

## АППРОКСИМАЦИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ОПОР СТЕРЖНЯ ПРИ КРУТИЛЬНЫХ И ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ С УЧЕТОМ ЖЕСТКОСТИ ОПОР

Кудрявцев И.В.<sup>1</sup>, Малыхина Л.К.<sup>1</sup>, Рабецкая О.И.<sup>2</sup>, Кудрявцева Ю.М.<sup>1</sup>, Швец Д.А.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Сибирский федеральный университет, Красноярск;

<sup>2</sup>Сибирский государственный университет науки и технологий  
имени академика М.Ф. Решетнева, Красноярск

**Ключевые слова:** стержень, крутильные колебания, продольные колебания, жесткость опор, аппроксимация.

**Аннотация.** В работе проведено исследование первой собственной частоты крутильных и продольных свободных колебаний двухопорного стержня при различной жесткости опор. Задача в этих случаях сводится к вычислению собственных значений некоторого частотного трансцендентного уравнения, полученного в процессе решения соответствующего дифференциального уравнения колебаний при заданных граничных условиях. Решение трансцендентного уравнения не имеет аналитического решения и выполняется различными численными методами, что затрудняет использовать такой подход в инженерных расчетах.

Обзор литературы показал, что в теории колебаний данная проблема решается справочными изданиями, в которых приведены решения задач на собственные значения, называемых коэффициентами опор, для крутильных и продольных свободных колебаний стержня при различных способах закрепления. Однако рассмотренные там случаи закрепления ограничены только простыми видами опор, а упругие опоры представлены для очень ограниченного числа вариантов их жесткостей. Кроме того, зачастую эти значения представлены в виде графиков, которые не позволяют точно установить искомое значение коэффициента опор.

Для решения этой проблемы в данной работе выполнен расчет коэффициентов опор для первой собственной частоты крутильных и продольных колебаниях в зависимости от жесткости опор стержня. Решение частотного трансцендентного уравнения выполнялось численным итерационным методом, для которого была создана программа на ЭВМ. В результате был получен массив значений коэффициентов опор, которые были аппроксимированы квадратичными функциями. Для снижения погрешности аппроксимации нелинейной зависимости коэффициента опор, рассматриваемая область жесткостей опор была разделена на три зоны. Квадратичная аппроксимация позволила получить простые аналитические зависимости, пригодные для инженерных прикладных расчетов как прямой задачи по определению коэффициента опор для заданной жесткости опор, так и обратную, по определению требуемой жесткости опор для заданного значения первой собственной частоты колебаний. Исследование погрешности аппроксимации показало, что отклонения не превышают 5% во всем рассматриваемом диапазоне жесткостей, если жесткости опор стержня одного порядка. Полученные результаты можно использовать в инженерных прикладных расчетах собственных частот крутильных и продольных колебаний балок с упругими опорами.

## APPROXIMATION OF BEAM SUPPORT COEFFICIENTS OF SHAFTS IN TORSION VIBRATIONS CONSIDERING STIFFNESS OF SUPPORTS

Kudryavtsev I.V.<sup>1</sup>, Malykhina L.K.<sup>1</sup>, Rabetskaya O.I.<sup>2</sup>, Kudryavtseva Yu.M.<sup>1</sup>, Shvets D.A.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Siberian Federal University, Krasnoyarsk;

<sup>2</sup>Reshetnev Siberian State University of Science and Technology, Krasnoyarsk

**Keywords:** rod, torsional vibration, longitudinal vibration, stiffness of supports, approximation.

**Abstract.** Study of first natural frequency of torsional and longitudinal free vibrations of double-bearing rod for specified rigidity of supports is carried out. The problem in these cases come down to calculating the eigen values of some frequency transcendental equation obtained in the process of solving the corresponding differential equation of vibrations under given boundary conditions. The solution to the transcendental equation has no analytic solution and is performed by various numerical methods, making it difficult to use this approach in engineering calculations

A review of the literature has shown that in the theory of vibrations, this problem is solved by reference publications that provide solutions to problems with eigenvalues, called support coefficients, for torsional and longitudinal free vibrations of the rod in various methods of fixation. However, the fastening cases discussed there are limited only by simple types of supports, and elastic supports are presented for a very limited number of options for their stiffness. In addition, often these values are presented in the form of graphs that do not allow you to accurately determine the desired value of the support coefficient.

