Сазонов С.Е., Ревенко Д.В. Оптимальное распределение ограниченных ресурсов для получения максимальной производительности параллельно работающих объектов автоматизированного производства // Транспортное, горное и строительное машиностроение: наука и производство. – 2023. – № 19. – С. 116-121.

УДК 519.6 https://doi.org/10.26160/2658-3305-2023-19-116-121

ОПТИМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ОГРАНИЧЕННЫХ РЕСУРСОВ ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ МАКСИМАЛЬНОЙ ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ ПАРАЛЛЕЛЬНО РАБОТАЮЩИХ ОБЪЕКТОВ АВТОМАТИЗИРОВАННОГО ПРОИЗВОДСТВА

Сазонов С.Е., Ревенко Д.В.
Севастопольский государственный университет, Севастополь

Ключевые слова: автоматическая линия, параллельные ячейки, производительность, ограничение, оптимизация, динамическое программирование.
Аннотация. При модернизации производства стоит проблема: как распределить ограниченные вкладываемые средства, чтобы суммарный объем получаемой продукции оказался максимальным. В статье приведена методика расчета производительности параллельных ячеек автоматических линий от средств, вкладываемых на их модернизацию. Для решения поставленной задачи использован метод динамического программирования в «*n*» этапов. При этом, для аппроксимации функции производительности ячеек от средств, вкладываемых на модернизацию, использована экспоненциальная функция, поскольку она является монотонной и соответствует реальному процессу. На основании проведенного исследования получены аналитические зависимости, позволяющие определить максимальную производительность для *n-го* количества параллельно работающих ячеек автоматической линии, при ограниченном вложении средств. Полученные результаты могут быть использованы при определении оптимальных вложений ограниченных ресурсов не только при модернизации автоматических линий, но и в других областях производства.

OPTIMAL ALLOCATION OF LIMITED RESOURCES TO MAXIMIZE THE PRODUCTIVITY OF PARALLEL AUTOMATED PRODUCTION FACILITIES

Sazonov S.E., Revenko D.V.
Sevastopol State University, Sevastopol

Keywords: automatic line, parallel cells, productivity, limitation, optimization, dynamic programming.
Abstract. There is a problem with the modernization of production: how to distribute the limited funds invested so that the total volume of products received is the maximum. The article presents a method for calculating the productivity of parallel cells of automatic lines from the funds invested in their modernization. To solve this problem, the method of dynamic programming in "n" stages is used. At the same time, an exponential function is used to approximate the cell productivity function from the funds invested in modernization, since it is monotonic and corresponds to the real process. Based on the conducted research, analytical dependencies were obtained that allow determining the maximum productivity for the n number of parallel cells of an automatic line, with a limited investment of funds. The results obtained can be used to determine the optimal investments of limited resources not only in the modernization of automatic lines, but also in other areas of production.

Введение

В настоящее время к производству предъявляются высокие требования к производительности и экономичности. Применение автоматических линий (АЛ) позволяет существенно повысить производительность, безопасность труда, уменьшить количество поломок и брака за счет человеческого фактора. Количество изделий, проходящих через определенные участки технологического процесса, зависит от производительности отдельного участка [1, 2]. В результате одни участки оказываются более загруженными и ограничивают всю линию по производительности, другие – недогружены. Во многих случаях для выравнивания производительности по операциям технологического процесса, реализуемого на автоматизированных линиях, используются параллельная установка оборудования, выпускающего одинаковую продукцию. Причем устанавливаемые параллельно единицы оборудования хоть и выпускают одинаковую продукцию, могут быть различны между собой: различная конструкция, различный возраст при одинаковой конструкции и т.д. [3-6] Последнее обстоятельство обуславливает различную производительность и надежность параллельно устанавливаемых объектов, а также их реакции на вкладываемые средства при модернизации. В данной статье будет рассмотрен последний из вышеперечисленных аспектов.

Материалы и методы исследований

Рассмотрим фрагмент структуры АЛ с параллельными ячейками (рис. 1).

