

## АППРОКСИМАЦИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ОПОР БАЛКИ ПРИ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЯХ С УЧЕТОМ ЛИНЕЙНОЙ ЖЕСТКОСТИ ОПОР

Кудрявцев И.В.<sup>1</sup>, Малыхина Л.К.<sup>1</sup>, Рабецкая О.И.<sup>2</sup>, Швец Д.А.<sup>1</sup>, Митяев А.Е.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Сибирский федеральный университет, Красноярск;

<sup>2</sup>Сибирский государственный университет науки и технологий  
имени академика М.Ф. Решетнева, Красноярск

**Ключевые слова:** балка, колебания, коэффициент опор, жесткость, аппроксимация.

**Аннотация.** В данной работе исследованы поперечные свободные колебания двухопорной балки с учетом влияния линейной жесткости опор. Обзор литературы показал, что в теории колебаний балок учет условий закрепления основан на использовании коэффициентов опор, значения которых основаны на собственных значениях некоторой системы, полученной в процессе решения соответствующего дифференциального уравнения колебаний. Рассматривалось решение для первой и второй собственной частоты колебаний. Установлено, что в существующей справочной литературе содержится весьма ограниченный набор значений коэффициентов опор, а учет жесткости опор можно найти только в отдельных изданиях и для ограниченного числа вариантов значений жесткостей, обычно в графическом виде. В данной работе выполнен расширенный расчет коэффициентов опор в зависимости от линейной жесткости опор балки для первой и второй собственных частот колебаний. Найденные значения коэффициентов опор были аппроксимированы квадратичными функциями, для снижения погрешности аппроксимации рассматриваемая область жесткостей опор была разделена на три зоны. Квадратичная аппроксимация позволила получить простые аналитические зависимости, пригодные для инженерных прикладных расчетов, а также решать обратную задачу по определению жесткостей опор для заданного значения первой или второй собственной частоты колебаний. Исследование погрешности аппроксимации показало, отклонения не превышают 3,5% если опоры балки имеют жесткость одного порядка. Исследование формы поперечных колебаний балки показало, что на первой частоте форма является симметричной относительно геометрического центра балки, а на второй частоте – антисимметричной. Также установлено, что балка колеблется как жесткое целое, если ее изгибная жесткость сопоставима или больше чем жесткость опор. В противном случае, когда жесткость опор превосходит жесткость балки более чем на порядок, то в процессе колебаний балка испытывает изгиб. Полученные результаты можно использовать в инженерных прикладных расчетах собственных частот колебаний балок с упругими опорами.

## APPROXIMATION OF BEAM SUPPORT COEFFICIENTS AT TRANSVERSE VIBRATIONS CONSIDERING LINEAR STIFFNESS OF SUPPORTS

Kudryavtsev I.V.<sup>1</sup>, Malykhina L.K.<sup>1</sup>, Rabetskaya O.I.<sup>2</sup>, Shvets D.A.<sup>1</sup>, Mityaev A.E.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Siberian Federal University, Krasnoyarsk;

<sup>2</sup>Reshetnev Siberian State University of Science and Technology, Krasnoyarsk

**Keywords:** beam, vibration, support coefficient, stiffness, approximation.

**Abstract.** In this work, the transverse free vibrations of the double-support beam were investigated, considering the influence of the linear supports stiffness. Our literature review showed that in the theory of beam vibrations, consideration of fixing conditions is based on the use of support coefficients, the values of which are determined by the eigenvalues of a certain system obtained in the process of solving the corresponding differential equation of vibrations. The solution for the first and second eigenfrequency of vibrations was considered. It has been found that the existing reference literature contains a very limited set of support coefficient values, and consideration of support stiffness can only be found in individual editions and for a limited number of options for stiffness values, usually graphically. In this paper, extended calculation of the support coefficients depending on the linear stiffness of the beam supports for the first and second eigenfrequency is made. The found values of the support coefficients were approximated by quadratic functions; to reduce the approximation error, the area of support stiffness in question was divided into three zones. The quadratic approximation made it possible to obtain simple analytical dependencies suitable for engineering applied calculations, as well as to solve the inverse problem of determining the support's stiffness for a given value of the first or second eigenfrequency. The study of approximation error showed that deviations do not exceed 3.5% if the beam supports have stiffness of the same order. The study of the beam shape at the transverse vibrations showed that at the first frequency the shape is symmetrical regarding the geometric centre of the beam, and at the second frequency it is

antisymmetric. It has also been found that the beam vibrates as a rigid whole if its bending stiffness is comparable or greater than the stiffness of the supports. Otherwise, when the stiffness of the supports exceeds the stiffness of the beam by more than an order of magnitude, the beam is bent during vibrations. The obtained results can be used in engineering applied calculations of natural frequencies of the beam vibrations with elastic supports.

## **Введение**

Моделирование и расчет протяженных конструкций с помощью балочных моделей, несмотря на большое число упрощений и ограничений, широко используется расчетчиками на этапах предварительного проектирования и проверочных расчетов. Такой подход позволяет оперативно получить аналитическое решение задачи с минимальными вычислительными затратами, оценить общее поведение конструкции и внести необходимые корректировки, например, в способ закрепления: изменить число опор, их шаг или обосновать жесткость опоры в нужном направлении и т.д. После отработки балочной модели для проверки принятых решений и уточнения результатов проводится расчет для твердотельной модели, обычно численными методами (МКЭ, МКР и др.).