To solve this problem, in this work, an extended calculation of the support coefficients for the first natural frequency of torsional and longitudinal vibrations depending on the rigidity of the rod supports is made. The solution of the frequency transcendental equation was carried out by a numerical iteration method, for which a computer program was created. As a result, an array of values of support coefficients was obtained, which were approximated by quadratic functions. To reduce the error of approximation of the nonlinear dependence of the support coefficient, the considered area of the supports stiffness was divided into three zones. The quadratic approximation made it possible to obtain simple analytical dependencies suitable for engineering applied calculations, both a direct problem for determining the coefficient of supports for a given stiffness of supports, and the opposite, for determining the required stiffness of supports for a given value of the first natural frequency of vibrations. The study of the approximation error showed that the deviations do not exceed 5% in the entire considered stiffness range if the stiffness of the rod supports is of the same order. The obtained results can be used in engineering applied calculations of natural frequencies of vibrations of beams with elastic supports.

## **Введение**

Несмотря на широкое распространение численных методов расчета колебаний протяженных конструкций с помощью специализированных программ на ЭВМ, на практике по-прежнему используются и аналитические методы их расчета. Аналитические расчеты позволяют оперативно оценивать поведение конструкции в целом, наглядно определить влияние различных факторов в решение, а также проверить и убедиться в корректности расчетов, проводимых численными методами [1-13].

Одним из важнейших динамических параметров конструкции является ее первая собственная частота колебаний, на значение которой при наличии вынужденных колебаний всегда накладываются определенные ограничения. Значение первой собственной частоты конструкции при воздействии вынужденных колебаний во многом определяет возникающие амплитуды вибраций и усталостных напряжений, определяя срок службы изделия, поэтому это значение не должно приближаться к некоторому заданному пределу.

В данной работе рассматриваются крутильные и продольные колебания стержня, закрепленного по краям на упругих опорах с различной жесткостью. Постановка задачи расчета собственных частот колебаний стержня сводится к дифференциальному уравнению с заданными граничными условиями и в результате приводится к частотному трансцендентному уравнению. Решением трансцендентного уравнения являются собственные значения, определяющие величину так называемых коэффициентов опор, которые используются в дальнейшем для аналитического определения значений собственных частот стержня.

Однако трансцендентное уравнение не имеет аналитического решения и обычно используют различные численные методы, что затрудняет прикладные инженерные расчеты. Некоторым выходом из данной ситуации является справочная литература по колебаниям, в которой приводится набор готовых решений для стержней при разных способах закрепления, например [14-17]. Однако в имеющейся литературе приводятся решения только для ограниченного числа видов опор, их жесткостей и комбинаций. К тому же, многие справочники приводят решения в графическом виде и мелком масштабе, что с учетом сильно нелинейной зависимости затрудняет точное определение коэффициентов опор.

Помимо решения прямой задачи по определению коэффициента опор при заданном закреплении, расчетчик часто сталкивается с необходимостью решения и обратной задачи по определению требуемой жесткости опор, обеспечивающих заданное значение первой собственной частоты колебаний стержня. Такой проектный подход практически не представлен в справочной литературе и требует от расчетчика использовать метод последовательных приближений, который занимает много времени и трудозатрат. В работе [18] представлен проектный подход применительно к наиболее распространенным, изгибным колебаниям, однако существует потребность расчета и для других видов колебаний.

Целью данной работы является расчет значений коэффициентов опор стержней при свободных крутильных и продольных колебаниях для широкого диапазона жесткостей опор, а также их аппроксимация аналитическими функциями, которые бы позволяли решать обратную задачу по нахождению требуемой жесткости опор стержня.

## 1. Постановка задачи колебаний

В работе рассматриваются крутильные и продольные колебания однородного стержня осесимметричного поперечного сечения, который закреплен с двух сторон на упругих опорах. Жесткость опор различная и изменяется в пределах от нуля (свободный конец) до бесконечности (жесткая заделка).

### 1.1. Крутильные колебания

Рассмотрим задачу крутильных колебаний стержня длиной  $l$ , закрепленного по обеим сторонам в упругих опорах с крутильной жесткостью  $k_{\varphi i}$  (рис. 1). На рисунке не показаны дополнительные ограничения (опоры) на движение стержня, однако в процессе его колебаний предполагается возможность только вращательного движения вокруг своей продольной оси на угол закручивания  $\varphi(x,t)$ . Опасность крутильных колебаний возникает как при относительно малой угловой жесткости опор, так и при высокой податливости стержня на скручивание, например при его малом диаметре и значительной длине.

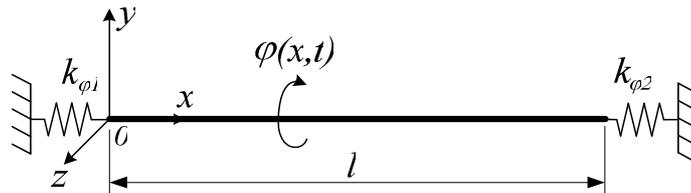


Рис. 1. Крутильные колебания стержня на упругих опорах

Уравнение свободных крутильных колебаний стержня имеет вид:

$$a_k^2 \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial t^2}, \quad (1)$$

где  $\varphi = \varphi(x, t)$  – функция формы стержня при крутильных колебаниях;  $a_k = \sqrt{G/m}$ ;  $G$  – модуль сдвига;  $m$  – удельная масса.

