

УДК 62.752, 621:534;833; 888.6, 629.4.015;02 <https://doi.org/10.26160/2658-3305-2023-18-9-16>

## ПРИЛОЖЕНИЯ СТРУКТУРНОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРИ ОЦЕНКЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

*Корнеев С.В.<sup>1</sup>, Большаков Р.С.<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>*Омский государственный технический университет, Омск;*

<sup>2</sup>*Иркутский государственный университет путей сообщения, Иркутск*

**Ключевые слова:** динамическое состояние, вибрационная технологическая машина, структурное математическое моделирование, динамическое реакции связей.

**Аннотация.** Рассматриваются приложения структурной теории виброзащитных систем для оценки результатов натуральных экспериментов. Показаны особенности влияния дополнительных элементов на динамическое состояние вибрационного стенда и испытательного технологического оборудования. Оцениваются возможности использования структурного математического моделирования при анализе результатов экспериментов. Применение структурного математического моделирования для анализа динамического состояния технических объектов позволяет оценивать полученные результаты экспериментов при помощи математического аппарата теории автоматического управления. Это позволяет формировать математические модели изменения динамических свойств исследуемых объектов, представляющие собой передаточные функции, для оценки сходимости результатов теоретических и экспериментальных исследований в области линейных колебаний с учетом гармонических воздействий. В рамках структурного математического моделирования исходной расчётной схеме технического объекта в виде механической колебательной системы сопоставляется эквивалентная в динамическом отношении структурная схема автоматического управления, что делает возможным использование аппарата теории автоматического управления при оценке динамических свойств рассматриваемых технологических машин. К нему можно отнести передаточные функции, возможности анализа и синтеза, частотные характеристики и др. В качестве дополнительного элемента, включенного в структуру технологического оборудования, в первом случае взят динамический гаситель колебаний, а во втором изменяется соотношение массо-инерционных параметров. Управление параметрами осуществляется за счёт изменения значений жесткостей пружин и масс. Проведенный анализ показывает, что применение структурных подходов при оценке результатов экспериментов подтверждает теоретические положения, полученные в результате построения математических моделей на основе аппарата теории автоматического управления.

## APPLICATIONS OF STRUCTURAL MATHEMATICAL MODELING IN EVALUATING THE RESULTS OF EXPERIMENTAL STUDIES

*Korneev S.V.<sup>1</sup>, Bolshakov R.S.<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>*Omsk State Technical University, Omsk;*

<sup>2</sup>*Irkutsk State Transport University, Irkutsk*

**Keywords:** dynamic condition, vibrational technological machine, structural mathematical modeling, dynamic reaction of ties.

**Abstract.** Applications of the structural theory of vibration protection systems for evaluating the results of full-scale experiments are considered. The features of the influence of additional elements on the dynamic condition of the vibration stand and test technological equipment are shown. The possibilities of using structural mathematical modeling in the analysis of experimental results are evaluated. The use of structural mathematical modeling for the analysis of the dynamic condition of technical objects makes it possible to evaluate the results of experiments using the mathematical apparatus of the theory of automatic control. This allows one to form mathematical models of changes in the dynamic properties of the objects under study, which are transfer functions, to assess the convergence of the results of theoretical and experimental researches in the field of linear oscillations, taking into account harmonic effects. Within the framework of structural mathematical modeling, the initial design scheme of a technical object in the form of a mechanical oscillatory system is compared with a dynamically equivalent structural scheme of automatic control, which makes it possible to use the apparatus of automatic control theory in assessing the dynamic properties of the considered technological machines. As an additional element included in the structure of technological equipment, in the first case, a dynamic vibration damper is taken, and in the second, the ratio of mass-inertial parameters is changed. The parameters are controlled by changing the values of spring stiffness's and masses. The analysis performed shows that the use of structural approaches in evaluating the results of experiments confirms the theoretical positions obtained as a result of constructing mathematical models based on the apparatus of the theory of automatic control.

## Введение

Технологическое оборудование, используемое при реализации промышленных производств, в процессе эксплуатации подвержено воздействию интенсивного динамического нагружения. Это негативно влияет на надежность и долговечность деталей и узлов, входящих в состав машин, приборов и аппаратуры. Для уменьшения влияния различных отрицательных факторов необходимо формирование способов и средств контроля и управления динамическим состоянием технологического оборудования, что нашло отражение в [1-5].

К негативным факторам можно отнести влияние вибрационных процессов, которые провоцируют возникновение излишних соударений, биений, зазоров и т.д. В этом случае необходимо создание конструктивно-технических решений, предназначенных для минимизации действия этих причин на функционирование технологического оборудования [6-8]. Также необходимо отметить важность учета и контроля сил трения при эксплуатации технологических машин [9-10].

Проверка теоретических положений созданных подходов к оценке динамического состояния технологического оборудования требует проведения экспериментальных исследований. В частности, структурная теория виброзащитных систем позволяет с достаточной сходимостью результатов оценивать динамические свойства вибрационных технологических машин [11-12].