Задача определения собственных частот колебаний балки с математической точки зрения описывается дифференциальным уравнением четвертого порядка с граничными условиями, которые определяются способами ее закрепления [1-14]. Решение такой задачи весьма сложно, поскольку связано с необходимостью определения собственных значений системы, и обычно не имеет простого аналитического решения. Собственные значения системы определяют величину так называемых коэффициентов опор, которые и используются в дальнейшем для нахождения значений собственных частот колебаний балки. Выходом из этой ситуации является справочная литература по колебаниям, в которой приводятся готовые решения для балок различной геометрии при разных способах закрепления, например [15-19]. Казалось бы, расчетчик может воспользоваться приведенными в литературе значениями и легко решить свою задачу, однако возникает ряд сложностей, которые существенно затрудняют решение.

Во-первых, в существующей литературе по динамике балок приводятся решения только для ограниченного числа видов опор и их комбинаций. В качестве опор обычно предлагаются идеализированные закрепления, которые полностью запрещают или разрешают движение по какой-либо координате: заделка, шарнир, скользящая опора и др. Однако действительная опора имеет конечное значение жесткости, которое необходимо учитывать для получения корректных результатов расчета. Некоторые справочники приводят решения, учитывающие жесткость опор по какой-либо координате [17-19], но эти значения даются с очень большим шагом или же в виде графиков, которые не позволяют точно получить расчетчику требуемое значение для своей конкретной конструкции. Приводимые различные решения данной задачи обычно весьма сложные и не подходят для инженерных прикладных расчетов [20-22].

Во-вторых, справочники ориентированы на выполнение проверочного расчета, не позволяя решать обратные проектные задачи, например, по определению требуемой жесткости опор, обеспечивающих заданное значение первой собственной частоты колебаний балки. Такая задача часто встречается в конструкциях, работающих в условиях вынужденных колебаний, например, для отстройки от резонансной частоты или в специальных конструкциях, работающих в режиме резонанса или антирезонанса [23].

Целью данной работы является аппроксимация промежуточных значений коэффициентов опор протяженных балок при свободных поперечных колебаниях для широкого диапазона жесткостей опор, а также их аппроксимация такими аналитическими функциями, которые бы позволяли решать обратную задачу по нахождению требуемой жесткости опор балки.

### **1. Постановка задачи**

Для протяженных балок наибольшее практическое значение имеют значения первых собственных частот колебаний, поскольку они связаны с наибольшей величиной колеблющейся массы конструкции. В большинстве случаев первая собственная частота балки

будет связана с изгибными колебаниями, этот случай разобран в работе [24] для случая шарнирных опор с крутильной жесткостью. Здесь рассмотрим другой важный случай поперечных колебаний балки на упругих опорах с линейной жесткостью. Такие колебания будут значимыми, когда жесткость опор меньше или одного порядка с изгибной жесткостью балки, например при закреплении протяженных волноводов на сотопанели космического аппарата. На рисунке 1 показана расчетная схема для свободных поперечных колебаний однородной балки с шарнирами по краям, которые соединены с опорами жесткостью  $k_1$  и  $k_2$ . Шарниры на краях балки позволяют выделить только линейную жесткость опор и исключить влияние поворота балки по ее краям на получаемые результаты. Рассмотрим первые две формы колебаний балки, которые имеют наибольшее практическое значение и показаны на рисунке 1.

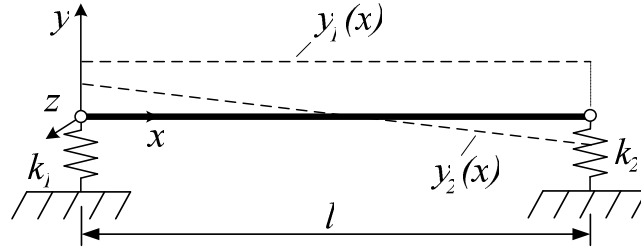


Рис. 1. Поперечные колебания балки на упругих опорах

Уравнение свободных колебаний балки имеет вид:

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

где  $y_i = y_i(x, t)$  – функция формы балки на  $i$ -й форме колебаний;  $m$  – удельная масса;  $l$  – длина балки;  $E$  – модуль Юнга материала;  $J$  – момент инерции поперечного сечения.

Граничные условия закрепления балки определяются условиями ее закрепления на концах и для упругих опор с шарнирами имеют вид:

$$\frac{d^2 y(0, t)}{dx^2} = 0; \quad EJ \cdot \frac{d^3 y(0, t)}{dx^3} = k_1 \cdot y(0, t); \quad \frac{d^2 y(l, t)}{dx^2} = 0; \quad EJ \cdot \frac{d^3 y(l, t)}{dx^3} = -k_2 \cdot y(l, t). \quad (2)$$

Общее решение уравнения (1) представим в виде ряда Фурье по модам колебаний:

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} X_i(\lambda_i x) \cdot T_i(\omega_i t), \quad (3)$$

где  $X_i(\lambda_i x)$  – собственная форма колебаний балки на  $i$ -й частоте;

$T_i(\omega_i t)$  – функция, описывающая изменение колебаний во времени на  $i$ -й частоте;

$\lambda_i$  – собственное (характеристическое) значение;  $\omega_i$  – круговая частота колебаний.

Функция  $T(x)$  описывает колебания во времени и далее исключена из расчета, поскольку здесь рассматриваются незатухающие во времени свободные колебания. Тогда решение уравнения (1) на  $i$ -й собственной частоте колебаний определяется только функцией  $X_i$ , в качестве которой примем следующее выражение:

$$X_i(\lambda_i x) = A \cdot S_i(\lambda_i x) + B \cdot T_i(\lambda_i x) + C \cdot U_i(\lambda_i x) + D \cdot V_i(\lambda_i x), \quad (4)$$

где  $A, B, C, D$  – постоянные, определяемые условиями закрепления балки;