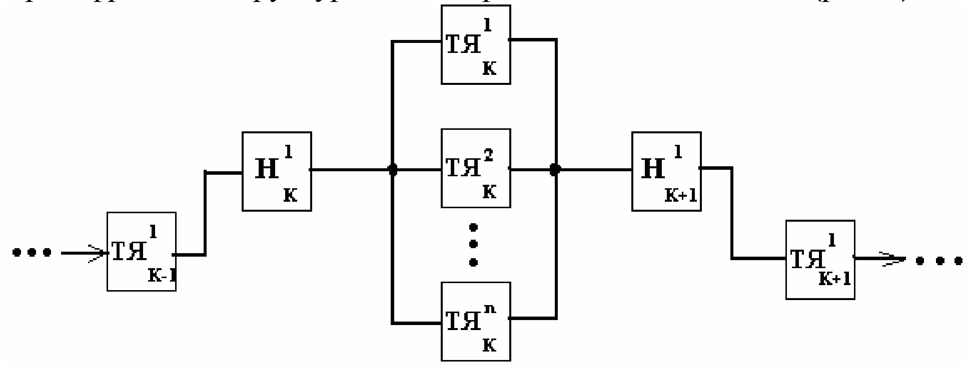

Рис. 1. Фрагмент структуры АЛ

Допустим, необходимо повысить производительность *k*-ой операции, осуществляемой параллельно работающими технологическими ячейками $ТЯ^1_k,...,ТЯ^n_k$, отделенными от ячеек $ТЯ^1_{k-1}$ и $ТЯ^n_{k+1}$ накопителями $Н_k$ и H_{k+1}. Предполагается, что производительность можно повысить за счет модернизации ячеек $ТЯ^1_k,...,ТЯ^n_k$, причем общая сумма средств, вкладываемых на их модернизацию ограниченна. Характер реакции каждой ячейки на вкладываемые при модернизации средства различен и известен.

Требуется так распределить ограниченные вкладываемые средства, чтобы суммарный объем получаемой продукции оказался максимальным.

Пусть $x_1,...,x_n$ – размеры вкладываемых средств для модернизации ячеек $ТЯ^1_k,...,ТЯ^n_k$, ограниченных общим бюджетом.

Известно, что при вложении средств с увеличением затрат скорость увеличения отдачи уменьшается, а начиная с некоторой величины, производительность вообще перестает возрастать (рис. 2).

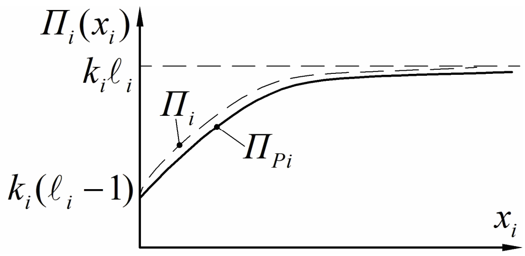

Рис. 2. Зависимость производительности от вкладываемых средств

В реальности это соответствует тому, что каждый объект способен «освоить» лишь ограниченное количество средств. Исходя из этого, для аппроксимации реальной зависимости производительности $П_i(x_i)$ ячеек $ТЯ^i_k, i=\overline{1,n}$ от вкладываемых средств можно использовать экспоненциальную функцию следующего вида:

$$П_i(x)=k_i(\ell_i-e^{-\lambda_i x_i v}), i=\overline{1,n}.$$

Отметим, что экспоненциальная функция выбрана в качестве аппроксимирующей, т.к. является монотонной, что соответствует реальному объекту [7].

Тогда для «*n*» объектов вложения средств получаем формулу функции выигрыша:

$$\psi'_n = \max\left\{\sum_{i=1}^{n} n_i(x_i) = \sum_{i=1}^{n} k_i(\ell_i - e^{-\lambda_i x_i})\right\},$$

где $\lambda_1,..,\lambda_n,k_1,...,k_n,\ell_1,...\ell_n$ – постоянные коэффициенты, определяемые при аппроксимации, а $x_1,..., x_n$ – средства, вкладываемые в каждый объект.

