

## **АНАЛИЗ ТОЧНОСТИ И СХОДИМОСТИ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ В ЗАДАЧАХ МОДЕЛИРОВАНИЯ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ КОНСТРУКЦИЙ С U-ОБРАЗНЫМИ КОНЦЕНТРАТОРАМИ НАПРЯЖЕНИЙ**

***Зеньков Е.В.***

*Иркутский национальный исследовательский технический университет;  
Иркутский государственный университет путей сообщения, Иркутск*

**Ключевые слова:** погрешность сходимости, напряженно-деформированное состояние, концентраторы напряжений, модельная задача, метод конечных элементов.

**Аннотация.** В статье представлена система вычислительных тестов, включающая анализ сходимости численного решения модельной задачи теории упругости и соответствующих вычислительных погрешностей, с целью определения оптимального варианта КЭ-разбивки по критерию точности и минимизации машинного времени области конструкции, имеющей концентраторы напряжений в виде U-образных вырезов, при моделировании её напряженно-деформированного состояния. Рассмотрению подвергались расчетные варианты с равномерной разбивкой КЭ-сетки и варианты разбивок, размеры интервалов в которых изменялись по закону геометрической прогрессии. Анализ полученных результатов показал, что относительная погрешность сходимости и относительная погрешность получаемых значений напряжений для рассмотренных вариантов разбивок КЭ-сетки закономерно связаны между собой и их отличие друг от друга не превысило 2%.

## **ANALYSIS OF THE ACCURACY AND CONVERGENCE OF THE NUMERICAL SOLUTION IN SIMULATION PROBLEMS STRESS-STRAIN STATE OF STRUCTURES WITH U-SHAPED STRESS CONCENTRATORS**

***Zenkov E. V.***

*Irkutsk National Research Technical University;  
Irkutsk State Transport University, Irkutsk*

**Keywords:** convergence error, stress-strain state, stress concentrators, model problem, finite element method.

**Abstract.** The article presents a system of computational tests, including the analysis of the convergence of the numerical solution of the model problem of the theory of elasticity and the corresponding computational errors, in order to determine the optimal variant of the FE breakdown according to the accuracy criterion and minimize the computer time of the structure area with stress concentrators in the form of U-shaped cutouts, with modeling its stress-strain state. Consideration was given to design options with a uniform FE grid layout and layout options, the size of the intervals in which changed according to the law of geometric progression. The analysis of the obtained results showed that the relative error of convergence and the relative error of the obtained stress values for the considered variants of FE grid layouts are naturally related to each other and their difference from each other did not exceed 2%.

### **Введение**

В машинах и агрегатах транспортных систем, энергетики, нефтехимии, применяется большое число деталей с концентраторами напряжений. К ним относятся штуцерные узлы емкостной аппаратуры и детали трубопроводов, несущие элементы транспортных средств, диски компрессоров и турбин, обшивка летательных аппаратов и другие. В области концентраторов напряжений, представленных, как правило, в форме отверстий, выступов, пазов и т.п., этих деталей имеет место объемное напряженно-деформированное состояние (НДС). Указанное НДС, точнее, его уровень и вид определяют ресурс работы конструкции при статическом и циклическом нагружении [1].

Всестороннее и широкое использование методов математического моделирования и технологий инженерного анализа, в частности, на основе применения метода конечных элементов (МКЭ) в решении задач механики деформированного тела при анализе прочности сложных деформируемых систем и их элементов, возникает необходимость формирования

представлений об уровне необходимой и достаточной степени их дискретизации [1-3]. При этом эффективность дискретизации должна обеспечивать не только соответствующую точность, достигаемую за счет подбора определенного количества и размера конечных элементов в КЭ-модели, но и минимизацию требований к используемым вычислительным ресурсам ЭВМ. Последнее, в частности, может достигаться за счет использования различных алгоритмов разбиения КЭ-сетки, например, с равномерной разбивкой и разбивкой КЭ-сетки по закону геометрической прогрессии.

