2}}, \dots, 0_{n_{i+1}})^T, \\ \mathbf{x}^{i+1}(t) &= (x_1^{i+1}, x_2^{i+1}, \dots, x_{n_i}^{i+1}, x_{n_{i+1}}^{i+1}, x_{n_{i+2}}^{i+1}, \dots, x_{n_{i+1}}^{i+1})^T \\ (x_1^{i+1}(t_i) &= x_1^i(t_i), x_2^{i+1}(t_i) = x_2^i(t_i), \dots, x_{n_i}^{i+1}(t_i) = x_{n_i}^i(t_i), \\ x_{n_{i+1}}^{i+1}(t_i) &\equiv 0, x_{n_{i+2}}^{i+1}(t_i) \equiv 0, \dots, x_{n_{i+1}}^{i+1}(t_i) \equiv 0),\end{aligned}\tag{1.5}$$

(формально можно увеличить размерность пространства состояний на  $i+1$  этапе на величину  $(n_i - n_{i+1})$ , когда  $n_{i+1} < n_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k-1$ ))

Поскольку на каждом интервале  $t \in [t_i, t_{i+1}]$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) движение манипулятора описывается системой линейных дифференциальных уравнений (1.1), то при  $\mathbf{u}^i = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_{r_i}(t))^T$  из области допустимых управлений имеем единственную траекторию движения, удовлетворяющую условиям (1.2)-(1.4). Полученные таким образом решения  $\mathbf{x}(t) = \{\mathbf{x}^i(t)\}$  являются непрерывными и кусочно-дифференцируемыми [7].

По аналогии с [3,4], здесь также предполагается, что время нахождения манипулятора около каждого объекта не учитывается, то есть в момент времени  $t_i$  манипулятор обслуживает объект под номером  $i$  и мгновенно направляется к другому объекту. С точки зрения теории и практики обслуживания манипулятором технологических процессов, содержательными являются задачи, когда последовательность обслуживания объектов является как фиксированной, так и не фиксированной. В первом случае задача обслуживания на каждом этапе  $[t_{i-1}, t_i]$  сводится к обычной задаче управления или оптимального управления с фиксированными или свободными краевыми условиями [7-9]. Во втором случае задачу обслуживания можно сформулировать как задачу нахождения последовательностей объектов обслуживания и моментов встреч, в процессе которых минимизирующий функционал будет зависеть также от последовательности встреч. Решение такой задачи существует, поскольку число возможных последовательностей встреч с объектами конечно.

Минимизирующий функционал на каждом этапе движения в общем случае представим в виде

$$I_i = I[t_i, t_{i+1}, \mathbf{x}^i, \mathbf{u}^i] \rightarrow \min_{\mathbf{u}^i \in \{U\}} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, k-1).\tag{1.6}$$

В работе [2] в качестве критерия оптимальности рассматривается также рациональное использование технологического участка ( $S \rightarrow \min$ ), который является геометрическим критерием и налагает на кинематику движения манипулятора дополнительное ограничение. В задачах синтеза функционал (1.6) имеет смысл времени и при фиксированных промежуточных условиях оптимальное время обслуживания является  $T = \sum_{i=1}^k \min T_i$ , где  $\min T_i$  – минимальное время обслуживания на интервале  $[t_{i-1}, t_i]$ , а оптимальное управление  $u^{(0)}$  на всем промежутке времени  $[t_0, T]$  является объединением  $u^{i(0)}$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) на интервалах  $[t_{i-1}, t_i]$ .

## 2. Управляемость процесса обслуживания

Приведем матрицу управляемости  $\mathbf{M}^k$  объединения систем (1.1) на интервале времени  $[t_0, T]$ , полученную в [3, 4].

$$\mathbf{M}^k = \{\mathbf{M}_1^1, \mathbf{M}_2^2, \dots, \mathbf{M}_{k-1}^{k-1}, \mathbf{M}_k^k\} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{0}_{12} & \mathbf{0}_{13} & \dots & \mathbf{0}_{1k-1} & \mathbf{0}_{1k} \\ \mathbf{0}_{21} & \mathbf{M}_{22} & \mathbf{0}_{23} & \dots & \mathbf{0}_{2k-1} & \mathbf{0}_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0}_{k-11} & \mathbf{0}_{k-12} & \mathbf{0}_{k-13} & \dots & \mathbf{M}_{k-1k-1} & \mathbf{0}_{k-1k} \\ \mathbf{0}_{k1} & \mathbf{0}_{k2} & \mathbf{0}_{k3} & \dots & \mathbf{0}_{kk-1} & \mathbf{M}_{kk} \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

где матрицы  $\mathbf{0}_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, k, i \neq j$ ) с нулевыми элементами имеют размерности  $(n_i \times n_j r_j)$ , а матрица управляемости  $\mathbf{M}^k$  - размерность  $\left[ \left( \sum_{j=1}^k n_j \right) \times \left( \sum_{j=1}^k n_j r_j \right) \right]$ .

Здесь

$$\mathbf{M}_1^1 = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1 & \mathbf{A}_1^2 \mathbf{B}_1 & \dots & \mathbf{A}_1^{n_1-1} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{0}_{21} & \mathbf{0}_{22} & \mathbf{0}_{23} & \dots & \mathbf{0}_{2n_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0}_{k1} & \mathbf{0}_{k2} & \mathbf{0}_{k3} & \dots & \mathbf{0}_{kn_1} \end{pmatrix}, \text{ при } t \in [t_0, t_1], \quad (2.2)$$

$$\mathbf{M}_2^2 = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{11} & \mathbf{0}_{12} & \mathbf{0}_{13} & \dots & \mathbf{0}_{1n_2} \\ \mathbf{B}_2 & \mathbf{A}_2 \mathbf{B}_2 & \mathbf{A}_2^2 \mathbf{B}_2 & \dots & \mathbf{A}_2^{n_2-1} \mathbf{B}_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0}_{k1} & \mathbf{0}_{k2} & \mathbf{0}_{k3} & \dots & \mathbf{0}_{kn_2} \end{pmatrix}, \text{ при } t \in [t_1, t_2], \quad (2.3)$$

$$\mathbf{M}_k^k = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{11} & \mathbf{0}_{12} & \mathbf{0}_{13} & \dots & \mathbf{0}_{1n_k} \\ \mathbf{0}_{21} & \mathbf{0}_{22} & \mathbf{0}_{23} & \dots & \mathbf{0}_{2n_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0}_{k-11} & \mathbf{0}_{k-12} & \mathbf{0}_{k-13} & \dots & \mathbf{0}_{k-1n_k} \\ \mathbf{B}_k & \mathbf{A}_k \mathbf{B}_k & \mathbf{A}_k^2 \mathbf{B}_k & \dots & \mathbf{A}_k^{n_k-1} \mathbf{B}_k \end{pmatrix} \text{ при } t \in [t_{k-1}, T], \quad (2.4)$$