$S_i(\lambda_i x), T_i(\lambda_i x), U_i(\lambda_i x), V_i(\lambda_i x)$  – функции Крылова:

$$S_i(\lambda_i x) = \frac{1}{2} (ch(\lambda_i x) + \cos(\lambda_i x)), \quad T_i(\lambda_i x) = \frac{1}{2} (sh(\lambda_i x) + \sin(\lambda_i x)),$$

$$U_i(\lambda_i x) = \frac{1}{2} (ch(\lambda_i x) - \cos(\lambda_i x)), \quad V_i(\lambda_i x) = \frac{1}{2} (sh(\lambda_i x) - \sin(\lambda_i x)).$$

Для определения постоянных  $A, B, C, D$  подставим решение (4) в граничные условия (2) и получим систему из четырех уравнений:

$$\frac{d^2 X_i(0)}{dx^2} = 0; \quad EJ \cdot \frac{d^3 X_i(0)}{dx^3} = k_1 \cdot X_i(0); \quad \frac{d^2 X_i(\lambda_i l)}{dx^2} = 0; \quad EJ \cdot \frac{d^3 X_i(\lambda_i l)}{dx^3} = -k_2 \cdot X_i(\lambda_i l). \quad (5)$$

или в развернутом виде:

$$\begin{cases} C = 0; \\ A \cdot U_i(\lambda_i l) + B \cdot V_i(\lambda_i l) + D \cdot T_i(\lambda_i l) = 0; \\ A \cdot k_1 - D \cdot EJ \cdot \lambda_i^3 = 0; \\ A \cdot \left[ S_i(\lambda_i l) + \frac{EJ}{k_2} \lambda_i^3 T_i(\lambda_i l) \right] + B \cdot \left[ T_i(\lambda_i l) + \frac{EJ}{k_2} \lambda_i^3 U_i(\lambda_i l) \right] + D \cdot \left[ V_i(\lambda_i l) + \frac{EJ}{k_2} \lambda_i^3 S_i(\lambda_i l) \right] = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Поскольку первое граничное условие дает  $C=0$ , то нетривиальное решение  $X \neq 0$  получим, если приравнять нулю определитель, составленный из выражений при оставшихся коэффициентах выражения (4):

$$\det \begin{vmatrix} U_i(\lambda_i l) & V_i(\lambda_i l) & T_i(\lambda_i l) \\ k_1 & 0 & -EJ \cdot \lambda_i^3 \\ S_i(\lambda_i l) + \frac{\lambda_i^3 \cdot EJ}{k_2} T_i(\lambda_i l) & T_i(\lambda_i l) + \frac{\lambda_i^3 \cdot EJ}{k_2} U_i(\lambda_i l) & V_i(\lambda_i l) + \frac{\lambda_i^3 \cdot EJ}{k_2} S_i(\lambda_i l) \end{vmatrix} = 0 \quad (7)$$

или

$$\begin{aligned} k_1 \cdot [T_i^2(\lambda_i l) - V_i^2(\lambda_i l)] + \frac{(\lambda_i^3 EJ)^2}{k_2} [U_i^2(\lambda_i l) - V_i(\lambda_i l) \cdot T_i(\lambda_i l)] + \\ + EJ \lambda_i^3 \left[ 1 + \frac{k_1}{k_2} \right] [T_i(\lambda_i l) \cdot U_i(\lambda_i l) - V_i(\lambda_i l) \cdot S_i(\lambda_i l)] = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

С целью общности решения, далее в качестве жесткости опор будем использовать не абсолютные значения жесткостей  $k_1$  и  $k_2$  [Н/м], а их относительные безразмерные величины:

$$C_1 = k_1 \frac{l^3}{EJ}; \quad C_2 = k_2 \frac{l^3}{EJ}, \quad (9)$$

Заменим в выражении (8) согласно (9)  $k_i$  на  $C_i$  и получим:

$$\begin{aligned} \frac{C_1}{l^3} \cdot [T_i^2(\lambda_i l) - V_i^2(\lambda_i l)] + \lambda_i^6 \frac{l^3}{C_2} [U_i^2(\lambda_i l) - V_i(\lambda_i l) \cdot T_i(\lambda_i l)] + \\ + \lambda_i^3 \left[ 1 + \frac{C_1}{C_2} \right] [T_i(\lambda_i l) \cdot U_i(\lambda_i l) - V_i(\lambda_i l) \cdot S_i(\lambda_i l)] = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

Решение трансцендентного уравнения (10) дает бесконечное количество решений для  $\lambda_i(C_1, C_2)$ , каждому значению которого соответствует своя собственная частота колебаний балки:

$$f_i(C_1, C_2) = \frac{\lambda_i^2(C_1, C_2)}{2\pi l^2} \cdot \sqrt[4]{\frac{EJ}{m}}. \quad (11)$$

В данной работе рассматриваются первые две частоты колебаний ( $i=1, 2$ ), которые соответствуют поступательной и вращательной форме колебаний балки (рис. 1) и обычно имеют наибольший практический интерес. Аналитическое решение для выражения (10) даже для этих случаев является весьма сложной задачей, поэтому решение получим численным итеративным методом в специально созданной программе на ЭВМ.

## 2. Результаты расчета коэффициентов опор

Выполнено решение разрешающего (частотного) уравнения (10) для первых двух собственных частот колебаний ( $i=1, 2$ ) для более 500 вариантов сочетаний жесткостей опор балки в диапазоне  $C_{1,2} = 0 \dots 1000$ . Диапазон значений относительной жесткости был ограничен сверху, так как дальнейшее увеличение жесткости слабо влияло на результаты

расчеты и практически соответствовало жесткой заделке по соответствующей координате. Далее представлены результаты расчетов для первой и второй собственных частот в табличной и графической форме, что позволяет наглядно оценить влияние жесткости на получаемые результаты.

### 2.1. Аппроксимация коэффициентов опор

Числовые результаты расчета коэффициентов опор при поперечных колебаниях балки на первой собственной частоте колебаний ( $i=1$ ) приведены в таблице 1.