### Материалы и методы исследования

Погрешность МКЭ для конструкций с концентраторами напряжений может оказаться недопустимо высокой, что требует, помимо оценки сходимости результатов КЭ-моделирования в процессе расчетного анализа, также и предварительной оценки погрешности моделирования численного решения на задачах теории упругости МКЭ, имеющих аналитическое решение и качественно близких к рассматриваемым. Для деформируемых конструкций с концентраторами напряжений, имеющих U-образные вырезы, в качестве таких задач в данной работе предлагается рассмотреть следующие:

- задача о растяжении пластины с U-образным вырезом, решение которой описано в [4];
- задача о растяжении бесконечной пластины с эллиптическим вырезом вдоль малой полуоси этого отверстия (задача Нейбера), точное решение которой приведено в [5, 6].

Решение, описанное в работе [4], показало, что в исследованном диапазоне сочетаний геометрических параметров U-образного выреза в одноосно растягиваемой пластине для уменьшения относительной погрешности определения уровня максимальных напряжений до 5% необходимо применение КЭ разбивок этого выреза, содержащих определенное количество КЭ. В [4] установлено, что для достижения указанной точности дискретная модель исследуемой конструкции в зонах концентрации напряжений должна содержать не менее 15-ти КЭ на четверти дуги окружности, формирующей профиль концентратора в виде выреза.

Степень дискретизации исследуемой конструкции может быть определена на последовательности КЭ-приближений, позволяющих достигнуть сходимости численного решения с относительной погрешностью, не превышающей 5%. Для выбора оптимального варианта КЭ-разбивки области конструкции на конечные элементы и для оценки погрешности численного моделирования НДС исследуемой конструкции с концентраторами напряжений в виде U-образных вырезов проведен анализ сходимости численного решения расчетной модели бесконечной пластины с эллиптическим отверстием, растягиваемой вдоль малой полуоси этого отверстия, и анализ соответствующих вычислительных погрешностей [5].

В работе оценивалась относительная погрешность сходимости получаемых значений напряжений  $\varepsilon_{сход}$ , определяемая выражением

$$\varepsilon_{сход} = \frac{|\sigma_i^{n+1} - \sigma_i^n|}{\sigma_i^{n+1}}, \quad (1)$$

а также относительная погрешность получаемых значений напряжений  $\varepsilon$

$$\varepsilon = \frac{|\sigma_i^n - \sigma_i|}{\sigma_i^n}, \quad (2)$$

где  $n$  – номер разбивки в последовательности сгущающихся разбивок,  $\sigma_i$  – значение расчетной интенсивности напряжений в исследуемой зоне конструкции.

Решение задачи Нейбера строилось для двух вариантов разбивок КЭ-сетки бесконечной пластины с эллиптическим вырезом. Рассмотрению подвергались расчетные варианты с равномерной разбивкой КЭ-сетки и варианты разбивок, размеры интервалов в которых изменялись по закону геометрической прогрессии [7]. Для последнего сгущение разбивки осуществлялось на неравные интервалы по мере приближения к центральной зоне

эллиптического выреза. При этом уменьшение размера КЭ вблизи вершины эллиптического выреза за счет применения закона прогрессии (при одном и том же общем количестве КЭ) в общем случае может сопровождаться уменьшением точности моделирования НДС. Связано это с тем, что погрешность приближений может нарастать за счёт укрупнения размеров КЭ вдали от вершины выреза. Поведение погрешности в рассматриваемом случае было также оценено в вычислительных экспериментах.

Пластина с эллиптическим вырезом, для которой строилось решение, приведено на рисунке 1. Эллиптический вырез имел соотношение полуосей  $a/b=1/3$ . Погрешность численного решения оценивалось по значению коэффициента концентрации интенсивности напряжений  $K_\sigma$ , определяемого из выражения

$$K = \frac{\sigma_m}{\sigma_n}, \quad (3)$$

где  $\sigma_n$  – нормальные напряжения в направлении оси  $y$ , возникающие на удалении от эллиптического выреза;  $\sigma_m$  – нормальные напряжения в вершине эллиптического выреза на оси  $Ox$  (рис. 1). В соответствии с [5, 6] значение коэффициента  $K$  для выбранного соотношения полуосей эллиптического выреза равно 7.