$\mathbf{M}_{ii} = (\mathbf{B}_i \quad \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \quad \mathbf{A}_i^2 \mathbf{B}_i \quad \dots \quad \mathbf{A}_i^{n_i-1} \mathbf{B}_i)$  матрица управляемости подсистемы (1.1)

$$\dot{\mathbf{x}}^i = \mathbf{A}_i \mathbf{x}^i + \mathbf{B}_i \mathbf{u}^i, \text{ при } \mathbf{x}^{i-1}(t_{i-1}) = \mathbf{x}^i(t_{i-1}). \quad (2.5)$$

На интервале  $t \in [t_{i-1}, t_i]$  система (2.5) вполне управляема [8], если

$$\text{rang} \mathbf{M}_{ii} = \text{rang} (\mathbf{B}_i \quad \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \quad \mathbf{A}_i^2 \mathbf{B}_i \quad \dots \quad \mathbf{A}_i^{n_i-1} \mathbf{B}_i) = n_i \quad (i = 1, 2, \dots, k). \quad (2.6)$$

Следовательно, для рассматриваемой постановки, процесс обслуживания на всём промежутке времени  $[t_0, T]$  является вполне управляемым, если матрица управляемости (2.1) имеет максимальный ранг [4], то есть

$$\max \text{rang} \mathbf{M}^k = \max \text{rang} \sum_{i=1}^k \mathbf{M}_{ii} = (n_1 + n_2 + \dots + n_k). \quad (2.7)$$

В случае скалярного ( $r_i = 1, i = 1, 2, \dots, k$ ) управления и переменной структуры матрицы динамических характеристик манипулятора  $(\mathbf{A}_i - (n_i \times n_i), i = 1, 2, \dots, k)$  на интервале времени  $[t_0, T]$ , матрица управляемости  $\mathbf{M}^k$  имеет такую же структуру как (2.1) [3], где

$$\mathbf{M}_{ii} = (\mathbf{b}^i \quad \mathbf{A}_i \mathbf{b}^i \quad \mathbf{A}_i^2 \mathbf{b}^i \quad \dots \quad \mathbf{A}_i^{n_i-1} \mathbf{b}^i), \mathbf{b}^i = (b_1^i, b_2^i, \dots, b_{n_i}^i)^T, (i = 1, 2, \dots, k).$$

Следует отметить, что в работах [3,4] достаточно подробно исследованы вопросы управляемости обслуживания манипулятором технологических процессов, описываемых объединением (1.1) и показано, что весь процесс обслуживания на интервале времени  $[t_0, T]$  вполне управляем, если все подсистемы (2.5) управляемы на интервалах своего определения. При этом матрица управляемости всей системы  $\mathbf{M}^k$  является блочно-диагональной Жордановой формы.

### 2.1. Управляемость трехэтапного процесса обслуживания

Рассматриваем трехэтапный ( $k=3$ ) процесс обслуживания манипулятором технологического участка и предполагаем, что на каждом этапе обслуживания движение манипулятора описывается линейными дифференциальными уравнениями различных порядков со скалярным управлением. В частности, на первом этапе дифференциальными уравнениями второго порядка, на втором этапе – третьего порядка, как электромеханической модели манипулятора, а на третьем этапе – второго порядка с нефиксированной массой на схвате (эти уравнения являются приближенными и могут описывать движение манипулятора в результате линеаризации уравнений движения с применением ряда предположений относительно динамических и электромеханических характеристик манипулятора [1, 5, 6]). Требуется определить матрицы управляемости и построить управляющую функцию в зависимости от фазовых координат, которая обеспечивает процесс обслуживания на каждом этапе за минимальное время ( $T_i \rightarrow \min (i=1, 2, 3)$ ).

Итак, уравнения движений манипулятора на разных этапах обслуживания представим в виде (1.1)

$$\dot{\mathbf{x}}^i = \mathbf{A}_i \mathbf{x}^i + \mathbf{b}^i u^i, \text{ при } t \in [t_{i-1}, t_i], i=1, 2, 3.$$

На всем промежутке времени  $[t_0, T]$  ( $t_3 = T$ ) движения манипулятора описываются совокупностью

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}^1 = \mathbf{A}_1 \mathbf{x}^1 + \mathbf{b}^1 u^1, t_0 \leq t \leq t_{1-}, \\ \dot{\mathbf{x}}^2 = \mathbf{A}_2 \mathbf{x}^2 + \mathbf{b}^2 u^2, t_{1+} \leq t \leq t_{2-}, \\ \dot{\mathbf{x}}^3 = \mathbf{A}_3 \mathbf{x}^3 + \mathbf{b}^3 u^3, t_{2+} \leq t \leq t_3, \end{cases} \quad (2.8)$$

где  $\mathbf{x}^1 = (x_1^1, x_2^1)^T$ ,  $\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{b}^1 = \left(0, \frac{1}{m_1}\right)^T$ ,  $u^1(t) = \frac{u(t)}{m_1}$ ,  $|u^1| \leq 1$ ,  $t \in [t_0, t_1]$ ,

$$\mathbf{x}^2 = (x_1^2, x_2^2, x_3^2)^T, \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{b}^2 = \left(0, 0, \frac{1}{m_2}\right)^T, \quad t \in [t_1, t_2] \quad (2.9)$$

$$u^2(t) = \frac{u(t)}{m_2}, |u^2| \leq 1,$$

$$\mathbf{x}^3 = (x_1^3, x_2^3)^T, \mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{b}^3 = \left(0, \frac{1}{m_3}\right)^T, u^3 = u^3(t), t \in [t_2, t_3].$$