Табл. 1. Значения коэффициентов опор  $\lambda_1(C_1, C_2)$

$C_2$	$C_1$													
	0	0,5	1	5	10	20	30	40	50	100	200	500	1000	$\infty$
0	0	0,233	0,236	0,236	0,236	0,236	0,234	0,236	0,237	0,235	0,235	0,234	0,235	0,236
0,5	0,233	0,999	1,059	1,097	1,101	1,103	1,103	1,104	1,104	1,104	1,104	1,105	1,105	1,105
1	0,236	1,059	1,185	1,292	1,301	1,306	1,307	1,308	1,308	1,309	1,310	1,310	1,310	1,310
5	0,236	1,097	1,292	1,743	1,842	1,886	1,898	1,905	1,908	1,915	1,918	1,920	1,921	1,922
10	0,236	1,101	1,301	1,842	2,032	2,140	2,173	2,189	2,198	2,215	2,224	2,228	2,230	2,231
20	0,236	1,103	1,306	1,886	2,140	2,332	2,403	2,438	2,459	2,499	2,517	2,528	2,532	2,535
30	0,234	1,103	1,307	1,898	2,173	2,403	2,498	2,548	2,578	2,636	2,664	2,681	2,686	2,691
40	0,236	1,104	1,308	1,905	2,189	2,438	2,548	2,607	2,643	2,716	2,752	2,773	2,779	2,786
50	0,237	1,104	1,308	1,908	2,198	2,459	2,578	2,643	2,684	2,768	2,809	2,833	2,841	2,849
100	0,235	1,104	1,309	1,915	2,215	2,499	2,636	2,716	2,768	2,877	2,933	2,967	2,978	2,989
200	0,235	1,104	1,310	1,918	2,224	2,517	2,664	2,752	2,809	2,933	2,998	3,038	3,051	3,064
500	0,234	1,105	1,310	1,920	2,228	2,528	2,681	2,773	2,833	2,967	3,038	3,081	3,096	3,111
1000	0,235	1,105	1,310	1,921	2,230	2,532	2,686	2,779	2,841	2,978	3,051	3,096	3,111	3,126
$\infty$	0,236	1,105	1,310	1,922	2,231	2,535	2,691	2,786	2,849	2,989	3,064	3,111	3,126	$\pi$

Графическая интерпретация результатов приведена на рисунке 2 в виде двумерной функции  $\lambda_1(C_1, C_2)$  и одномерной кривой  $\lambda_1(C)$  для случая опор одинаковой жесткости:  $C = C_1 = C_2$ .

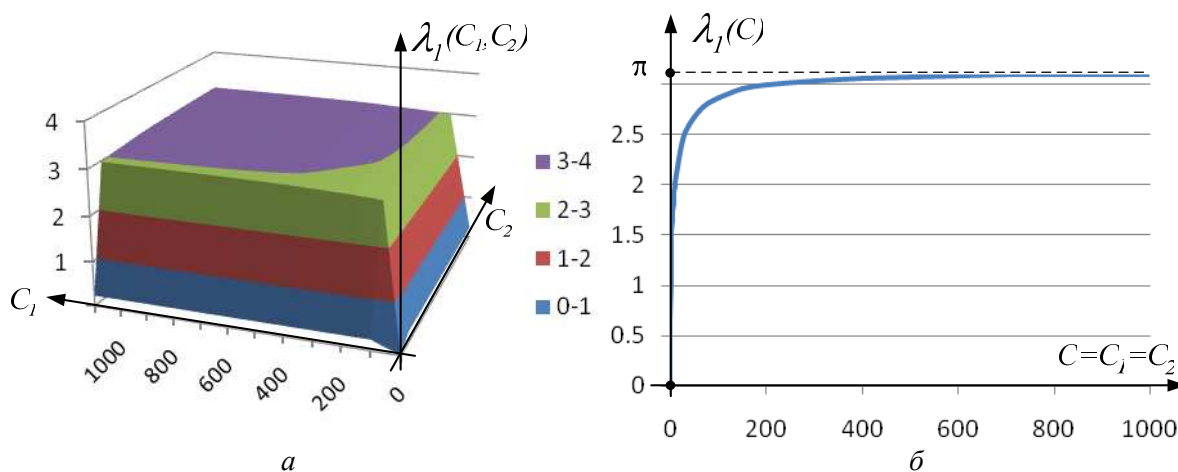


Рис. 2. Графическое представление коэффициентов опор при свободных колебаниях:  $a$  – график функции  $\lambda_1(C_1, C_2)$ ;  $b$  – график функции  $\alpha_1(C)$

Результаты расчета для второй собственной частоты колебаний ( $i=2$ ) приведены в таблице 2.

Графики полученных данных показаны на рисунке 3 в виде двумерной функции  $\lambda_2(C_1, C_2)$  и одномерной кривой  $\lambda_2(C)$  для случая опор с одинаковой жесткостью:  $C = C_1 = C_2$ .