Приближенное КЭ-решение задачи строилось с применением объемных КЭ – изопараметрического гексаэдра первого порядка аппроксимации. Моделировалась четверть пластины в виду ее симметрии относительно центральных осей с заданием соответствующих условий кинематического закрепления. При расчетном исследовании материал пластины принимался однородным, изотропным. Численно решались трехмерные уравнения теории упругости, реализованные в комплексе Femap [8-10]. Геометрическая модель пластины построена таким образом, что её высота и ширина более чем в 10 раз больше длины полуоси  $b$ , а толщина пластины принималась равной единице (рис. 2).

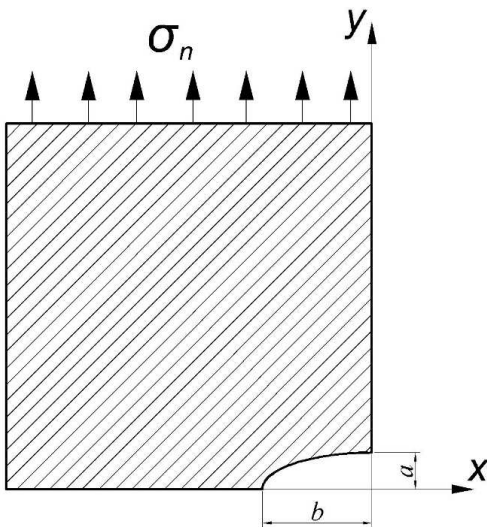


Рис. 1. Растяжение бесконечной пластины с эллиптическим вырезом (задача Нейбера)

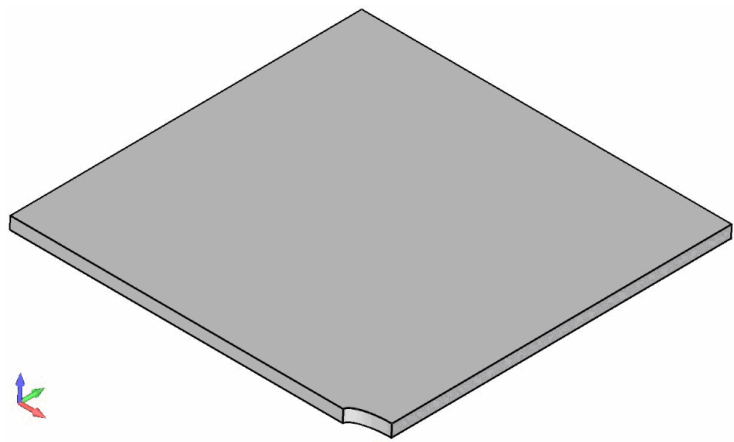


Рис. 2. Геометрическая модель пластины с эллиптическим вырезом

В вычислительных экспериментах было создано шесть КЭ-моделей пластины с эллиптическим вырезом для случая регулярной разбивки, когда сгущение КЭ-сетки по мере приближения к эллиптическому вырезу носит равномерный характер (рис. 3,а-е).

Представленные на рисунке 3 дискретные КЭ-модели содержат разное количество КЭ на четверти дуги эллиптического выреза в порядке возрастания: 5, 8, 11, 16, 18 и 21. При этом по толщине пластина разбивалась на 1-6 конечных элементов, а в направлении по нормали к линии контура эллиптического выреза на 20, 40, 80, 160, 320 и 500 соответственно. Модели были построены таким образом, что форма конечных элементов, примыкающих к вершине эллиптического выреза, была правильной. Это обстоятельство позволило исключить из расчетов возникновение искажения результатов, связанных с неправильной формой КЭ.

Дискретные КЭ-модели для случая разбивки пластины на КЭ, сгущающейся по закону прогрессии, приведены на рисунке 4. При построении КЭ-сетки в направлении по нормали к линии контура эллиптического выреза принималось, что знаменатель прогрессии  $q = 2$ , а число КЭ в разбивке в количестве 20.