Граничные условия для случая упругих опор задаются как:

$$GJ_p \frac{d\varphi(0, t)}{dx} = k_{\varphi 1} \cdot \varphi(0, t); \quad GJ_p \frac{d\varphi(l, t)}{dx} = -k_{\varphi 2} \cdot \varphi(l, t). \quad (2)$$

где  $J_p$  – полярный момент инерции поперечного сечения стержня.

Общее решение уравнения (1) получим методом разделения переменных в виде ряда Фурье по модам колебаний:

$$\varphi(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i(x) \cdot T_i(t), \quad (3)$$

где  $\Phi_i(x)$  – собственная форма крутильных колебаний стержня на  $i$ -й частоте;  $T_i(x)$  – функция, описывающая изменение крутильных колебаний во времени на  $i$ -й частоте.

Подставляя выражение (3) в уравнение крутильных колебаний (1), получим:

$$\frac{1}{a_k^2} \cdot \frac{\Phi_i''(x)}{\Phi_i(x)} = \frac{T_i''(t)}{T_i(t)} = -\lambda_i^2, \quad (4)$$

где  $\lambda_i$  – собственное (характеристическое) значение на  $i$ -й частоте.

Уравнение (4) распадается на два обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$T_i''(t) + \lambda_i^2 \cdot T_i(t) = 0. \quad (5)$$

$$\Phi_i''(x) + \frac{\lambda_i^2}{a_k^2} \Phi_i(x) = 0. \quad (6)$$

Уравнение (5) определяет зависимость крутильных колебаний стержня от времени, что здесь не рассматривается. Второе уравнение (6) позволяет определить величину собственных частот крутильных колебаний, его решение имеет вид:

$$\Phi_i(x) = A \cdot \cos(\lambda_i \cdot x) + B \cdot \sin(\lambda_i \cdot x), \quad (7)$$

где  $A, B$  – коэффициенты.

Для определения постоянных  $A$  и  $B$  подставим решение (7) в граничные условия задачи (2) и получим систему линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} A \cdot k_{\varphi 1} - B \cdot GJ_p \cdot \lambda_i = 0; \\ A \left[ \frac{k_{\varphi 2}}{GJ_p} \cdot \cos(\lambda_i \cdot l) - \lambda_i \sin(\lambda_i \cdot l) \right] + B \left[ \frac{k_{\varphi 2}}{GJ_p} \cdot \sin(\lambda_i \cdot l) + \lambda_i \cos(\lambda_i \cdot l) \right] = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Составив определитель из коэффициентов системы уравнений (8) и приравняв его нулю, получим уравнение относительно искомым собственным значениям  $\lambda_i(k_1, k_2)$ :

$$\frac{k_{\varphi 1} k_{\varphi 2}}{GJ_p} \cdot \sin(\lambda_i \cdot l) + \lambda_i \cdot k_{\varphi 1} \cos(\lambda_i \cdot l) + \lambda_i \cdot k_{\varphi 2} \cdot \cos(\lambda_i \cdot l) - \lambda_i^2 GJ_p \cdot \sin(\lambda_i \cdot l) = 0. \quad (9)$$

Выразим крутильные жесткости опор  $k_{\varphi i}$  [Н·м] в относительном безразмерном виде:

$$C_{\varphi 1} = k_{\varphi 1} \frac{l}{GJ_p}; \quad C_{\varphi 2} = k_{\varphi 2} \frac{l}{GJ_p}, \quad (10)$$

тогда после преобразования выражение (9) примет вид:

$$\lambda_i \cdot l \cdot (C_{\varphi 1} + C_{\varphi 2}) + (C_{\varphi 1} C_{\varphi 2} - \lambda_i^2 \cdot l^2) \cdot \operatorname{tg}(\lambda_i \cdot l) = 0; \quad (11)$$

Решение трансцендентного уравнения (11) дает бесконечное количество решений для  $\lambda_i(C_{\varphi 1}, C_{\varphi 2})$ , каждому значению которого соответствует своя собственная частота крутильных колебаний стержня:

$$f_i(C_{\varphi 1}, C_{\varphi 2}) = \frac{\lambda_i(C_{\varphi 1}, C_{\varphi 2})}{2\pi l} \cdot \sqrt{\frac{G}{m}}. \quad (12)$$

В данной работе рассматриваются первая частота крутильных колебаний ( $i=1$ ), которая, как правило, имеет наибольший практический интерес. Аналитическое решение для выражения (11) даже для этого случая является весьма сложной задачей, поэтому решение было получено численным итеративным методом в специально созданной программе на ЭВМ.