Учитывая, что в выражении

$$\sum_{i=1}^{n} k_i(\ell_i - e^{-\lambda_i x_i}) = \sum_{i=1}^{n} k_i\ell_i - \sum_{i=1}^{n} k_i e^{-\lambda_i x_i},$$

величина $\sum_{i=1}^{n} k_i \ell_i = const$, то окончательно целевая функция ψ_n имеет вид:

$$\psi_n = \max\left\{-\sum_{i=1}^{n} k_i e^{-\lambda_i x_i}\right\}. \quad (1)$$

В процессе оптимизации нужно найти максимум этой функции, т.е. необходимо найти совокупность оптимальных $x_1,...,x_n$, которая обращает в максимум функцию ψ_n. Ограничение имеет вид:

$$S = \sum_{i=1}^{n} x_i ,$$

где S – сумма выделенных средств.

Введем параметр состояния: $b_i, i = \overline{1,n}$. Заметим, что эти величины связаны соотношениями:

$$b_n = \sum_{i=1}^{n} x_i = S,\ b_{n-1} = b_n - x_n = S - x_n ,...,$$

$$b_i = b_{i+1} - x_{i+1} = S - \sum_{j=i+1}^{n} x_j ,..., b_1 = b_2 - x_2 = S - \sum_{j=2}^{n} x_j .$$

Задача решается методом динамического программирования в «n» этапов [8-10].

Этап первый. Функция выигрыша равна:

$$\psi_1 = -\lambda_1 e^{-k_1 x_1}. \quad (2)$$

Т.к. функция монотонна, то максимум достигается при $\hat{x}_1 = b_1$:

$$\psi_{1\max} = -\lambda_1 e^{-k_1 b_1}.$$

Введем обозначения: $L_1 = -\lambda_1$ и $c_1 = k_1$. Тогда

$$\Psi_{1\max} = -L_1 e^{-c_1 b_1}. \quad (3)$$

Этап второй. Функция выигрыша равна:

$$\psi_2 = -\lambda_2 e^{-k_2 x_2} + \psi_1 . \quad (4)$$

Подставив $b_1 = b_2 - x_2$, найдем производную по x_2 от выражения (4), которое преобразуется к виду:

$$\psi_2 = -\lambda_2 e^{-k_2 x_2} - L_1 e^{-c_1(b_2 - x_2)},$$

$$\frac{d\psi_2}{dx_2} = -k_2\lambda_2 e^{-k_2 x_2} - c_1 L_1 e^{-c_1 b_2} e^{-c_1 x_2} = 0,$$

$$Ln\left[\frac{e^{-k_2 x_2}}{e^{c_1 x_2}}\right] = Ln\left[\frac{c_1\lambda_1}{k_2\lambda_2} e^{-c_1 b_2}\right].$$

Откуда $$\hat{x}_2 = \frac{c_1 b_2 - Ln\left[\frac{c_1\lambda_1}{k_2\lambda_2}\right]}{k_2 + c_1}. \quad (5)$$

Условный выигрыш на данном этапе равен:

$$\psi_2 = -e^{-\frac{c_1 k_2}{c_1+k_2} b_2}\left[\lambda_2\left(\frac{c_1}{k_2\lambda_2} L_1\right)^{\frac{k_2}{c_1+k_2}} + L_1\left(\frac{c_1}{k_2\lambda_2} L_1\right)^{-\frac{c_1}{c_1+k_2}}\right],$$

причем, если обозначить $c_2 = \dfrac{c_1 k_2}{c_1 + k_2}$ и $L_2 = \left[\lambda_2\left(\dfrac{c_1}{k_2\lambda_2} L_1\right)^{\frac{k_2}{c_1+k_2}} + L_1\left(\dfrac{c_1}{k_2\lambda_2} L_1\right)^{-\frac{c_1}{c_1+k_2}}\right]$,