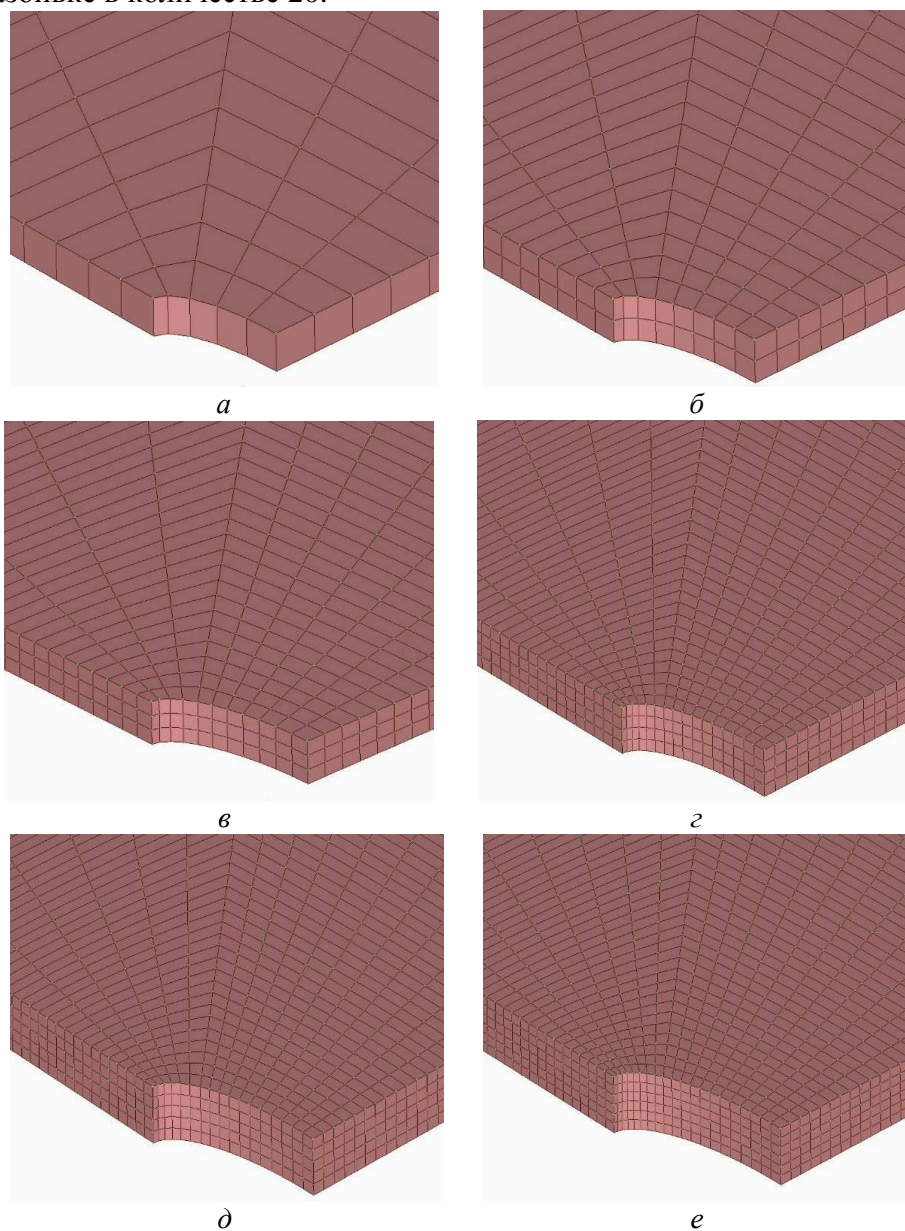


Рис. 3. Варианты разбиения пластины с эллиптическим вырезом на КЭ для случая равномерного разбиения: а) 5 элементов, б) 8 элементов, в) 11 элементов, г) 16 элементов, д) 18 элементов, е) 21 элемент

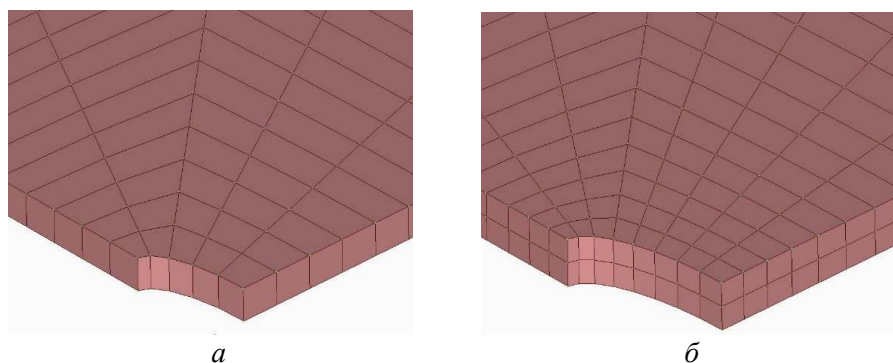


Рис. 4. Варианты разбиения пластины с эллиптическим вырезом на КЭ для случая разбинок, сгущающихся по закону прогрессии: а) 5 элементов; б) 8 элементов