Табл. 2. Значения коэффициентов опор  $\lambda_2(C_1, C_2)$

$C_2$	$C_1$													
	0	0,5	1	5	10	20	30	40	50	100	200	500	1000	$\infty$
0	0	1,189	1,412	2,090	2,455	2,849	3,077	3,229	3,338	3,606	3,764	3,862	3,894	3,923
0,5	1,189	1,316	1,474	2,106	2,466	2,857	3,085	3,237	3,346	3,614	3,772	3,870	3,899	3,931
1	1,412	1,474	1,564	2,125	2,478	2,866	3,093	3,245	3,354	3,622	3,780	3,878	3,911	3,943
5	2,090	2,106	2,125	2,333	2,595	2,945	3,163	3,312	3,420	3,688	3,847	3,945	3,978	4,010
10	2,455	2,466	2,478	2,595	2,767	3,056	3,257	3,400	3,506	3,772	3,932	4,031	4,063	4,095
20	2,849	2,857	2,866	2,945	3,056	3,270	3,442	3,573	3,673	3,936	4,098	4,197	4,230	4,262
30	3,077	3,085	3,093	3,163	3,257	3,442	3,598	3,721	3,819	4,084	4,250	4,352	4,385	4,417
40	3,229	3,237	3,245	3,312	3,400	3,573	3,721	3,843	3,940	4,213	4,386	4,491	4,525	4,558
50	3,338	3,346	3,354	3,420	3,506	3,673	3,819	3,940	4,039	4,322	4,505	4,616	4,651	4,685
100	3,606	3,614	3,622	3,688	3,772	3,936	4,084	4,213	4,322	4,664	4,909	5,059	5,105	5,148
200	3,764	3,772	3,780	3,847	3,932	4,098	4,250	4,386	4,505	4,909	5,248	5,478	5,548	5,613
500	3,862	3,870	3,878	3,945	4,031	4,197	4,352	4,491	4,616	5,059	5,478	5,805	5,913	6,012
1000	3,894	3,899	3,911	3,978	4,063	4,230	4,385	4,525	4,651	5,105	5,548	5,913	6,037	6,152
$\infty$	3,923	3,931	3,943	4,010	4,095	4,262	4,417	4,558	4,685	5,148	5,613	6,012	6,152	$2\pi$

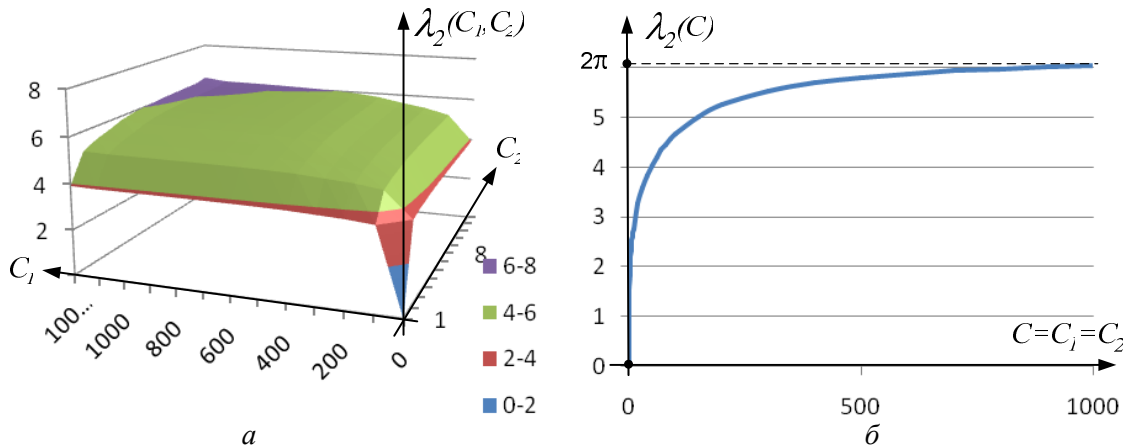


Рис. 3. Графическое представление коэффициентов опор при свободных колебаниях:  
 а – график функции  $\lambda_2(C_1, C_2)$ ; б – график функции  $\lambda_2(C = C_1 = C_2)$

Результаты расчетов выявили существенно нелинейный характер поведения функций  $\lambda_i(C_1, C_2)$ , который не позволяет ее аппроксимировать простой аналитической функцией даже для выбранного диапазона  $C = 0 \dots 1000$ . Достичь необходимой точности возможно при использовании полиномов высокой степени, однако это существенно затруднит решение. Принимая во внимание симметрию данных в таблицах 1 и 2 относительно главной диагонали, необходимость простых аналитических зависимостей и возможность решения обратной задачи, примем в качестве аппроксимирующих функций параболы. Снижение точности аппроксимации компенсируем путем разбиения диапазона жесткостей на три зоны:  $C_I = 0 \dots 10$ ,  $C_{II} = 10 \dots 100$ ,  $C_{III} = 100 \dots 1000$ . В пределах каждой зоны методом наименьших квадратов [25] получим значения коэффициентов для аппроксимирующих квадратичных функций:

$$\lambda_{ji}(C_1, C_2) = a_{0i} + a_{1i} \cdot (C_1 + C_2) + a_{2i} \cdot (C_1^2 + C_2^2), \quad (12)$$

где  $i$  – номер зоны,  $i = I, II, III$ ;  $j$  – номер частоты колебаний ( $j=1,2$ ).

При расчете коэффициентов квадратичных аппроксимирующих функций (12) на значения накладывалось условие равенства значений функции по границам зон. Полученные значения коэффициентов квадратичных функций для первой и второй собственных частот поперечных колебаний приведены в таблице 3.

Табл. 3. Коэффициенты функций  $\lambda_{1i}(C_1, C_2)$ 

Номер частоты собственных колебаний	Коэффициент	Зона		
		I	II	III
		$C = 0 \dots 10$	$C = 10 \dots 100$	$C = 100 \dots 1000$
1	$a_{01}$	0,986	1,78	2,79
	$a_{11}$	0,1045	0,0134	4,7E-04
	$a_{21}$	-0,00522	-7,9E-05	-3,1E-07
2	$a_{02}$	1,296	2,31	4,18
	$a_{12}$	0,141	0,024	2,53E-03
	$a_{22}$	-0,00675	-1,23E-04	-1,6E-06

С использованием аппроксимирующих функций можно определять значения первой и второй собственной частоты поперечных колебаний балки для известных жесткостей опор в пределах каждой зоны.