## 1.2. Продольные колебания

На рисунке 2 показана расчетная схема для задачи продольных колебаний стержня, закрепленного по обеим сторонам в упругих опорах с линейной жесткостью  $k_i$  (рис. 2). Здесь также предполагается, что условия закрепления позволяют каждому элементу стержня совершать только поступательные движения вдоль своей продольной оси на величину  $u(x, t)$ . Опасность продольных колебаний возникает при относительно малой жесткости опор в направлении оси стержня, особенно при его значительной протяженности и отсутствию промежуточных закреплений.

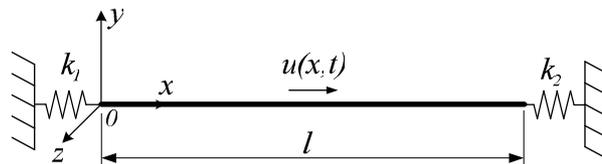


Рис. 2. Продольные колебания стержня на упругих опорах

Уравнение свободных продольных колебаний стержня имеет вид:

$$a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}, \quad (13)$$

где  $u=u(x, t)$  – функция формы стержня при продольных колебаниях;  $a = \sqrt{E/m}$ ;  $E$  – модуль упругости.

Граничные условия имеют вид:

$$ES \frac{du(0,t)}{dx} = k_1 \cdot u(0,t); \quad ES \frac{du(l,t)}{dx} = -k_2 \cdot u(l,t), \quad (14)$$

где  $S$  – площадь поперечного сечения стержня.

Можно заметить, что математическая постановка задачи продольных колебаний аналогична задаче крутильных колебаний (1,2), отличаясь только физическим смыслом и коэффициентами: а вместо  $ak$ ,  $ES$  вместо  $GJ_p$  и  $k$  взамен  $k_\phi$ . Следовательно, процесс решение задачи продольных колебаний будет точно таким же, как и ранее для крутильных колебаний. Результатом решения будет частотное уравнение относительно собственных значений  $\lambda_i(k_1, k_2)$  в виде:

$$\frac{k_1 k_2}{ES} \cdot \sin(\lambda_i \cdot l) + \lambda_i \cdot k_1 \cos(\lambda_i \cdot l) + \lambda_i \cdot k_2 \cdot \cos(\lambda_i \cdot l) - \lambda_i^2 ES \cdot \sin(\lambda_i \cdot l) = 0. \quad (15)$$

Как и ранее, выразим линейные жесткости опор [Н/м] в относительном безразмерном виде:

$$C_1 = k_1 \frac{l}{ES}; \quad C_2 = k_2 \frac{l}{ES}, \quad (16)$$

тогда выражение (15) примет вид:

$$\lambda_i \cdot l \cdot (C_1 + C_2) + (C_1 C_2 - \lambda_i^2 \cdot l^2) \cdot \operatorname{tg}(\lambda_i \cdot l) = 0. \quad (17)$$

Решение трансцендентного уравнения (17) дает бесконечное количество решений для  $\lambda_i(C_1, C_2)$ , каждому значению которого соответствует своя собственная частота колебаний стержня:

$$f_i(C_1, C_2) = \frac{\lambda_i(C_1, C_2)}{2\pi l} \cdot \sqrt{\frac{E}{m}}. \quad (18)$$

Решение трансцендентного уравнения (17) также было выполнено в специально созданной программе для первой частоты собственных колебаний при  $i=1$ .

## 2. Результаты расчета коэффициентов опор

В работе было выполнено решение частотного уравнения для крутильных (11) и продольных (17) колебаний для первой собственной частоты колебаний при более чем 500 вариантах сочетаний относительных жесткостей опор стержня в диапазоне  $C_{1,2} = 0 \dots 1000$ . Максимальное значение было ограничено значением  $C_i = 1000$ , поскольку дальнейшее увеличение жесткости уже практически не влияло на получаемую величину первого собственного значения  $\lambda_1$ . Также был выполнен расчет и для «бесконечной» жесткости опор, для которой принималось значение  $C_i = 108$ .