Предполагается, что масса  $m_3$  переносимого груза не фиксирована, но находится в заданных пределах  $m_0 \leq m_3 \leq M$  и на управляющую силу наложено ограничение

$$|u^3| \leq 1 + \eta, \text{ где } \max \eta = (M - m_0) / (M + m_0) \text{ [10].} \quad (2.10)$$

Для определения управляемости на всем интервале времени введем вектор  $\mathbf{y}$  [4]

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_7)^T, t \in [t_0, t_3], \quad (2.11)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}^1 = (x_1^1, x_2^1, 0, 0, 0, 0, 0)^T, t \in [t_0, t_{1-}],$$

где  $\mathbf{y} = \mathbf{y}^2 = (0, 0, x_1^2, x_2^2, x_3^2, 0, 0)^T, t \in [t_{1+}, t_{2-}],$

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}^3 = (0, 0, 0, 0, 0, x_1^3, x_2^3)^T, t \in [t_{2+}, t_3].$$

Введем также матрицу  $\mathbf{C}$  и вектор  $\mathbf{d}$  следующим образом

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0}_1 & \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{A}_2 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_1 & \mathbf{A}_3 \end{pmatrix}, \mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots, d_7)^T, t \in [t_0, t_3]. \quad (2.12)$$

Здесь матрица  $\mathbf{C}$  имеет размерность (7x7), матрица  $\mathbf{0}_2$  с нулевыми элементами размерность (2x2), а матрицы  $\mathbf{0}_1$  и  $\mathbf{0}_3$  с нулевыми элементами размерности (2x3) и (3x2), соответственно,

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}^1 = (b_1^1, b_2^1, 0, 0, 0, 0, 0)^T, t \in [t_0, t_{1-}];$$

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}^2 = (0, 0, b_1^2, b_2^2, b_3^2, 0, 0)^T, t \in [t_{1+}, t_{2-}], \quad (2.13)$$

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}^3 = (0, 0, 0, 0, 0, b_1^3, b_2^3)^T, t \in [t_{2+}, t_3]$$

С учетом (2.11)-(2.13) совокупность систем уравнений (2.8), можно формально записывать следующим образом

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{C}\mathbf{y} + \mathbf{d}u, t \in [t_0, T], \text{ или } \dot{\mathbf{y}}^i = \mathbf{C}_i\mathbf{y}^i + \mathbf{d}^i u, t \in [t_{i-1}, t_i], i = 1, 2, 3. \quad (2.14)$$

где  $\mathbf{C}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0}_1 & \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_{22} & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_1 & \mathbf{0}_{33} \end{pmatrix}, \mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{11} & \mathbf{0}_1 & \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{A}_2 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_1 & \mathbf{0}_{33} \end{pmatrix}, \mathbf{C}_3 = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{11} & \mathbf{0}_1 & \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_{22} & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_1 & \mathbf{A}_3 \end{pmatrix}.$  (2.15)

Матрицы с нулевыми элементами  $\mathbf{0}_{11}, \mathbf{0}_{22}$  и  $\mathbf{0}_{33}$  имеют размерности (2x2), (3x3) и (2x2), соответственно.

Как известно, каждая система из совокупности (2.8) является вполне управляемой на интервале времени  $t \in [t_{i-1}, t_i] (i = 1, 2, 3)$ , если ранг матрицы управляемости равен  $n_i$  [8], то есть

$$\text{rang}(\mathbf{b}^i \quad \mathbf{A}_i\mathbf{b}^i \quad \dots \quad \mathbf{A}_i^{n_i-1}\mathbf{b}^i) = n_i (i = 1, 2, 3). \quad (2.16)$$

Матрицы (2.16) для систем (2.14) имеют следующие структуры, соответственно

$$\mathbf{M}_1^1 = (\mathbf{d}^1 \quad \mathbf{C}_1\mathbf{d}^1) = \begin{pmatrix} \mathbf{b}^1 & \mathbf{A}_1\mathbf{b}^1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, t \in [t_0, t_1],$$

$$\mathbf{M}_2^2 = (\mathbf{d}^2 \quad \mathbf{C}_2\mathbf{d}^2 \quad \mathbf{C}_2^2\mathbf{d}^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{b}^2 & \mathbf{A}_2\mathbf{b}^2 & \mathbf{A}_2^2\mathbf{b}^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, t \in [t_1, t_2], \quad (2.17)$$

$$\mathbf{M}_3^3 = (\mathbf{d}^3 \quad \mathbf{C}_3 \mathbf{d}^3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \mathbf{b}^3 & \mathbf{A}_3 \mathbf{b}^3 \end{pmatrix}, t \in [t_2, t_3].$$

$\mathbf{M}_1^1$  имеет размерность (7x2),  $\mathbf{M}_2^2$  - (7x3), а  $\mathbf{M}_3^3$  - (7x2).

Объединяя матрицы (2.17), получим матрицу управляемости всей системы на интервале времени  $t \in [t_0, t_3]$

$$\mathbf{M}^3 = \{\mathbf{M}_1^1, \mathbf{M}_2^2, \mathbf{M}_3^3\} = \{(\mathbf{d}^1 \quad \mathbf{C}_1 \mathbf{d}^1), (\mathbf{d}^2 \quad \mathbf{C}_2 \mathbf{d}^2 \quad \mathbf{C}_2^2 \mathbf{d}^2), (\mathbf{d}^3 \quad \mathbf{C}_3 \mathbf{d}^3)\},$$

$$\mathbf{M}^3 = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{0}_{12} & \mathbf{0}_{13} \\ \mathbf{0}_{21} & \mathbf{M}_{22} & \mathbf{0}_{23} \\ \mathbf{0}_{31} & \mathbf{0}_{32} & \mathbf{M}_{33} \end{pmatrix}, \quad (2.18)$$