## 2.2. Обратная задача

Простой аналитический вид аппроксимирующих функций позволяет легко решать обратную задачу по определению требуемой жесткости опор, обеспечивающей значение первой или второй собственной частоты поперечных колебаний. Для этого из (11) выразим требуемое значение коэффициента опор:

$$\lambda_j(C_1, C_2) = l \cdot \sqrt[4]{f_j^2 \cdot \frac{4\pi^2 m}{EJ}}. \quad (13)$$

где  $j$  – номер частоты колебаний ( $j=1,2$ ).

Поскольку функция  $\lambda_j(C_1, C_2)$  может иметь множество решений, удовлетворяющих равенству (13) при различном сочетании жесткостей опор, то задача становится неопределенной. Для однозначности решения, наложим связь на жесткости опор через задаваемый коэффициент  $n$  в виде:

$$C = C_1 = \frac{C_2}{n}. \quad (14)$$

Подставив зависимость (14) в уравнение (12), получим уравнение относительно жесткости  $C$ :

$$a_{2i} \cdot (1+n^2)C^2 + a_{1i} \cdot (1+n)C + (a_{0i} - \lambda_j) = 0. \quad (15)$$

Значения коэффициентов  $a_{ij}$  принимаются из таблицы 2 для требуемой зоны  $i$  и решение с учетом знаков имеет вид

$$C = \frac{-a_{1i} \cdot (1+n) + \sqrt{a_{1i}^2 \cdot (1+n)^2 - 4a_{2i} \cdot (1+n^2) \cdot (a_{0i} - \lambda_j)}}{2 \cdot a_{2i} \cdot (1+n^2)}. \quad (16)$$

После нахождения  $C$ , значения жесткостей опор определяются как:

$$C_1 = C; \quad C_2 = C \cdot n \quad \text{и} \quad k_1 = C \cdot \frac{EJ}{l^3}, \quad k_2 = C \cdot \frac{EJ}{l^3} \cdot n. \quad (17)$$

Найденные жесткости опор (17) будут обеспечивать заданное значение коэффициента опор  $\lambda_j(C_1, C_2)$  и, следовательно, требуемое значение частоты поперечных колебаний балки.

## 3. Обсуждение

В результате расчета получены наборы коэффициентов опор при свободных поперечных колебаниях балки на упругих опорах для первой и второй собственных частот. Сравнение полученных значений с данными из существующей литературы осложнялось тем, что только в справочнике [19] были приведены числовые значения, которые показали максимальное различие значений коэффициентов опор 0,1%. Источники [17, 18] содержат

результаты расчетов коэффициентов опор только в графическом виде, что позволяет оценить только корректность полученного решения в целом.

Анализ погрешности аппроксимации значений коэффициентов опор при различных сочетаниях жесткостей  $C_1$  и  $C_2$  показал, что если они одного порядка, то отклонения в пределах зоны не превышают 3,5%, что вполне допустимо для расчета балок, поскольку допущения теории балок вносят отклонения аналогичной величины. Если же разница в жесткостях опор балки более чем в 10 раз, то погрешность начинает резко расти из-за ограниченного действия аппроксимирующих функций только в пределах своей зоны.

В качестве иллюстрации поперечных колебаний балки на рисунке 4 приведены примеры решения в программе Ansys при разных значениях относительной жесткости  $C$ . Анализ формы колебаний показывает, что на первой собственной частоте форма балки симметрична относительно своего геометрического центра, а на второй частоте имеет антисимметричную форму. Также, форма балки при колебаниях на первой и второй собственных частотах будет прямолинейной, как показано на рисунках 4,а,в, только при малых относительных жесткостях опор. При больших значениях  $C$ , когда жесткость опор более чем на порядок превышает изгибную жесткость балки, последняя будет принимать криволинейную форму (рис. 4,б,г).