получим $$\psi_2 = -L_2 e^{-c_2 b_2}. \quad (6)$$

Этап третий. Функция выигрыша равна:

$$\psi_3 = -\lambda_3 e^{-k_3 x_3} + \psi_2 . \tag{7}$$

Подставив $b_2 = b_3 - x_3$ в (6), найдем производную по x_3 от выражения (7), которое преобразуется к виду:

$$\psi_3 = -\lambda_3 e^{-k_3 x_3} - L_2 e^{-c_2(b_3 - x_3)},$$

$$\frac{d\psi_3}{dx_3} = -k_3\lambda_3 e^{-k_3 x_3} - c_2 L_2 e^{-c_2 b_3 + c_2 x_3} = 0 .$$

Откуда $$\hat{x}_3 = \frac{c_2 b_3 - Ln\left[\dfrac{c_2}{k_3\lambda_3} L_2\right]}{k_3 + c_2}. \tag{8}$$

Подставив значение $\hat{x}_3$ в (7) получим значения условного выигрыша на данном этапе:

$$\psi_3 = -e^{-\frac{c_2 k_3}{c_2+k_3} b_3}\left[\lambda_3\left(\frac{c_2}{k_3\lambda_3} L_2\right)^{\frac{k_3}{c_2+k_3}} + L_2\left(\frac{c_2}{k_3\lambda_3} L_2\right)^{-\frac{c_2}{c_2+k_3}}\right],$$

причем, если обозначить $c_3 = \dfrac{c_2 k_3}{c_2 + k_3}$ и $L_3 = \left[\lambda_3\left(\dfrac{c_2}{k_3\lambda_3} L_2\right)^{\frac{k_3}{c_2+k_3}} + L_2\left(\dfrac{c_2}{k_3\lambda_3} L_2\right)^{-\frac{c_2}{c_2+k_3}}\right]$,

получим $$\psi_3 = -L_3 e^{-c_3 b_3} . \tag{9}$$

Этап четвертый. Функция выигрыша по аналогии из формул (3), (6) и (9) равна:

$$\psi_4 = -\lambda_4 e^{-k_4 x_4} + \psi_3 = -L_4 e^{-c_4 b_4} . \tag{10}$$

Докажем, что формула (10) справедлива. Подставив $b_3 = b_4 - x_4$ в (9), найдем производную по x_4 от выражения (10), которое преобразуется к виду:

$$\psi_4 = -\lambda_4 e^{-k_4 x_4} - L_3 e^{-c_3(b_4 - x_4)},$$

$$\frac{d\psi_4}{dx_4} = -k_4\lambda_4 e^{-k_4 x_4} - c_3 L_3 e^{-c_3 b_4 + c_3 x_4} = 0 .$$

Откуда $$\hat{x}_4 = \frac{c_3 b_4 - Ln\left[\dfrac{c_3}{k_4\lambda_4} L_3\right]}{k_4 + c_3}. \tag{11}$$

Подставив значение $\hat{x}_4$ в (10) получим значения условного выигрыша на данном этапе:

$$\psi_4 = -\lambda_4 e^{-k_4\left(\frac{c_3 b_4 - Ln\frac{c_3}{k_4\lambda_4}L_3}{c_3+k_4}\right)} - L_3 e^{-c_3\left(b_4 - \frac{c_3 b_4 - Ln\frac{c_3}{k_4\lambda_4}L_3}{c_3+k_4}\right)} = e^{-\frac{c_3 k_4}{c_3+k_4} b_4}\left[\left(\lambda_4 \frac{c_3}{k_4\lambda_4} L_3\right)^{\frac{k_4}{c_3+k_4}} + L_3\left(\frac{c_3}{k_4\lambda_4} L_3\right)^{-\frac{c_3}{c_3+k_4}}\right],$$

причем, если обозначить

$$c_4 = \frac{c_3 k_4}{c_3 + k_4} \text{ и } L_4 = \left[\lambda_3\left(\frac{c_3}{k_4\lambda_4} L_3\right)^{\frac{k_4}{c_3+k_4}} + L_3\left(\frac{c_3}{k_4\lambda_4} L_3\right)^{-\frac{c_3}{c_3+k_4}}\right],$$

тогда $$\psi_4 = -L_4 e^{-c_4 b_4} . \tag{12}$$

Так как выражение (10) и (12) совпадают, то приведенное утверждение правильно.