$$\mathbf{M}_{11} = (\mathbf{b}^1 \quad \mathbf{A}_1 \mathbf{b}^1) = \begin{pmatrix} 0 & 1/m_1 \\ 1/m_1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{M}_{22} = (\mathbf{b}^2 \quad \mathbf{A}_2 \mathbf{b}^2 \quad \mathbf{A}_2^2 \mathbf{b}^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/m_2 \\ 0 & 1/m_2 & 0 \\ 1/m_2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{M}_{33} = (\mathbf{b}^3 \quad \mathbf{A}_3 \mathbf{b}^3) = \begin{pmatrix} 0 & 1/m_3 \\ 1/m_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{M}^3$  имеет размерность (7x7), является блочно-диагональной матрицей Жордановой формы, где  $\mathbf{M}_{11}$  размерностью (2x2) является матрицей управляемости первой системы (2.8),  $\mathbf{M}_{22}$  - (3x3) матрицей управляемости второй системы (2.8), а  $\mathbf{M}_{33}$  - (2x2) матрицей управляемости третьей системы (2.8).

$$\det \mathbf{M}^3 = \det \mathbf{M}_{11} \cdot \det \mathbf{M}_{22} \cdot \det \mathbf{M}_{33}. \quad (2.19)$$

Из (2.16) следует, что процесс обслуживания вполне управляем, поскольку  $\det \mathbf{M}^3 \neq 0$  [8] и  $\text{rang} \mathbf{M}^3 = \text{rang} \mathbf{M}_{11} + \text{rang} \mathbf{M}_{22} + \text{rang} \mathbf{M}_{33} = 7$ .

$$\mathbf{M}^3 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{m_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m_3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m_3} & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

### 3. Оптимальный синтез по быстродействию

В работах [5-10] достаточно подробно исследованы отдельные законы оптимального синтеза по быстродействию ( $T \rightarrow \min$ ), результаты которых можно применять для определения управляющей функции и фазовых траекторий движения манипулятора на каждом интервале процесса обслуживания. Предполагается, что конечные положения на каждом этапе (положения объектов) фиксированы.

Для применения принципа максимума Понтрягина [7] введем вектор вспомогательных переменных  $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1^1, \eta_2^1, \eta_1^2, \eta_2^2, \eta_3^2, \eta_1^3, \eta_2^3)$  на интервале времени  $[t_0, t_3]$ , не обращающихся одновременно в ноль на каждом интервале обслуживания  $[t_0, t_1]$ ,  $[t_1, t_2]$  и  $[t_2, t_3]$ .

На каждом интервале обслуживания вектор  $\boldsymbol{\eta}$  имеет вид

$$\boldsymbol{\eta}^1 = (\eta_1^1, \eta_2^1, 0, 0, 0, 0, 0) \text{ на интервале } [t_0, t_1], \quad (3.1)$$

$$\boldsymbol{\eta}^2 = (0, 0, \eta_1^2, \eta_2^2, \eta_3^2, 0, 0) \text{ на интервале } [t_1, t_2], \quad (3.2)$$

$$\boldsymbol{\eta}^3 = (0, 0, 0, 0, 0, \eta_1^3, \eta_2^3) \text{ на интервале } [t_2, t_3]. \quad (3.3)$$

Из (2.8), (2.9), (3.1)-(3.3) следует, что функцию Гамильтона для задач оптимального управления можно записать в виде [7]

$$H(\mathbf{y}, \boldsymbol{\eta}, \mathbf{u}) = \sum_{i=1}^3 H^i(\mathbf{y}^i, \boldsymbol{\eta}^i, \mathbf{u}^i) \text{ на интервале } t \in [t_0, t_3], \text{ где}$$

$$H^1(\mathbf{y}^1, \boldsymbol{\eta}^1, u^1) = \eta_1^1 x_2^1 + \eta_2^1 u^1, t \in [t_0, t_1];$$

$$H^2(\mathbf{y}^2, \boldsymbol{\eta}^2, u^2) = \eta_1^2 x_2^2 + \eta_2^2 x_3^2 + \eta_3^2 u^2, t \in [t_1, t_2];$$

$$H^3(\mathbf{y}^3, \boldsymbol{\eta}^3, u^3) = \eta_1^3 x_2^3 + \eta_2^3 u^3, t \in [t_2, t_3]. \quad (3.4)$$

$$\text{Функции } (x_1^1, x_2^1, x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_1^3, x_2^3), (\eta_1^1, \eta_2^1, \eta_1^2, \eta_2^2, \eta_3^2, \eta_1^3, \eta_2^3)$$

удовлетворяют гамильтоновой системе

$$\dot{x}_1^1 = \frac{\partial H^1}{\partial \eta_1^1}, \dot{x}_2^1 = \frac{\partial H^1}{\partial \eta_2^1}; \dot{\eta}_1^1 = -\frac{\partial H^1}{\partial x_1^1}, \dot{\eta}_2^1 = -\frac{\partial H^1}{\partial x_2^1}, t \in [t_0, t_1], \quad (3.5)$$

где  $\dot{\eta}_1^1 = 0, \dot{\eta}_2^1 = -\eta_1^1$ ;

$$\dot{x}_1^2 = \frac{\partial H^2}{\partial \eta_1^2}, \dot{x}_2^2 = \frac{\partial H^2}{\partial \eta_2^2}, \dot{x}_3^2 = \frac{\partial H^2}{\partial \eta_3^2}; \quad (3.6)$$

$$\dot{\eta}_1^2 = -\frac{\partial H^2}{\partial x_1^2}, \dot{\eta}_2^2 = -\frac{\partial H^2}{\partial x_2^2}, \dot{\eta}_3^2 = -\frac{\partial H^2}{\partial x_3^2}, t \in [t_1, t_2],$$

где  $\dot{\eta}_1^2 = 0, \dot{\eta}_2^2 = -\eta_1^2, \dot{\eta}_3^2 = -\eta_2^2$

$$\dot{x}_1^3 = \frac{\partial H^3}{\partial \eta_1^3}, \dot{x}_2^3 = \frac{\partial H^3}{\partial \eta_2^3}; \dot{\eta}_1^3 = -\frac{\partial H^3}{\partial x_1^3}, \dot{\eta}_2^3 = -\frac{\partial H^3}{\partial x_2^3}, t \in [t_2, t_3], \quad (3.7)$$

где  $\dot{\eta}_1^3 = 0, \dot{\eta}_2^3 = -\eta_1^3$ .