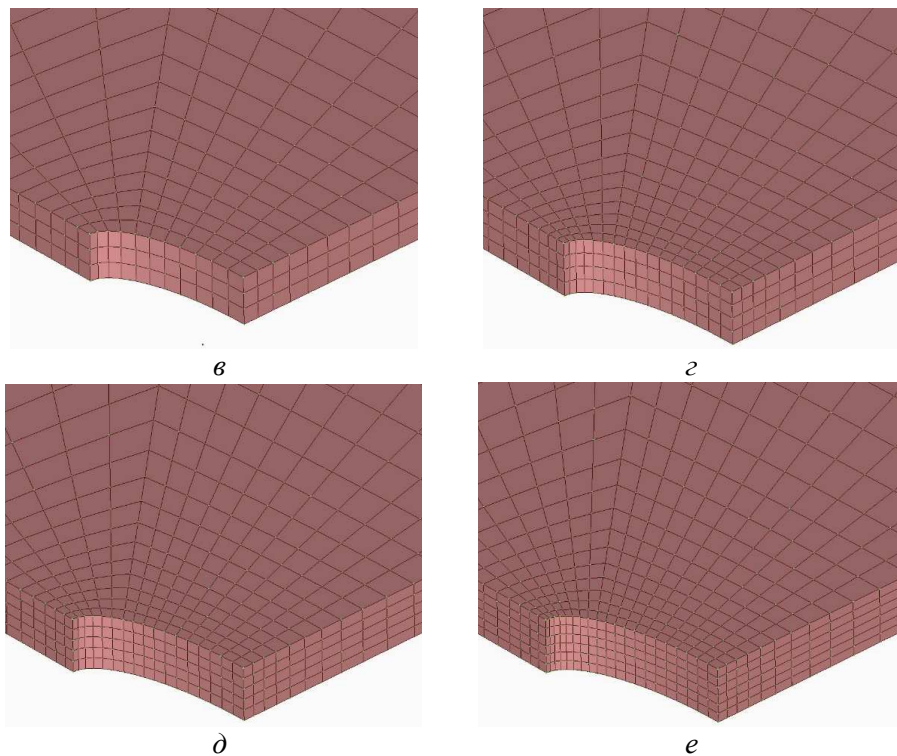


Рис. 4. Варианты разбиения пластины с эллиптическим вырезом на КЭ для случая разбинок, сгущающихся по закону прогрессии: а) 11 элементов; б) 16 элементов; в) 18 элементов; г) 21 элемент

Исходные данные для исследования точности и сходимости численного решения рассматриваемой задачи при двух случаях разбинок КЭ-модели сведены в таблицу 1.

Табл. 1. Параметры дискретизации пластины с эллиптическим вырезом

Номер расчетного варианта, $N_{расч}$	Количество КЭ по дуге выреза	Степень дискретизации в радиальном (для выреза) направлении	
		Разбивка по числу КЭ	Разбивка по знаменателю прогрессии
1	5	20	1
2	8	40	4
3	11	80	16
4	16	160	32
5	18	320	64
6	21	500	128

Граничные условия кинематического закрепления пластины представлены на рисунке 5. Во избежание сингулярности в матрице жесткости расчетной модели один из её узлов закреплен в осевом направлении.