Результаты исследований

Используя метод математической индукции, запишем зависимости для произвольного числа «*n*» параллельно соединенных ячеек:

$$\begin{cases} \psi_n = -L_n e^{-c_n b_n}, \\ \psi_{n-1} = -L_{n-1} e^{-c_{n-1} b_{n-1}}, \\ \ldots \\ \psi_i = -L_i e^{-c_i b_i}, \\ \ldots \\ \psi_1 = -L_1 e^{-c_1 b_1}; \end{cases} \tag{13}$$

$$\begin{cases} \hat{x}_n = \dfrac{c_{n-1} b_n - Ln\left[\dfrac{c_{n-1}}{k_n \lambda_n} L_{n-1}\right]}{k_n + c_{n-1}}, \\ \hat{x}_{n-1} = \dfrac{c_{n-2} b_{n-1} - Ln\left[\dfrac{c_{n-2}}{k_{n-1} \lambda_{n-1}} L_{n-2}\right]}{k_{n-1} + c_{n-2}}, \\ \ldots \\ \hat{x}_i = \dfrac{c_{i-1} b_i - Ln\left[\dfrac{c_{i-1}}{k_i \lambda_i} L_{i-1}\right]}{k_i + c_{i-1}}, \\ \ldots \\ \hat{x}_1 = b_1; \end{cases} \tag{14}$$

где

$$\begin{cases} L_n = \left[\lambda_n \left(\dfrac{c_{n-1}}{k_n \lambda_n} L_{n-1}\right)^{\frac{k_n}{c_{n-1}+k_n}} + L_{n-1} \left(\dfrac{c_{n-1}}{k_n \lambda_n} L_{n-1}\right)^{-\frac{c_{n-1}}{c_{n-1}+k_n}}\right], \\ L_{n-1} = \left[\lambda_{n-1} \left(\dfrac{c_{n-2}}{k_{n-1} \lambda_{n-1}} L_{n-2}\right)^{\frac{k_{n-1}}{c_{n-2}+k_{n-1}}} + L_{n-2} \left(\dfrac{c_{n-2}}{k_{n-1} \lambda_{n-1}} L_{n-2}\right)^{-\frac{c_{n-2}}{c_{n-2}+k_{n-1}}}\right], \\ \ldots \\ L_i = \left[\lambda_i \left(\dfrac{c_{i-1}}{k_i \lambda_i} L_{i-1}\right)^{\frac{k_i}{c_{i-1}+k_i}} + L_{i-1} \left(\dfrac{c_{i-1}}{k_i \lambda_i} L_{i-1}\right)^{-\frac{c_{i-1}}{c_{i-1}+k_i}}\right], \\ \ldots \\ L_1 = \lambda_1; \end{cases} \tag{15}$$

$$\begin{cases} c_n = \dfrac{c_{n-1} k_n}{c_{n-1} + k_n}, \\ c_{n-1} = \dfrac{c_{n-2} k_{n-1}}{c_{n-2} + k_{n-1}}, \\ \ldots \\ c_i = \dfrac{c_{i-1} k_i}{c_{i-1} + k_i}, \\ \ldots \\ c_1 = k_1. \end{cases} \tag{16}$$

Выводы

Полученные аналитические выражения позволяют найти максимальную производительность каждой из «*n*» параллельно работающих ячеек АЛ с целью обеспечения их максимальной суммарной производительности при ограничении на общую сумму вкладываемых средств. Следует отметить, что полученные результаты могут быть использованы при определении оптимальных вложений ресурсов не только при проектировании и модернизации АЛ, но и в других областях техники.