Согласно принципу максимума Понтрягина оптимальное управление  $u^{i(o)}(t)$  на каждом этапе обслуживания максимизирует функцию Гамильтона  $H^i(\mathbf{y}^i, \boldsymbol{\eta}^i, u^i)$ ,  $(i=1, 2, 3)$ .

$$H^i(\mathbf{y}^i, \boldsymbol{\eta}^i, u^{i(o)}) = \max_{|u^i| \leq 1} H^i(\mathbf{y}^i, \boldsymbol{\eta}^i, u^i), (i=1, 2, 3). \quad (3.8)$$



### 3.1. Синтез управления на первом этапе

Согласно (3.4), (3.5) и (3.8), на первом этапе обслуживания имеем

$$u^{1(o)}(t) = \text{sign}\eta_2^1(t), \quad (3.9)$$

где  $\eta_2^1(t)$  линейная функция от  $t$  ( $t_0 \leq t \leq t_1$ ), которая меняет знак не более одного раза.

Следовательно, оптимальное управление  $u^{1(o)}(t)$  является кусочно-постоянной функцией, принимающей значения  $\pm 1$  и имеющей не более двух интервалов постоянства

$$u^{1(o)}(t) = +1, \text{ если } \eta_2^1(t) > 0 \text{ и } u^{1(o)}(t) = -1, \text{ если } \eta_2^1(t) < 0. \quad (3.10)$$

Фазовые траектории, по которым оптимально по времени движется манипулятор, согласно (2.8), (3.9), (3.10), являются семейством парабол

$$x_1^1 = \frac{1}{2}(x_2^1)^2 + c, u^{1(o)} = 1; \quad x_1^1 = -\frac{1}{2}(x_2^1)^2 + c', u^{1(o)} = -1. \quad (3.11)$$

На рисунке 1 изображено все семейство полученных таким образом фазовых траекторий обслуживания на первом этапе ( $t_0 \leq t \leq t_1$ ). Здесь начало координат  $O^1(x_1^1(t_1), x_2^1(t_1))$  фазовой плоскости определяется согласно (1.4). Точка  $O^1$  является конечной точкой для первого этапа обслуживания и начальной позицией для второго этапа, то есть

$$x_1^1(t_1) = x_1^2(t_1), x_2^1(t_1) = x_2^2(t_1), x_3^2(t_1), \quad (3.12)$$

( $x_3^2(t_1)$  определяется из параметров конкретной задачи.

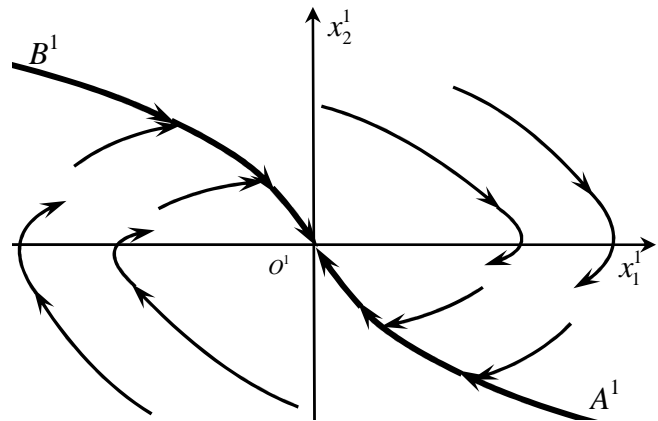


Рис. 1. Семейство фазовых траекторий обслуживания

Заметим также, что в случае, когда размеры фазовых векторов в разные этапы обслуживания меняются, то условие (1.4) может иметь место с точностью постоянных, обусловленных значением фазовых координат в конце этапа обслуживания)

Параметры дуги  $A^1O^1$ ,  $B^1O^1$  парабол (3.11) определяются согласно (1.4) и (3.12).

Синтез оптимального управления (обслуживания) по быстрдействию на первом этапе можно представить следующим образом

$$u^{1(o)}(x_1^1, x_2^1) = \begin{cases} -1, \text{ если начальная точка } x^1(t_0) \text{ находится выше,} \\ \text{линии переключения } A^1O^1B^1 \text{ и на линии } B^1O^1, \\ +1, \text{ если начальная точка } x^1(t_0) \text{ находится ниже,} \\ \text{линии переключения } A^1O^1B^1 \text{ и на линии } A^1O^1. \end{cases} \quad (3.13)$$

### 3.2. Построение синтеза управления на втором этапе обслуживания

На втором этапе  $t_1 \leq t \leq t_2$  обслуживания принята линейная модель электромеханического манипулятора, уравнение движения которого описывается уравнением третьего порядка (2.8). Оптимальное управление, как следует из принципа максимума, имеет релейный вид с двумя переключениями (3.4), (3.6), (3.8).

$$u^{2(o)}(t) = \text{sign}\eta_3^2(t), \quad t_1 \leq t \leq t_2. \quad (3.14)$$

где  $\eta_3^2(t) = \eta_{10}^2 \frac{t^2}{2} + \eta_{20}^2 t + \eta_{30}^2$ , параметры  $\eta_{10}^2, \eta_{20}^2, \eta_{30}^2$  определяются из начальных условий, которые являются конечным условием для первого этапа обслуживания.

Точки переключения оптимального управления (3.14) соответствуют нулям квадратичной функции  $\eta_3^2(t)$  на отрезке времени  $t_1 \leq t \leq t_2$ .