В предлагаемой статье рассматриваются результаты экспериментов по оценке свойств вибрационного технологического оборудования различного назначения.

## Материалы и методы исследований

Технические объекты различного назначения, в том числе высокотехнологичное оборудование, требуют учета большого количества условий, влияющих на их динамические свойства [3, 5, 9, 10]. Для проведения корректной оценки требуется формирование адекватных абстрактных моделей технологического оборудования, к примеру, при использовании расчетных схем в виде механических колебательных систем с различным числом степеней свободы. Для детализированной оценки динамических свойств таких технических объектов может использоваться структурное математическое моделирование, когда исходной расчётной схеме в виде механической колебательной системы (рис. 1,а) сопоставляется динамический аналог в виде структурной схемы системы автоматического управления (рис. 1, б) [5]. В данном случае механическая колебательная система с двумя степенями в системе координат  $y_0$ ,  $y$  свободы содержит объект защиты  $M$ , промежуточную массу  $m$ , упругие элементы  $k$ ,  $k_{01}$ ,  $k_{02}$ .

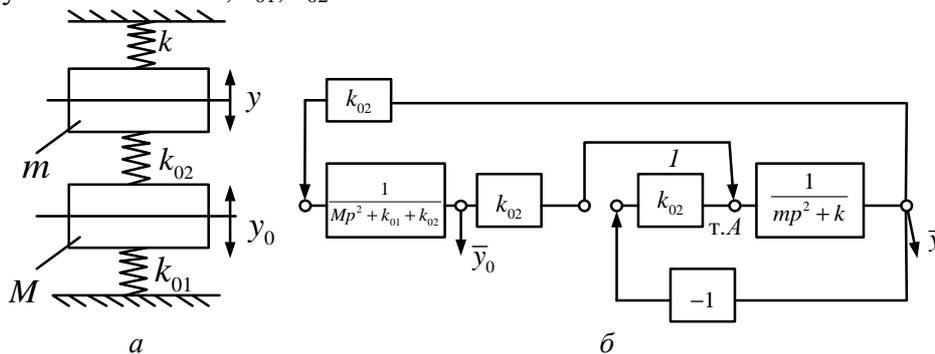


Рис. 1. Расчетная (а) и структурная (б) схемы технического объекта

Структурная схема сформирована на основе уравнений движения системы в операторной форме, полученных с использованием преобразований Лапласа при нулевых начальных условиях с учетом малых колебаний и положения статического равновесия [5]. Переменная  $p = j\omega$  является комплексной. Использование структурных подходов позволяет производить детализированную оценку динамических связей, возникающих между элементами системы.

Целью исследования является оценка возможностей структурного математического моделирования при анализе результатов натуральных экспериментов.

### Результаты

1. На примере виброзащитной системы с динамическим гасителем колебаний ( $M = 1,5$  кг,  $m = 0,2 + 0,7$  кг (через  $0,1$  кг), жесткость пружины  $k = 850$  Н/м;  $i = 2$  (передаточное отношение рычага)) в виде рычажного механизма второго рода рассматривается применение структурной теории виброзащитных систем для оценки динамического состояния экспериментального стенда, в качестве которого использовался электродинамический вибростенд С-004. Для оценки динамического состояния экспериментального стенда применялась следующая аппаратура: виброизмерительный комплект «Атлант-8», датчики ВК-310А в диапазоне  $0,1-20$  Гц, оптический измерительный микроскоп и лупа Брюнелля. Для проведения экспериментов был изготовлен лабораторный макет, содержащий объект защиты  $M$ , рычажный механизм с опорами вращения, упругий элемент  $k$ , дополнительную массу  $m$ . Принципиальная схема представлена на рисунке 2, на котором обозначено: 1 – датчик выхода, 2 – датчик входа,  $z$  – координата входа,  $y$  – координата выхода.

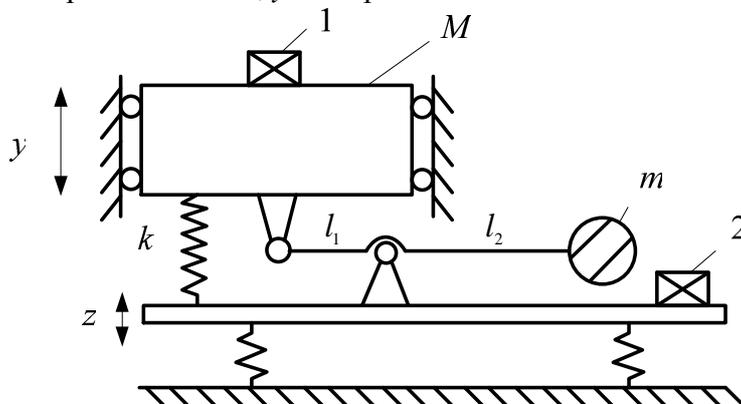


Рис. 2. Принципиальная схема экспериментального стенда

Анализ основных свойств колебательных процессов экспериментальной установки показывает гармоническую природу возмущающего воздействия в первом приближении, что позволяет применить теоретические подходы, характерные для структурного математического моделирования, для оценки динамического состояния вибрационного экспериментального стенда с учетом малых колебаний относительно положения статического равновесия и гармонической природы внешней возмущающей силы [11, 12].