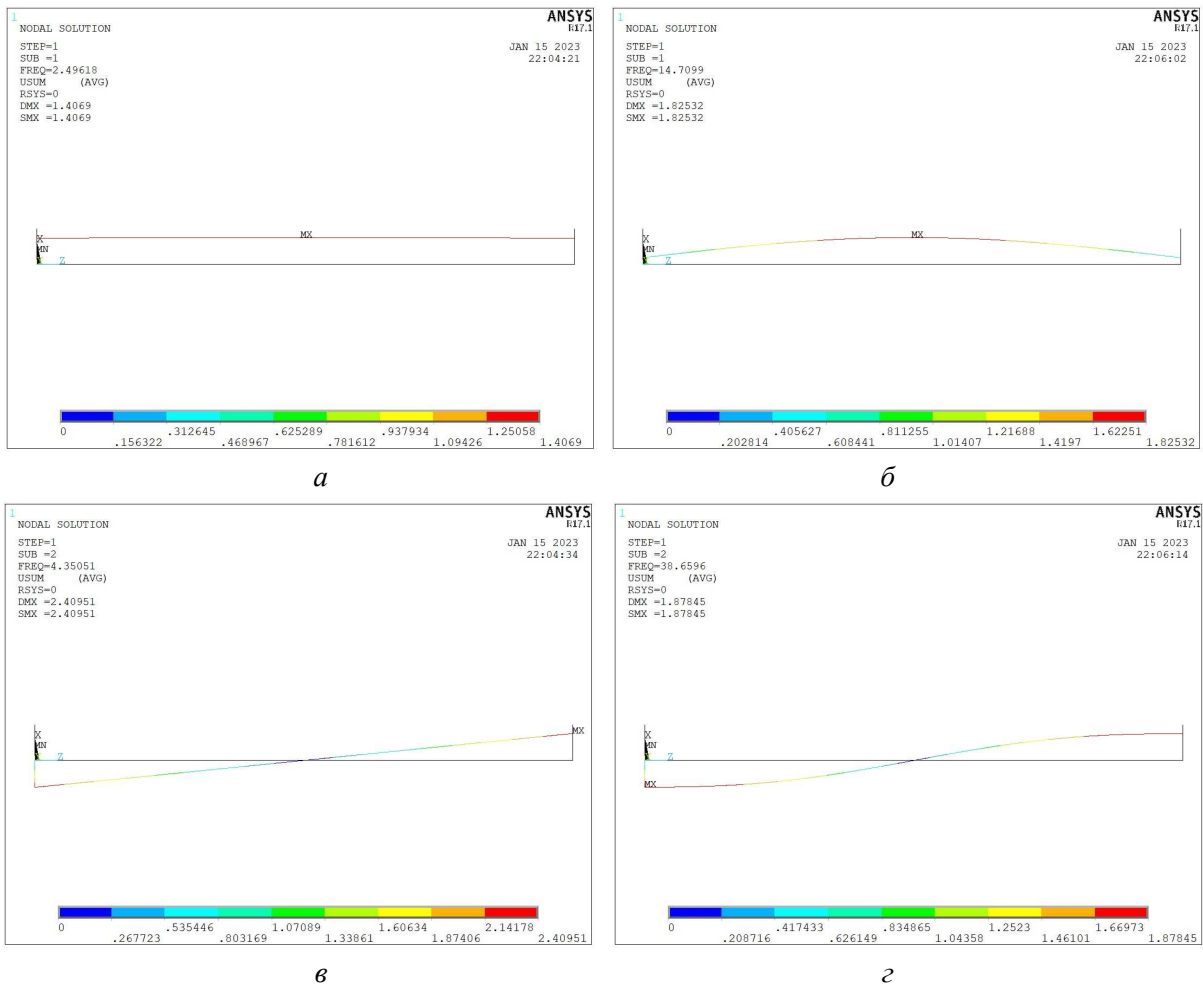


Рис. 4 Примеры расчета поперечных колебаний балки:

- а) первая форма колебаний при  $C_1=C_2=1$  б) первая форма колебаний при  $C_1=C_2=100$ ;  
 в) вторая форма колебаний при  $C_1=C_2=1$  г) вторая форма колебаний при  $C_1=C_2=100$

Предложенный подход можно применять для аппроксимации коэффициентов опор при других видах колебаний и способах закреплений с учетом их жесткости не только для задач колебаний балки, но и, например, потери устойчивости. Простой аналитический вид предлагаемого решения позволяет легко оценивать взаимовлияние различных параметров на



решение и вносить необходимые изменения в исследуемую конструкцию. Увеличение степени аппроксимирующих функций или ее замена на другой вид может позволить аппроксимировать больший диапазон жесткостей и снизить погрешность аппроксимации, однако значительно усложнит вычисления.

### **Заключение**

В работе выполнен расчет значений коэффициентов опор при поперечных свободных колебаниях балки для различных вариантов сочетаний жесткостей опор для первой и второй собственных частот. По полученным результатам выполнена аппроксимация значений квадратичными функциями методом наименьших квадратов. Выбранные аппроксимирующие функции позволяют решать прямую и обратную задачи, то есть определять коэффициент опор балки при заданных величинах жесткостей опор и находить требуемую жесткость опор балки для заданного значения первой или второй собственной частоты колебаний. Исследование погрешности аппроксимации показало, что отклонения не превышают 3,5% при использовании жесткости опор одного порядка.

**Финансирование.** Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, Правительства Красноярского края и Красноярского краевого фонда науки в рамках научного проекта № 2022110209008.

### **Список литературы**

1. Бабаков И.М. Теория колебаний. – М.: Дрофа, 2004. – 591 с.
2. Ильин М.М., Колесников К.С., Саратов Ю.С. Теория колебаний. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. – 272 с.
3. Журавлев В.Ф., Климов Д.М. Прикладные методы в теории колебаний. – М.: Наука, 1988. – 328 с.
4. Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. – М.: Машиностроение, 1985. – 472 с.
5. Пановко Я. Г. Введение в теорию механических колебаний. – М.: Наука, 1991. – 256 с.
6. Яблонский А.А., Норейко С.С. Курс теории колебаний. – СПб.: Лань, 2003. – 254 с.
7. Доев В.С. Поперечные колебания балок. – М.: КНОРУС, 2016. – 412 с.
8. Venaroua H., Nagurka M., Han S. Mechanical vibration. – London: CRC Press, 2017. – 602 p.
9. Geradin M., Rixen D. J. Mechanical vibrations. – London: John Wiley & Sons, 2015. – 617 p.
10. Inman D.J. Engineering vibration. – NJ: Pearson Education, 2014. – 720 p.
11. Jazar R.N. Advanced vibrations. A modern approach. – NY: Springer, 2013. – 695 p.
12. Rades M. Mechanical vibrations II. Structural dynamic modeling. – Turin: Printech Publisher, 2010. – 354 p.
13. Rao S. Mechanical vibrations. – London: Pearson Education Limited, 2018. – 1295 p.
14. Shabana A.S. Theory of vibration. – New York: Springer-Verlag, 2019. – 382 p.
15. Биргер И.А., Пановко Я.Г. Прочность, устойчивость, колебания. Т. 3. – М.: Машиностроение, 1988. – 567 с.
16. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний. – М.: Высшая школа, 1980. – 408 с.
17. Корнев Б.Г. Справочник по динамике сооружений. – М.: Стройиздат, 1972. – 511 с.
18. Уманский А.А. Справочник проектировщика. Т. 2. – М.: Стройиздат, 1973. – 415 с.
19. Blevins R.D. Formulas for dynamics, acoustics and vibration. – Chichester: John Wiley & Sons, Ltd, 2016. – 458 p.
20. Hibbeler R.C. Free vibration of a beam supported by unsymmetrical spring-hinges // J. Appl. Mech. 1975, vol. 42(2), pp. 501-502. DOI: 10.1115/1.3423612.
21. Lin Y.K. Free vibration of a continuous beam on elastic supports // International Journal of Mechanical Sciences. 1962, vol. 4, pp. 409-423.
22. Luo J., Zhu S., Zhai W. Exact closed-form solution for free vibration of Euler-Bernoulli and Timoshenko beams with intermediate elastic supports // International Journal of Mechanical Sciences. 2022, vol. 213, pp. 106842. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2021.106842.
23. Богомолов С.И. Оптимизация механических систем в резонансных режимах. – Киев: Вища школа, 1983. – 153 с.
24. Кудрявцев И.В., Рабецкая О.И., Митяев А.Е. Аппроксимация значений коэффициентов опор балки при колебаниях и потери устойчивости // Сибирский аэрокосмический журнал. – 2022. – Т. 23, №3. – С.461-474. – DOI: 10.31772/2712-8970-2022-23-3-461-474.
25. Дрейпер Н., Смит Г. Прикладной регрессионный анализ. – М.: Вильямс, 2016. – 912 с.