Список литературы

1. Амиров Ф.Г. Механика машиностроения. Решения теоретических задач производительности автоматических линий. – Баку, 2003. – С. 26-27.
2. Петраков Ю.В., Драчев О.И. Автоматическое управление процессами резания. – Старый Оскол: ТНТ, 2011. – 407 с.
3. Базров Б.М. Модульная технология в машиностроении. – М.: Машиностроение, 2001. – 368 с.
4. Схиртладзе А.Г., Бочкарев С.В., Лыков А.Н. Автоматизация технологических процессов в машиностроении. – Пермь: Изд-во Перм. гос. техн. ун-та, 2010. – 505 с.
5. Пашков Е.В., Копп В.Я., Карлов А.Г. Транспортно-накопительные и загрузочные системы в сборочном производстве: Учеб. пособие. – Киев: УМК ВО, 1992. – 536 с.
6. Копп В.Я., Обжерин Ю.Е., Гаджибеков И.А. Учет блокировок при моделировании асинхронных автоматизированных линий // Оптимизация производственных процессов: Сб. науч. трудов. – Севастополь: Севастоп. отд. ассоц. “Alliance Francaise”, 1997. – Вып. 6. – С. 9-16.
7. Гольштейн Е.Г., Третьяков Н.В. Модифицированные функции Лагранжа. Теория и методы оптимизации. – М.: Наука, 1989. – 400 с.
8. Копп В.Я., Крючков И.В., Першин С.В. Распределение ресурсов при повышении эффективности автоматизированного складского комплекса // Оптимизация производственных процессов: Сб. науч. трудов. – Севастополь: Севастоп. отд. ассоц. “Alliance Francaise”, 1995. – Вып. 3. – С. 60-62.
9. Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию. – М.: Наука, 1983. – 384 с
10. Дегтярев Ю.И. Исследование операций: Учеб. для ВУЗов по спец. АСУ. – М.: Высш. шк., 1986. – 320 с.

References

1. Amirov F.G. Mechanics of mechanical engineering. Solutions of theoretical performance problems of automatic lines. – Baku, 2003. – P. 26-27.
2. Petrakov Yu.V., Drachev O.I. Automatic control of cutting processes. – Stary Oskol: TNT, 2011. – 407 p.
3. Bazrov B.M. Modular technology in mechanical engineering. – M.: Mechanical Engineering, 2001. – 368 p.
4. Skhirtladze A.G., Bochkarev S.V., Lykov A.N. Automation of technological processes in mechanical engineering. – Perm: Publ. house of the Perm State Technical University, 2010. – 505 p.
5. Pashkov E.V., Kopp V.Ya., Karlov A.G. Transport-storage and loading systems in assembly production: Textbook. – Kiev: UMK VO, 1992. – 536 p.
6. Kopp V.Ya., Obzherin Yu.E., Gadzhibekov I.A. Accounting for locks in the modeling of asynchronous automated lines // Optimization of production processes: Collection of scientific papers. – Sevastopol: Sevastop. ed. assoc. “Alliance Francaise”, 1997. – Iss. 6. – P. 9-16.
7. Holstein E.G., Tretyakov N.V. Modified Lagrange functions. Theory and methods of optimization. – M.: Science, 1989. – 400 p.
8. Kopp V.Ya., Kryuchkov I.V., Pershin S.V. Resource allocation in improving the efficiency of an automated warehouse complex // Optimization of production processes: Collection of scientific papers. – Sevastopol: Sevastop. ed. assoc. “Alliance Francaise,” 1995. – Iss. 3. – P. 60-62.
9. Polyak B.T. Introduction to optimization. – M.: Science, 1983. – 384 p.
10. Degtyarev Yu.I. Operations research: Studies for universities on special automated control systems. – M.: Higher School, 1986. – 320 p.

Сведения об авторах:	*Information about authors:*
Сазонов Сергей Евгеньевич – кандидат технических наук, доцент	**Sazonov Sergey Evgenievich** – candidate of technical sciences, associate professor
Ревенко Дмитрий Викторович – старший преподаватель	**Revenko Dmitry Viktorovich** – senior lecturer
SESazonov@sevsu.ru	

Получена 20.01.2023