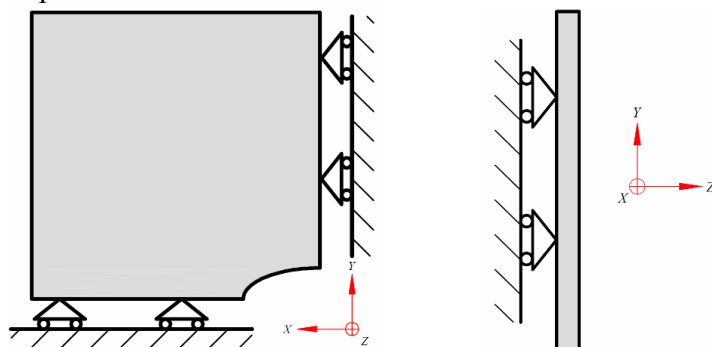


Рис. 5. Граничные условия кинематического закрепления пластины

## Результаты вычислительных экспериментов

Результаты сходимостей  $\varepsilon_{сход}$  численного решения рассматриваемой задачи для двух случаев разбинок представлены на рисунке 6.

Из рисунка 6 видно, что сходимость численного решения с относительной погрешностью, не превышающей 5%, достигается для четвертого расчетного варианта, когда количество КЭ на дуге эллиптического выреза равно 16. В вычислительном эксперименте установлено, что указанная сходимость характерна для обоих рассмотренных случаев разбинок модели на КЭ.

В связи с тем, что при увеличении размерности КЭ-моделей (с нескольких тысяч до нескольких миллионов степеней свободы) процессорное время счета  $\tau_{расч}$  может существенно возрасти, в условиях ограниченных вычислительных ресурсов ЭВМ одним из основных критериев эффективности расчетной модели является вычислительное время  $\tau_{расч}$ . Особенно это важно при проведении многократно повторяющихся расчетов – вариантных исследований.

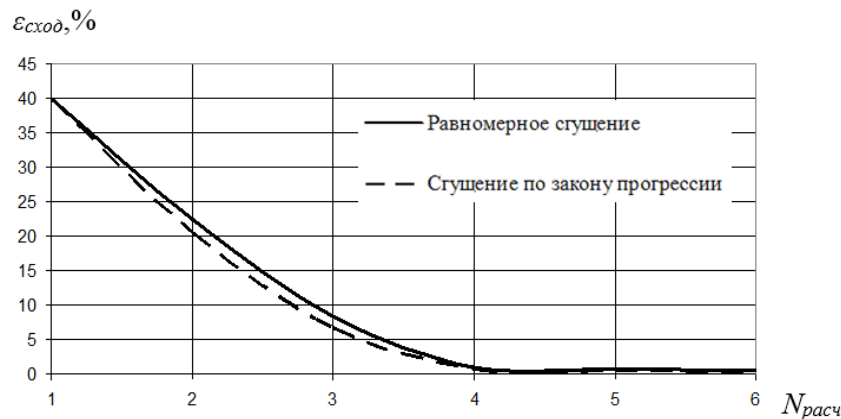


Рис. 6. Относительная погрешность сходимости КЭ приближений в задаче Нейбера для двух вариантов разбинок

Вычисления, соответствующие рисунку 6, проводились на персональном компьютере (двухядерный процессор с тактовой частотой порядка 3-х гигагерц, оперативная память – порядка четырёх гигабайт, операционная система – Windows 7). На рисунке 7 приведена зависимость вычислительного времени  $\tau_{расч}$  для рассматриваемых расчетных случаев.



Рис. 7. Распределение вычислительного времени для двух вариантов разбинок

Представленные на рисунке 7 зависимости, позволяют утверждать, что высокая точность моделирования сопряжена со значительными временными ресурсами. Также можно сделать вывод, что способ моделирования разбинок по закону прогрессии предпочтителен для достижения требуемой точности, а также экономичен в плане использования вычислительных ресурсов ЭВМ и времени подготовки расчетной КЭМ. На рисунке 8 представлены результаты расчетного моделирования значений коэффициента концентрации напряжений  $K$  в пластине с эллиптическим вырезом для одного из вариантов разбинок.