### **References**

1. Babakov I.M. Theory of vibrations. – M.: Drofa, 2004. – 591 p.
2. Il'in M.M., Kolesnikov K.S., Saratov Yu.S. Theory of vibrations. – M.: MSTU n.a. N.E. Bauman, 2001. – 272 p.
3. Zhuravlev V.F., Klimov D.M. Applied methods in vibration theory. – M.: Science, 1988. – 328 p.
4. Timoshenko S.P., Yang D.Kh., Uiver U. Vibrations in Engineering. – M.: Mechanical Engineering, 1985. – 472 p.

5. Panovko Ya.G. Introduction to the theory of mechanical Vibrations. – M.: Science, 1991. – 256 p.
6. Yablonskiy A.A., Noreyko S.S. Oscillation theory course. – SPb.: Lan, 2003. – 254 p.
7. Doev V.S. Transverse vibrations of beams. – M.: KNORUS, 2016. – 412 p.
8. Benaroya H., Nagurka M., Han S. Mechanical vibration. – London: CRC Press, 2017. – 602 p.
9. Geradin M., Rixen D. J. Mechanical vibrations. – London: John Wiley & Sons, 2015. – 617 p.
10. Inman D.J. Engineering vibration. – NJ: Pearson Education, 2014. – 720 p.
11. Jazar R.N. Advanced vibrations. A modern approach. – NY: Springer, 2013. – 695 p.
12. Rades M. Mechanical vibrations II. Structural dynamic modeling. – Turin: Printech Publisher, 2010. – 354 p.
13. Rao S. Mechanical vibrations. – London: Pearson Education Limited, 2018. – 1295 p.
14. Shabana A.S. Theory of vibration. – New York: Springer-Verlag, 2019. – 382 p.
15. Birger I.A., Panovko Ya.G. Strength, stability, vibrations. Vol. 3. – M.: Mechanical Engineering, 1988. – 567 p.
16. Biderman V.L. Theory of mechanical vibrations. – M.: Higher school, 1980. – 408 p.
17. Korenev B.G. Structure dynamics guide. – M.: Stroyizdat, 1972. – 511 p.
18. Umanskiy A.A. Designer's Handbook. Vol. 2. – M.: Stroyizdat Publ., 1973. – 415 p.
19. Blevins R.D. Formulas for dynamics, acoustics and vibration. – Chichester: John Wiley & Sons, Ltd, 2016. – 458 p.
20. Hibbeler R.C. Free vibration of a beam supported by unsymmetrical spring-hinges // J. Appl. Mech. 1975, vol. 42(2), pp. 501-502. DOI: 10.1115/1.3423612.
21. Lin Y.K. Free vibration of a continuous beam on elastic supports // International Journal of Mechanical Sciences. 1962, vol. 4, pp. 409-423.
22. Luo J., Zhu S., Zhai W. Exact closed-form solution for free vibration of Euler-Bernoulli and Timoshenko beams with intermediate elastic supports // International Journal of Mechanical Sciences. 2022, vol. 213, pp. 106842. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2021.106842.
23. Bogomolov S.I. Optimization of mechanical systems in resonant modes. – Kyiv: Vishchi school, 1983. – 153 p.
24. Kudryavtsev I.V., Rabetskaya O.I., Mityaev A.E. Approximation of beam support coefficient values at vibrations and buckling // Siberian Aerospace Journal. 2022, vol. 23, no. 3, pp. 461-474. DOI: 10.31772/2712-8970-2022-23-3-461-474.
25. Dreyper N., Smit G. Applied regression analysis. – M.: Williams, 2016. – 912 p.

*Сведения об авторах:*

*Information about authors:*

<b>Кудрявцев Илья Владимирович</b> – кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной механики	<b>Kudryavtsev Ilya Vladimirovich</b> – candidate of technical sciences, assistant professor of the Department of applied mechanics
<b>Малыхина Любовь Константиновна</b> – магистрант	<b>Malykhina Lyubov Konstantinovna</b> – student
<b>Рабецкая Ольга Ивановна</b> – кандидат технических наук, доцент кафедры технической механики	<b>Rabetskaya Olga Ivanovna</b> – candidate of technical sciences, assistant professor of the Department of technical mechanics
<b>Швец Дмитрий Александрович</b> – кандидат технических наук, доцент кафедры вычислительной техники	<b>Shvets Dmitry Alexandrovich</b> – candidate of technical sciences, assistant professor of the Department of computer engineering
<b>Митяев Александр Евгеньевич</b> – кандидат технических наук, заведующий кафедрой прикладной механики	<b>Mityaev Alexander Evgenievich</b> – candidate of technical sciences, head of the Department of applied mechanics
olga_rabez@mail.ru	

Получена 30.01.2023