### 2.1. Аппроксимация коэффициентов опор

Как было отмечено ранее, существует аналогия задач крутильных и продольных колебаний стержней постоянного сечения, поскольку они полностью идентичны с точки зрения математической постановки (1), (2) и (13), (14) и решения (11) и (17). Следствием этого является равенство численных значений коэффициентов опор  $\lambda_1(C_1, C_2)$  для обоих случаев колебаний при использовании безразмерных величин жесткостей опор  $C_i$  (10), (16). В таблице 1 приведены значения коэффициентов опор при различных сочетаниях безразмерной жесткости опор, полученные значения справедливы как для крутильных, так и для продольных колебаний.

Зависимость значений коэффициентов опор от их жесткости наглядно можно представить в виде двумерной функции  $\lambda_1(C_1, C_2)$ , показанной на рисунке 2,а. На рисунке 2,б показана зависимость коэффициента опор  $\lambda_1(C_1, C_2)$  для случая опор одинаковой жесткости:  $C = C_1 = C_2$ .

Полученные результаты показывают сильно нелинейный характер поведения функций  $\lambda_i(C_1, C_2)$ , который не позволяет ее аппроксимировать простыми аналитическими функциями,

а использование полиномов высокой степени существенно затруднит аналитическое решение. С целью получения простых аналитических зависимостей для решения прямой и обратной задачи в качестве аппроксимирующих функций были выбраны квадратичные параболы вида:

$$\lambda_1(C_1, C_2) = a_{0i} + a_{1i} \cdot (C_1 + C_2) + a_{2i} \cdot (C_1^2 + C_2^2), \quad (19)$$

где  $i$  – номер зоны,  $i = I, II, III$ .

Табл. 1. Значения коэффициентов опор  $\lambda_1(C_1, C_2)$  для крутильных и продольных колебаний

$C_2$	$C_1$														
	0	0,1	0,5	1	5	10	20	30	40	50	100	200	500	1000	$\infty$
0	0	0,311	0,653	0,860	1,314	1,429	1,496	1,520	1,532	1,540	1,555	1,563	1,568	1,569	$\pi/2$
0,1	0,311	0,444	0,734	0,929	1,375	1,490	1,557	1,581	1,594	1,601	1,616	1,624	1,629	1,630	1,632
0,5	0,653	0,734	0,960	1,136	1,574	1,691	1,760	1,785	1,797	1,805	1,821	1,829	1,833	1,835	1,837
1	0,860	0,929	1,136	1,307	1,752	1,875	1,948	1,974	1,987	1,995	2,012	2,020	2,025	2,027	2,029
5	1,314	1,375	1,574	1,752	2,284	2,447	2,544	2,580	2,598	2,609	2,631	2,642	2,649	2,651	2,654
10	1,429	1,490	1,691	1,875	2,447	2,628	2,738	2,778	2,799	2,811	2,837	2,850	2,858	2,860	2,863
20	1,496	1,557	1,760	1,948	2,544	2,738	2,858	2,901	2,924	2,937	2,965	2,979	2,987	2,990	2,993
30	1,520	1,581	1,785	1,974	2,580	2,778	2,901	2,946	2,969	2,983	3,011	3,026	3,035	3,038	3,041
40	1,532	1,594	1,797	1,987	2,598	2,799	2,924	2,969	2,992	3,007	3,036	3,050	3,059	3,062	3,065
50	1,540	1,601	1,805	1,995	2,609	2,811	2,937	2,983	3,007	3,021	3,050	3,065	3,074	3,077	3,080
100	1,555	1,616	1,821	2,012	2,631	2,837	2,965	3,011	3,036	3,050	3,080	3,095	3,104	3,107	3,110
200	1,563	1,624	1,829	2,020	2,642	2,850	2,979	3,026	3,050	3,065	3,095	3,110	3,120	3,123	3,126
500	1,568	1,629	1,833	2,025	2,649	2,858	2,987	3,035	3,059	3,074	3,104	3,120	3,129	3,132	3,135
1000	1,569	1,630	1,835	2,027	2,651	2,860	2,990	3,038	3,062	3,077	3,107	3,123	3,132	3,135	3,138
$\infty$	$\pi/2$	1,632	1,837	2,029	2,654	2,863	2,993	3,041	3,065	3,080	3,110	3,126	3,135	3,138	$\pi$