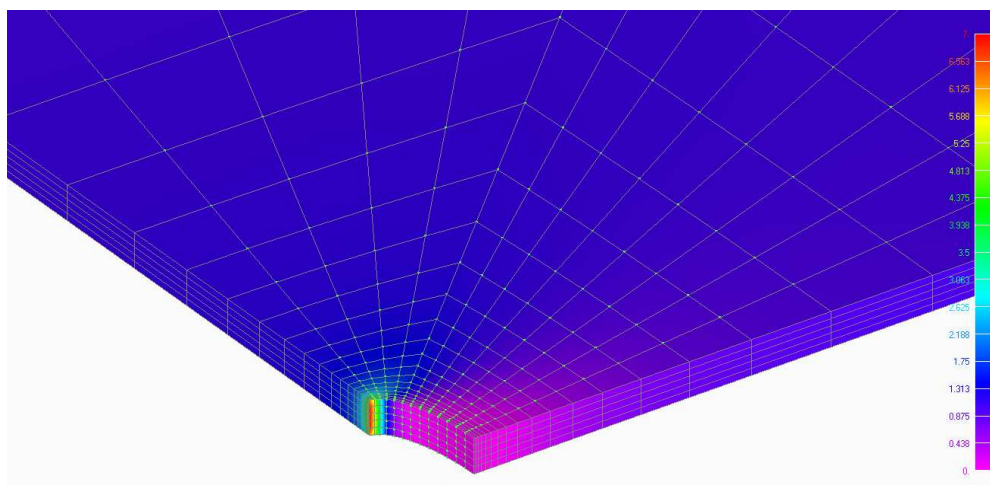


Рис. 8. Распределение величины концентрации напряжений в пластине

Результаты вычисленных погрешностей получаемых значений напряжений  $\varepsilon$  в сравнении с эталонным решением [5] для двух вариантов разбинок представлены на рисунке 9.

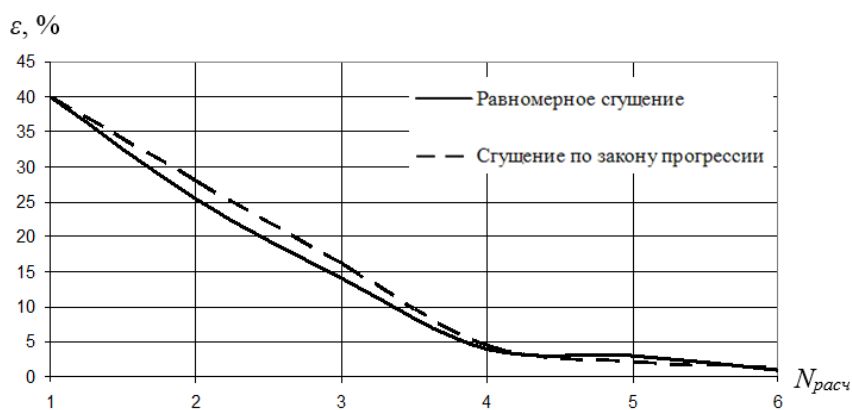


Рис. 9. Погрешность численного решения задачи Нейбера для двух вариантов разбинок

Анализ полученных результатов показал, что относительная погрешность сходимости (рис. 6), вычисляемая по формуле (1) и погрешность получаемых приближений (рис. 9), определяемая по значению точного решения с помощью формулы (2), закономерно связаны между собой. Установлено, что использование разбинок, содержащих на четверти контура выреза 16 КЭ, позволяет уменьшить погрешность получаемых приближений до 2%.

### Выводы

Таким образом, способ дискретизации, основанный на локальном сгущении КЭ-разбинок по закону геометрической прогрессии, позволяет строить дискретные модели деформирования, вычислительно эффективные по критерию точности и минимизации машинного времени. Указанное обстоятельство следует учитывать при разработке расчетных моделей конструкций, имеющих концентраторы напряжений в виде U-образных вырезов.

Представленная система тестов и вычислительные эксперименты, основанные на анализе сходимости численного решения эталонной задачи и соответствующих вычислительных погрешностей, позволяют убедиться в приемлемости и необходимости принятых конечно-элементных приближений в задачах моделирования напряженно-деформированного состояния области конструкций с концентраторами напряжений с различными по форме вырезами.

### Список литературы

1. Когаев В.П., Махутов Н.А., Гусенков А.П. Расчеты деталей машин и конструкций на прочность и долговечность: Справочник. – М.: Машиностроение, 1985. – 224 с.