Оптимальное управление  $u^{2(o)}(t)$  является кусочно-постоянной функцией, принимающей значения  $\pm 1$  и имеющей не более трех интервалов постоянства, то есть

$$\begin{aligned} u^{2(o)}(t) &= +1, \text{ если } \eta_3^2(t) > 0, \quad u^{2(o)}(t) = -1, \text{ если } \eta_2^1(t) < 0 \text{ и} \\ u^{2(o)}(t) &= +1, \text{ если } \eta_3^2(t) > 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

По аналогии с [9] методом «попятного» движения построим линии  $\Gamma_+$  ( $\Gamma_-$ ) и поверхности  $W_+$  ( $W_-$ ) переключения управляющей функции, с учетом (2.8), (3.12), (3.14). Для построения линии  $\Gamma_+$  интегрируем второе уравнение (2.8) в обратном времени при  $u^{2(o)}(t) = +1$  предполагая, что конечная точка второго этапа обслуживания в пространстве  $R^3$  имеет следующие координаты  $O^2(x_1^2(t_2), x_2^2(t_2), x_3^2(t_2))$  (рис. 2).

Параметрическое уравнение линии  $\Gamma_+$ , исходящей из конечной точки, имеет вид

$$\Gamma_+ : \begin{cases} x_1^2(t) = -\frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{2}c_1t^2 - c_2t + c_3, \\ x_2^2(t) = \frac{1}{2}t^2 - c_1t + c_2, \\ x_3^2(t) = -t + c_1, \end{cases} \quad (3.16)$$

где  $c_1 = x_3^2(t_2) + t_2$ ,  $c_2 = x_2^2(t_2) - \frac{1}{2}t_2^2 + c_1t_2$ ,  $c_3 = x_1^2(t_2) + \frac{1}{6}t_2^3 - \frac{1}{2}c_1t_2^2 + c_2t_2$

Аналогичным образом можно построить линии переключения  $\Gamma_-$ .

Каждая точка линии  $\Gamma_+$  является точкой переключения управления  $u^{2(o)}(t) = +1$  на  $u^{2(o)}(t) = -1$ .

Для каждой точки  $\Gamma_+$  построим решение второй системы дифференциальных уравнений из (2.8), соответствующих значению  $u^{2(o)}(t) = -1$  в обратном времени, получим параметрическое уравнение поверхности переключения  $W_-$ .

$$W_- : \begin{cases} x_1^2(t, \tau) = \frac{1}{6}\tau^3 + \frac{1}{2}k_1\tau - k_2\tau + k_3, \\ x_2^2(t, \tau) = -\frac{1}{2}\tau^2 - k_1\tau + k_2, \\ x_3^2(t, \tau) = \tau + k_1. \end{cases} \quad (3.17)$$

Здесь  $k_1, k_2, k_3$  определяются согласно (3.16) при  $\tau = 0$

$$k_1 = -t + c_1, \quad k_2 = \frac{1}{2}t^2 - c_1t + c_2, \quad k_3 = -\frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{2}c_1t^2 - c_2t + c_3. \quad (3.18)$$

Параметры  $c_1, c_2, c_3$  определяются согласно (3.16).

Аналогичным образом строится поверхность переключения  $W_+$ .

Объединяя кривые  $\Gamma_+$  и  $\Gamma_-$ , получим полную кривую переключения  $\Gamma = \Gamma_+ \cup \Gamma_-$ , приводящую вторую систему (2.8) в конечную точку  $O^2(x_1^2(t_2), x_2^2(t_2), x_3^2(t_2))$ . Объединяя поверхности  $W_+$  ( $\partial W_+ = \Gamma_-$ ) и  $W_-$  ( $\partial W_- = \Gamma_+$ ), получим полную поверхность переключения

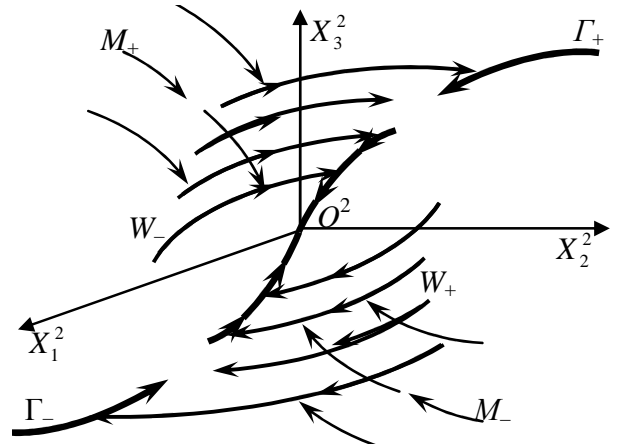


Рис. 2. Построение линий  $\Gamma_+$  ( $\Gamma_-$ ) и поверхностей  $W_+$  ( $W_-$ )

$W = W_+ \cup W_-$ , которая содержит кривую переключения  $\Gamma$ . Поверхность  $W$  разбивает фазовое пространство  $R^3$  на две части  $M_+$  и  $M_-$ , а  $\Gamma$  разбивает поверхность  $W$  на две части [9].

Синтез оптимального управления по быстродействию строится следующим образом. Если начальное положение второго этапа обслуживания или конечное положение первого этапа находится в области  $M_+$  ( $M_-$ ) (рис. 2), то применяется управление  $u^{2(o)}(x_1^2, x_2^2, x_3^2) = +1$  ( $u^{2(o)}(x_1^2, x_2^2, x_3^2) = -1$ ) до попадания на поверхность переключения  $W_-$  ( $W_+$ ). Затем производятся переключения  $u^{2(o)}(x_1^2, x_2^2, x_3^2) = -1$  ( $u^{2(o)}(x_1^2, x_2^2, x_3^2) = +1$ ), пока точка не попадает на линию переключения  $\Gamma_+$  ( $\Gamma_-$ ). На линии  $\Gamma_+$  ( $\Gamma_-$ ) переключаем  $u^{2(o)}(x_1^2, x_2^2, x_3^2) = +1$  ( $u^{2(o)}(x_1^2, x_2^2, x_3^2) = -1$ ) и вдоль  $\Gamma_+$  ( $\Gamma_-$ ) приведем систему в точку  $O^2(x_1^2(t_2), x_2^2(t_2), x_3^2(t_2))$ .