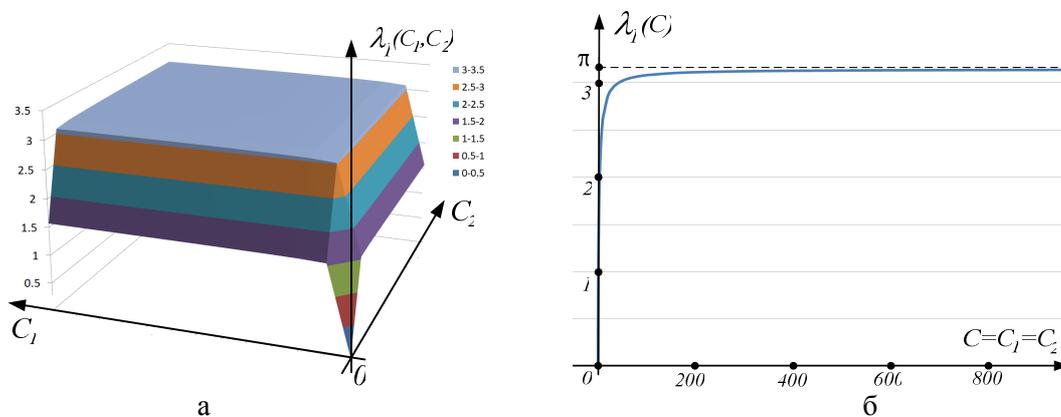


Рис. 3. Графическое представление коэффициентов опор при крутильных и продольных колебаниях: а – график функции  $\lambda_1(C_1, C_2)$ ; б – график функции  $\lambda_1(C)$

Достижение приемлемой точности аппроксимации было получено разбиением рассматриваемого диапазона жесткостей на три зоны:  $C_I = 1 \dots 10$ ,  $C_{II} = 10 \dots 100$ ,  $C_{III} = 100 \dots 1000$ . Коэффициенты аппроксимирующих квадратичных функций (19) для каждой зоны получены методом наименьших квадратов [19] и приведены в таблице 2.

Табл. 2. Коэффициенты функций  $\lambda_{1i}(C_1, C_2)$

Коэффициент	Зона		
	I	II	III
	$C=1 \dots 10$	$C=10 \dots 100$	$C=100 \dots 1000$
$a_{0i}$	0,934	2,453	3,06
$a_{1i}$	0,1976	0,00923	1,1E-04
$a_{2i}$	-0,0113	-6,1E-05	-7,2E-08

Аппроксимация первой зоны начинается не с нуля из-за сильно нелинейной зависимости в области  $C=0\dots 1$ , которая приводит к чрезмерно большим погрешностям по всей первой зоне. При вычислении коэффициентов аппроксимирующих функций (табл. 2) накладывалось условие равенства значений функции при переходе через границы зон. Полученные аналитические аппроксимирующие функции позволяют определять коэффициенты опор и, следовательно, первую частоту крутильных и продольных колебаний для любых сочетаний жесткостей опор в пределах  $C=1\dots 1000$  с погрешностью не более 5%.

## 2.2. Обратная задача

Использование в качестве аппроксимации квадратичных функций позволяет решить обратную задачу по определению требуемой жесткости опор, обеспечивающей значение первой собственной частоты колебаний. Для этого из выражений для определения частот (12), (18) определим требуемое значение коэффициента опор, в зависимости от вида колебаний получим:

$$\lambda_1(C_{\varphi 1}, C_{\varphi 2}) = 2\pi l \cdot f_1 \sqrt{\frac{m}{G}}, \quad (20)$$

$$\lambda_1(C_1, C_2) = 2\pi l \cdot f_1 \sqrt{\frac{\rho}{G}}. \quad (21)$$

Требуемому значению коэффициента опор  $\lambda_1$  может соответствовать множество вариантов различного сочетания жесткостей опор, что делает решение неопределенным. Для однозначности решения, свяжем жесткости опор через коэффициент  $n$  как:

$$C = C_1 = \frac{C_2}{n}. \quad (22)$$

Подставив условие (22) в уравнение (19), получим уравнение относительно жесткости  $C$ :

$$a_{2i} \cdot (1+n^2)C^2 + a_{1i} \cdot (1+n)C + (a_{0i} - \lambda_1) = 0. \quad (23)$$

Решение уравнения (23) для  $i$ -й зоны будет иметь вид:

$$C = \frac{-a_{1i} \cdot (1+n) + \sqrt{a_{1i}^2 \cdot (1+n)^2 - 4a_{2i} \cdot (1+n^2) \cdot (a_{0i} - \lambda_1)}}{2 \cdot a_{2i} \cdot (1+n^2)}. \quad (24)$$

Значения относительной жесткости опор определяются как:

$$C_1 = C; \quad C_2 = C \cdot n. \quad (25)$$

Абсолютная жесткость опор может быть найдена через обратные зависимости к уравнениям (10) или (16) в зависимости от решаемой задачи, соответственно получим:

$$k_{\varphi 1} = C_{\varphi 1} \frac{GJ_p}{l}; \quad k_{\varphi 2} = C_{\varphi 2} \frac{GJ_p}{l} \quad (26)$$

или

$$k_1 = C_1 \frac{ES}{l}; \quad k_2 = C_2 \frac{ES}{l}. \quad (27)$$

Найденные жесткости опор будут обеспечивать заданное значение коэффициента опор  $\lambda_1(C_1, C_2)$  и, следовательно, требуемое значение частоты крутильных или продольных колебаний стержня.