2. Пыхалов А.А., Пашков В.П., Зыонг В.Л. Исследование точности численного решения методом конечных элементов анализа напряженно-деформированного состояния образцов из материалов с неоднородной структурой на основе данных компьютерного томографа и натурального эксперимента // Вестник Иркутского государственного технического университета. – 2017. – №4(123). – С. 47-56.
3. Зеньков Е.В., Цвик Л.Б., Пыхалов А.А. Дискретное моделирование напряженно-деформированного состояния плоскоцилиндрических образцов с концентраторами напряжений в виде канавок // Вестник Иркутского государственного технического университета. – 2011. – №7(54). – С. 6-11.
4. Иванютенко В.И., Крицук А.А., Рафаилов А.Г., Резниченко В.И., Русецкий В.С., Яценко М.И. О критерии разрушения металлических образцов с концентраторами на основе теории средних напряжений // Прикладная механика. – 1990. – № 2. – С. 113-117.
5. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. – М.: Наука, 1966. – 636 с.
6. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. – М.: Наука, 1979. – 582 с.
7. Зеньков Е.В. Повышение достоверности расчетов деталей машин с концентраторами напряжений при двухосном растяжении: Автореф. дисс. ... канд. техн. наук. – Иркутск: ИРНТУ, 2015. – 20 с.
8. Цвик Л.Б., Зеньков Е.В. Физические основы теории упругости и метода конечных элементов. – Иркутск: ИрГУПС, 2022. – 116 с.
9. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 542 с.
10. Шимкович Д.Г. Расчет конструкций в MSC/NASTRAN for Windows. – М.: ДМК Пресс, 2003. – 448 с.

### References

1. Kogaev V.P., Makhutov N.A., Gusenkov A.P. Calculations of machine parts and structures for strength and durability. – М.: Mechanical engineering, 1985. – 224 p.
2. Pykhalov A.A., Pashkov V.P., Zyong V.L. Investigation of the accuracy of a numerical solution by the finite element analysis of the stress-strain state of samples from materials with an inhomogeneous structure based on data from a computer tomograph and a full-scale experiment // Bulletin of the Irkutsk State Technical University. 2017, no. 4(123), pp. 47-56.
3. Zenkov E.V., Tsvik L.B., Pykhalov A.A. Discrete modeling of the stress-strain state of flat-cylindrical specimens with stress concentrators in the form of grooves // Bulletin of the Irkutsk State Technical University. 2011, no. 7(54), pp. 6-11.
4. Ivanyutenko V.I., Kritsuk A.A., Rafailov A.G., Reznichenko V.I., Rusetskiy V.S., Yatsenko M.I. On the criterion for the destruction of metal samples with concentrators based on the theory of medium stresses // Applied Mechanics. 1990, no. 2, pp. 113-117.
5. Timoshenko S.P., Voinovsky-Krieger S. Plates and shells. – М.: Science, 1966. – 636 p.
6. Timoshenko S.P., Goodier J. Theory of elasticity. – М.: Science, 1979. – 582 p.
7. Zenkov E.V. Improving the reliability of calculations of machine parts with stress concentrators in biaxial tension: Abstract of the diss. ... cand. of tech. sc. – Irkutsk: IRNITU, 2015. – 20 p.
8. Tsvik L.B., Zenkov E.V. Physical foundations of the theory of elasticity and the finite element method. – Irkutsk: IrGUPS, 2022. – 116 p.
9. Zenkevich O. Finite element method in engineering. – М.: World, 1975. – 542 p.
10. Shimkovich D.G. Structural analysis in MSC/NASTRAN for Windows. – М.: DMK Press, 2003. – 448 p.

### Сведения об авторах:

### Information about authors:

**Зеньков Евгений Вячеславович** – кандидат технических наук, доцент, доцент, доцент кафедры механики и сопротивления материалов ИРНТУ, доцент кафедры управления качеством и инженерной графики ИрГУПС

**Zenkov Evgeny Vyacheslavovich** – candidate of technical sciences, associate professor, associate professor of the Department of mechanics and resistance of materials IRNRTU, associate professor of the Department of quality management and engineering graphics IRSTU

jovanny1@yandex.ru

Получена 09.03.2023