Синтез управления с двумя переключениями имеет вид

$$u_1^{2(o)}(x_1^2, x_2^2, x_3^2) = \begin{cases} +1 \text{ в } M_+ \\ -1 \text{ на } W_- \setminus \Gamma_+ \\ +1 \text{ на } \Gamma_+ \end{cases}, \quad u_1^{2(o)}(x_1^2, x_2^2, x_3^2) = \begin{cases} -1 \text{ в } M_-, \\ +1 \text{ на } W_+ \setminus \Gamma_-, \\ -1 \text{ на } \Gamma_-. \end{cases} \quad (3.19)$$

Объединяя (3.19), получим следующую синтезирующую функцию для второго этапа обслуживания манипулятором

$$u^{2(o)}(x_1^2, x_2^2, x_3^2) = \begin{cases} u_1^{2(o)}(x_1^2, x_2^2, x_3^2), & \text{если } (x_1^2(t_1), x_2^2(t_1), x_3^2(t_1)) \in M_+, \\ u_2^{2(o)}(x_1^2, x_2^2, x_3^2), & \text{если } (x_1^2(t_1), x_2^2(t_1), x_3^2(t_1)) \in M_-. \end{cases} \quad (3.20)$$

### 3.3. Квазиоптимальный синтез управления на третьем этапе

На третьем этапе обслуживания, где масса переносимого груза манипулятором не фиксирована [10], требуется построить оптимальное управление в форме синтеза  $u^{3(o)}(x_1^3, x_2^3)$  такое, что при любом значении массы  $m_3$ , удовлетворяющем ограничениям  $m_0 \leq m_3 \leq M$ , всякая траектория движения схвата манипулятора приводилась в конечную фазовую точку при фиксированной линии переключения, построенной для массы  $m'$  (можно считать  $m' = (M + m_0)/2$ ) с минимальным числом точек переключений и, при возможности, сохранить ограничения  $|u^3| \leq 1$ .

В случае, когда масса переносимого груза фиксирована  $m_3 = m'$  и  $|u^3| \leq 1$ , то синтез управления по быстродействию имеет вид (рис. 3)

$$u^{3(o)}(x_1^3, x_2^3) = \begin{cases} -1, & \text{если начальная точка } (x_1^3(t_2), x_2^3(t_2)) \text{ находится выше,} \\ & \text{линии } A^3 O^3 B^3 \text{ и на линии } B^3 O^3, \\ +1, & \text{если начальная точка } (x_1^3(t_2), x_2^3(t_2)) \text{ находится ниже,} \\ & \text{линии } A^3 O^3 B^3 \text{ и на линии } A^3 O^3. \end{cases} \quad (3.21)$$

Закон управления (3.21) полностью определяется кривой переключений  $A^3 O^3 B^3 (x_1^3 = \pm m'(x_2^3)^2 / 2 + s)$ .

Приведем результаты исследования в случае, когда масса  $m_3$  не совпадает со значением  $m'$ . Предположим сначала, что масса точки  $m_3$  меньше параметра кривой переключений  $A^3 O^3 B^3$ , то есть  $m_0 \leq m_3 < m'$  [10]. На рисунке 3 жирной линией изображена кривая переключений, отвечающая массе  $m'$  и ограничению  $|u^3| \leq 1$ , а тонкой сплошной линией – отвечающая массе  $m_3$  при ограничении  $|u^3| \leq 1$ .

Пусть сначала начальная точка находится выше кривой переключения  $A^3O^3B^3$ . Траектория движения здесь состоит из двух ветвей парабол. В случае, когда начальная точка  $(x_1^3(t_2), x_2^3(t_2))$  находится между линиями  $O^3B^3$  и  $O^3F$ , то при сохранении линии переключения  $A^3O^3B^3$  движение должно пройти по параболе  $x_1^3 = -m_3(x_2^3)^2/2 + c$  ( $c = x_1^3(t_2) + x_2^3(t_2)^2 m_3/2$ ), при  $u^3 = -1$  до точки пересечения  $B_1$ . Далее, если не изменить величину управляющей функции  $u^3$ , возможность которой имеем, так

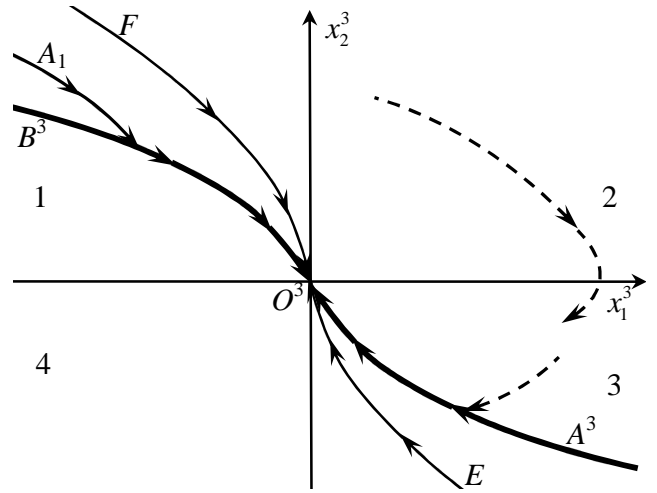


Рис. 3. Результаты синтеза управления

как  $|u^3| \leq 1 + \eta$ , где  $\max \eta = (M - m_0)/(M + m_0)$ , то движение до конца должно идти вдоль линии  $B^3O^3$  при скользящем режиме управления. Избегая многочисленных точек переключения на участке траектории  $B_1O^3$ , в рамках ограничения  $|u^3| \leq 1 + \eta$ , управляющую функцию определим в виде  $u^3 = -1 - \eta$ , где  $\eta = (m_3 - m')m' < 0$ . Следовательно, движение из точки  $B_1$  до  $O^3$  пройдет по квазиоптимальному режиму управления. Аналогично можно построить закон управления и фазовые траектории движения манипулятора в областях 2, 3, 4.

Синтез оптимального и квазиоптимального по времени управления с одной точкой переключения при сохранении линии переключения  $A^3O^3B^3$  имеет вид (рис. 3).

$$u_*^{3(o)}(x_1^3, x_2^3) = \begin{cases} -1, & \text{если начальная точка находится выше линии } A^3O^3B^3, \\ +1, & \text{если начальная точка находится ниже линии } A^3O^3B^3, \\ -(1 + \eta), & \text{если начальная точка находится на линии } B^3O^3, \\ +(1 + \eta), & \text{если начальная точка находится на линии } A^3O^3. \end{cases} \quad (3.22)$$

В [10] исследован также случай, когда масса переносимого груза больше параметра кривой переключений, то есть  $m' < m_3 < M$ . Разработанный алгоритм позволяет с некоторой точностью эффективно применить систему управления. Для всех допустимых значений масс построена кибернетическая схема квазиоптимального управления. Когда масса груза во время обслуживания изменяется по линейному закону, можно применить алгоритм управления, разработанный авторами работы [10].