## 3. Обсуждение

В работе выполнен расчет значений коэффициентов опор стержня для первой моды крутильных и продольных колебаний для большого числа вариантов жесткостей опор. Принятая расчетная схема стержня на упругих опорах с широкой вариативной жесткостью позволяет объединить множество более простых случаев закреплений (свободный конец, жесткая заделка и др.), которые обычно приводятся в справочной литературе [14-17] и в

нашем случае становятся частными случаями. Например, при  $k_{\phi_i}=0$  или  $k_i=0$  получаем случай свободного конца стержня, а при  $k_{\phi_i}\rightarrow\infty$  или  $k_i\rightarrow\infty$  конец стержня будет жестко закреплен по направлению рассматриваемых колебаний.

Сравнение полученных значений коэффициентов опор (табл. 2) с данными из существующей литературы [14, 15] показало полное совпадение приводимых там значащих цифр. Некоторые источники, например [16, 17], содержат и величины коэффициентов опор только в графическом виде, что позволило оценить корректность полученного нами решения только в целом, без точной численной оценки.

Выполненная аппроксимация значений коэффициентов опор квадратичными функциями вносит определенную погрешность в их значения. Анализ погрешности аппроксимации при различных сочетаниях жесткостей  $C_1$  и  $C_2$  показал, что если они одного порядка, то отклонения в пределах зоны не превышают 5% для первой зоны, 3% во второй и 0,4% в третьей зоне.

В данной работе рассмотрен случай стержня осесимметричного поперечного сечения, что является критичным только для крутильных колебаний, при продольных колебаниях форма поперечного сечения может быть любой. В случае необходимости расчета первой собственной частоты крутильных колебаний для стержня с неосесимметричной формой поперечного сечения необходимо внести поправку в подкоренное выражение уравнения (12), как это показано, например, в работе [15] на стр. 180-181.

Предложенный подход применим для аппроксимации собственных значений для различных задач, не только механики, но и других дисциплин. Использование простых аналитических аппроксимирующих функций позволяет эффективно ставить и аналитически решать обратные задачи, для которых решение обычно требует итерационных численных методов. Увеличение степени аппроксимирующих функций или ее замена на другой вид позволяет существенно снизить погрешность аппроксимации, однако это может значительно усложнить аналитические вычисления.

### **Заключение**

В работе выполнен расчет и аппроксимация значений коэффициентов опор при крутильных и продольных свободных колебаниях стержня для различных вариантов сочетаний жесткостей опор и нахождения его первой собственной частоты. Аппроксимация значений коэффициентов опор квадратичными функциями позволяет аналитически решать прямую и обратную задачи, то есть не только определять первую собственную частоту стержня на упругих опорах, но и находить требуемую жесткость опор для заданного значения первой частоты колебаний.

### **Благодарности**

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, Правительства Красноярского края и Красноярского краевого фонда науки в рамках научного проекта № 2022110209008.

The research was funded by RFBR, Krasnoyarsk Territory and Krasnoyarsk Regional Fund of Science, project number 2022110209008.

### **Список литературы**

1. Бабаков И.М. Теория колебаний. – М.: Дрофа, 2004. – 591 с.
2. Ильин М.М., Колесников К.С., Саратов Ю.С. Теория колебаний. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. – 272 с.
3. Журавлев В.Ф., Климов Д.М. Прикладные методы в теории колебаний. – М.: Наука, 1988. – 328 с.
4. Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. – М.: Машиностроение, 1985. – 472 с.
5. Пановко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний. – М.: Наука, 1991. – 256 с.
6. Яблонский А.А., Норейко С.С. Курс теории колебаний. – СПб.: Лань, 2003. – 254 с.
7. Benaroya H., Nagurka M., Han S. Mechanical vibration. – London: CRC Press, 2017. – 602 p.
8. Geradin M., Rixen D.J. Mechanical vibrations. – London: John Wiley & Sons, 2015. – 617 p.
9. Inman D.J. Engineering vibration. – NJ: Pearson Education, 2014. – 720 p.
10. Jazar R.N. Advanced vibrations. A modern approach. – NY: Springer, 2013. – 695 p.