Итак, объединяя управления (3.13), (3.19) - (3.22), получим

$$u^{(o)}(x_1^1, x_2^1, x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_1^3, x_2^3) = \begin{cases} u^{1(o)}(x_1^1, x_2^1), t \in [t_0, t_1], \\ u^{2(o)}(x_1^2, x_2^2, x_3^2), t \in [t_1, t_2], \\ u^{3(o)}(x_1^3, x_2^3), m_3 = m', t \in [t_2, t_3], \\ u_*^{3(o)}(x_1^3, x_2^3), m_0 \leq m_3 < m', t \in [t_2, t_3]. \end{cases} \quad (3.23)$$

Управление (3.23), в рамках принятой линейной модели, обеспечивает оптимальное (квазиоптимальное) по быстродействию обслуживание манипулятором технологического процесса на интервале времени  $t \in [t_0, t_3]$ . Фазовые траектории движения, при этом являются непрерывными и кусочно-дифференцируемыми функциями.

### Заключение

С применением методики исследования задач многоэтапного обслуживания манипулятором технологического процесса [2-4] построена математическая модель

трехэтапного обслуживания, когда на каждом этапе движение манипулятора описывается линейными дифференциальными уравнениями различных порядков. Определена матрица управляемости всей системы, которая имеет жорданову форму, где диагональные элементы являются матрицами управляемости для каждого этапа обслуживания. Разработан алгоритм оптимального по времени обслуживания и определены фазовые траектории движения манипулятора на каждом этапе. Результаты исследования могут быть полезны для специалистов в области теории управления и для разработчиков моделей управляемых технологических процессов.

#### Список литературы

1. Черноусько Ф.Л., Градецкий В.Г., Болотник Н.Н. Манипуляционные роботы. – М.: Наука, 1989. – 363 с.
2. Гукасян А.А. Об одной задаче оптимального моделирования технологического процесса, обслуживаемого манипуляционным роботом // Известия АН Арм. ССР. Механика. – 1986. – Т. 39, №6. – С. 39-49.
3. Гукасян А.А. О математическом моделировании процесса обслуживания и условия ее управляемости // Известия НАН РА, Механика. – 2017. – Т. 70, №3. – С. 26-38.
4. Гукасян А.А. Обобщенная модель многоэтапного обслуживания манипулятором технологического процесса и условия управляемости // Известия НАН РА, Механика. – 2022. – Т. 75, №1,2. – С. 67-84.
5. Акуленко Л.Д., Болотник Н.Н. Синтез оптимального управления транспортными движениями манипуляционных роботов // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1986. – №4. – С. 21-29.
6. Аветисян В.В., Акуленко Л.Д., Болотник Н.Н. Оптимальное управление электроприводами промышленных роботов // Препринт №283. – М.: Институт проблем механики АН СССР, 1986. – 72 с.
7. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкредидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1983. – 392с.
8. Красовский Н.Н. Теория управления движением. – М.: Наука, 1968. – 475 с.
9. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. – М.: Наука, 1972. – 574с.
10. Гукасян А.А., Матевосян А.Г. Об управляемом движении материальной точки с нефиксированной массой // Известия НАН РА, Механика. – 2002. – №1. – С. 75-81.
11. Величенко В.В. Условия оптимальности в задачах управления с промежуточными условиями // ДАН СССР. – 1967. – Т. 174, №5. – С. 1011-1013.
12. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Физматлит, 2004. – 560 с.

#### References

1. Chernousko F.L., Hradetsky V.G., Bolotnik N.N. Manipulative robots. – M.: Science, 1989. – 363 p.
2. Gukasyan A.A. On one problem of optimal modeling of a technological process serviced by a manipulative robot // News of AN Arm. SSR. Mechanics. 1986, vol. 39, no. 6, pp. 39-49.
3. Gukasyan A.A. On mathematical modeling of the service process and the conditions of its controllability // News of NAS RA, Mechanics. 2017, vol. 70, no. 3, pp. 26-38.
4. Gukasyan A.A. Generalized model of multi-stage maintenance by a process manipulator and controllability conditions // News of NAS RA, Mechanics. 2022, vol. 75, no. 1,2, pp. 67-84.
5. Akulenko L.D., Bolotnik N.N. Synthesis of optimal control of transport movements of manipulative robots // News of AN SSSR. Solid state mechanics. 1986, no. 4, pp. 21-29.
6. Avetisyan V.V., Akulenko L.D., Bolotnik N.N. Optimal control of electric drives of industrial robots // Preprint No. 283. – M.: Institute of Problems of Mechanics of the USSR Academy of Sciences, 1986. – 72 p.
7. Pontryagin L.S., Boltyansky V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. Mathematical theory of optimal processes. – M.: Science, 1983. – 392s.
8. Krasovsky N.N. Theory of motion control. – M.: Science, 1968. – 475 p.
9. Lee E.B., Marcus L. Fundamentals of the theory of optimal control. – M.: Science, 1972. – 574s.
10. Gukasyan A.A., Matevosyan A.G. On the controlled motion of a material point with an unfixed mass // News of NAS RA, Mechanics. 2002, no. 1, pp. 75-81.
11. Velichenko V.V. Optimality conditions in control problems with intermediate conditions // DAN USSR. 1967, vol. 174, no. 5, pp. 1011-1013.
12. Gantmacher F.R. Matrix theory. – M.: Fizmatlit, 2004. – 560 p.

*Сведения об авторах:*

*Information about authors:*

<p><b>Гукасян Артуш Аapresович</b> – доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник ghukasyan10@yandex.com</p>	<p><b>Ghukasyan Artush Apresovich</b> – doctor of physical and mathematical sciences, professor, leading researcher</p>
---	---

Получена 26.04.2023