11. Rao S. Mechanical vibrations. – London: Pearson Education Limited, 2018. –1295 p.
12. Shabana A.S. Theory of vibration. – New York: Springer-Verlag, 2019. – 382 p.
13. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний. – М.: Высшая школа, 1980. – 408 с.
14. Биргер И.А., Пановко Я.Г. Прочность, устойчивость, колебания. Т. 3. – М.: Машиностроение, 1988. – 567 с.
15. Blevins R.D. Formulas for dynamics, acoustics and vibration. – Chichester: John Wiley & Sons, Ltd, 2016. – 458 p.
16. Коренев Б.Г. Справочник по динамике сооружений. – М.: Стройиздат, 1972. – 511 с.
17. Уманский А.А. Справочник проектировщика. Т. 2. – М.: Стройиздат, 1973. – 415 с.
18. Кудрявцев И.В., Рабецкая О.И., Митяев А.Е. Аппроксимация значений коэффициентов опор балки при колебаниях и потери устойчивости // Сибирский аэрокосмический журнал. – 2022. – Т. 23, №3. – С. 461-474. – doi.org/10.31772/2712-8970-2022-23-3-461-474.
19. Дрейпер Н. Смит Г. Прикладной регрессионный анализ. – М.: Вильямс, 2016. – 912 с.

### References

1. Babakov I.M. Theory of vibrations. – М.: Drofa, 2004. – 591 p.
2. Il'in M.M., Kolesnikov K.S., Saratov Yu.S. Theory of vibrations. – М.: MSTU n.a. N.E. Bauman, 2001. – 272 p.
3. Zhuravlev V.F., Klimov D.M. Applied methods in vibration theory. – М.: Science, 1988. – 328 p.
4. Timoshenko S.P., Yang D.Kh., Uiver U. Vibrations in Engineering. – М.: Mechanical Engineering, 1985, – 472 p.
5. Panovko Ya.G. Introduction to the theory of mechanical Vibrations. – М.: Science, 1991, – 256 p.
6. Yablonskiy A.A., Noreyko S.S. Vibration theory course. – SPb.: Lan', 2003. – 254 p.
7. Benaroya H., Nagurka M., Han S. Mechanical vibration. – London: CRC Press, 2017. – 602 p.
8. Geradin M., Rixen D.J. Mechanical vibrations. – London: John Wiley & Sons, 2015. – 617 p.
9. Inman D.J. Engineering vibration. – NJ: Pearson Education, 2014. – 720 p.
10. Jazar R.N. Advanced vibrations. A modern approach. – NY: Springer, 2013. – 695 p.
11. Rao S. Mechanical vibrations. – London: Pearson Education Limited, 2018. –1295 p.
12. Shabana A.S. Theory of vibration. – New York: Springer-Verlag, 2019. – 382 p.
13. Biderman V.L. Theory of mechanical vibrations. – М.: High School, 1980. – 408 p.
14. Birger I.A., Panovko Ya.G. Strength, stability, vibrations. Vol. 3. – М.: Mechanical Engineering, 1988. – 567 p.
15. Blevins R.D. Formulas for dynamics, acoustics and vibration. – John Wiley & Sons, Ltd: Chichester, 2016. – 458 p.
16. Korenev B.G. Structure dynamics guide. – М.: Stroyizdat 1972. – 511 p.
17. Umanskiy A.A. Designer's Handbook. Vol. 2. – М.: Stroyizdat, 1973. – 415 p.
18. Kudryavtsev I.V., Rabetskaya O.I., Mityaev A.E. Approximation of beam support coefficient values at vibrations and buckling. // Siberian Aerospace Journal. 2022, vol. 23, no. 3, pp. 461-474. doi.org/10.31772/2712-8970-2022-23-3-461-474.
19. Dreyper N. Smit G. Applied regression analysis. – М.: Vil'yams, 2016. – 912 p.

### Сведения об авторах:

### Information about authors:

<b>Кудрявцев Илья Владимирович</b> – кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной механики	<b>Kudryavtsev Ilya Vladimirovich</b> – candidate of technical sciences, assistant professor of Department of applied mechanics
<b>Малыхина Любовь Константиновна</b> – магистрант	<b>Malykhina Lyubov Konstantinovna</b> – student
<b>Рабецкая Ольга Ивановна</b> – кандидат технических наук, доцент кафедры технической механики	<b>Rabetskaya Olga Ivanovna</b> – candidate of technical sciences, assistant professor of Department of technical mechanics
<b>Кудрявцева Юлия Максимовна</b> – старший преподаватель кафедры систем искусственного интеллекта	<b>Kudryavtseva Julia Maksimovna</b> – senior lecturer of Department of artificial intelligence systems
<b>Швец Дмитрий Александрович</b> – кандидат технических наук, доцент кафедры вычислительной техники	<b>Shvets Dmitry Alexandrovich</b> – candidate of technical sciences, assistant professor of Department of Computer Engineering
olga_rabez@mail.ru	

Получена 31.01.2023