Для сопоставления результатов эксперимента с теоретическими результатами построена расчетная схема виброзащитной системы с динамическим гасителем, где приведены следующие обозначения: объект защиты  $M$  соединён с опорной поверхностью  $z$  через упругий элемент  $k$ , а с динамическим гасителем колебаний в виде дополнительной массы  $m$  через рычажный механизм с длинами плеч  $l_1$  и  $l_2$  в неподвижной системе координат  $y$  и  $y_1$ . После построения выражений для нахождения кинетической и потенциальной энергии системы с последующим получением выражений для оценки движения системы при помощи уравнений Лагранжа 2-ого рода, а также с учетом дополнительных соотношений, может быть сформировано уравнение движения системы в операторной форме при использовании преобразований Лапласа. Полученное выражение позволяет получить динамический аналог исходной расчётной схемы в виде структурной схемы системы автоматического управления (рис. 3,б) [5, 11, 12].

Передаточная функция системы может быть определена из структурной схемы [5, 11, 12] (рис. 3,б)

$$W(p) = \frac{\bar{y}}{\bar{z}} = \frac{mi(i+1)p^2 + k}{(M + mi^2)p^2 + k}, \quad (1)$$

где  $i$  – передаточное отношение рычага,  $p = j\omega$  – комплексная переменная.

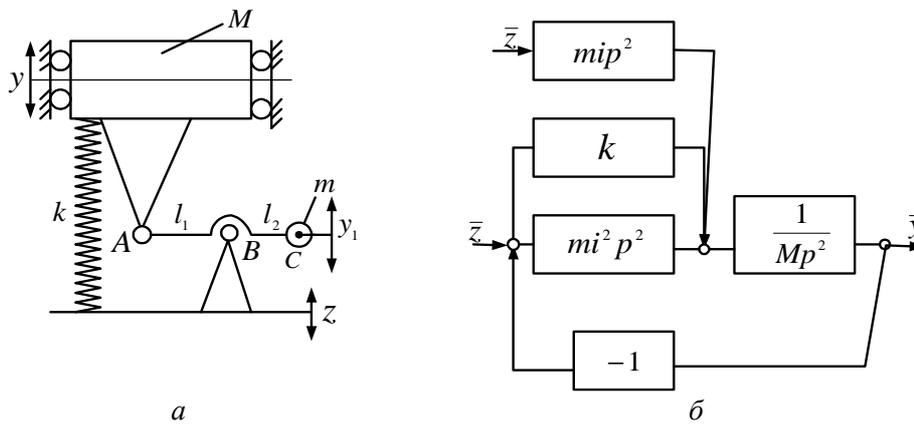


Рис. 3. Расчетная (а) и структурная (б) схемы виброзащитной системы с рычажным гасителем

2. Рассматривается динамическое состояние вибрационной технологической машины для испытания образцов вертолетных лопастей (рис. 4). Перемещения подвижного блока  $m_0$  2 ограничены при помощи балки 1 и троса 3 для обеспечения его вертикального положения. Трос также снабжен устройством натяжения. У балки имеется возможность поворота в шарнире и горизонтального смещения относительно оси  $x$ . Подвижный блок  $m_0$  снабжен дополнительными массами  $m$  и соединен с балкой и тросом в точках  $B$  и  $C$ . Балка и трос крепятся к опорам в точках  $A$  и  $D$ .

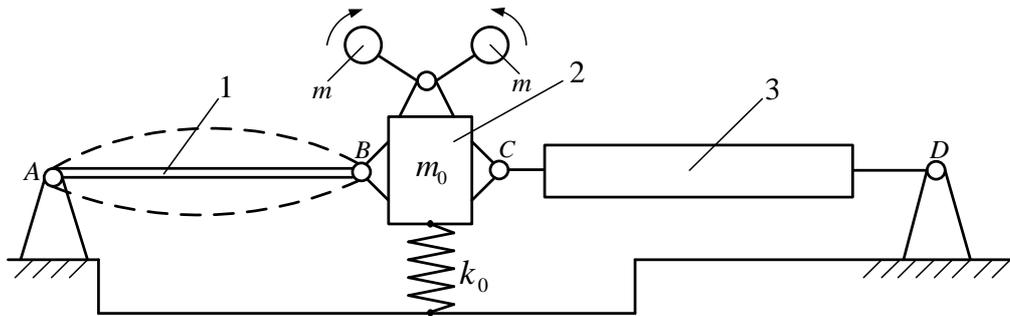


Рис. 4. Принципиальная схема упругой балки

Испытательное оборудование, состоящее из перечисленных частей, является струнной структурой с возможностью изменения силы натяжения [13, 14].

Исходная расчетная схема рассматривается в рамках плоской системы координат и может быть преобразована к системе с двумя степенями для оценки её динамических особенностей к виду, как показано на рисунке 5.

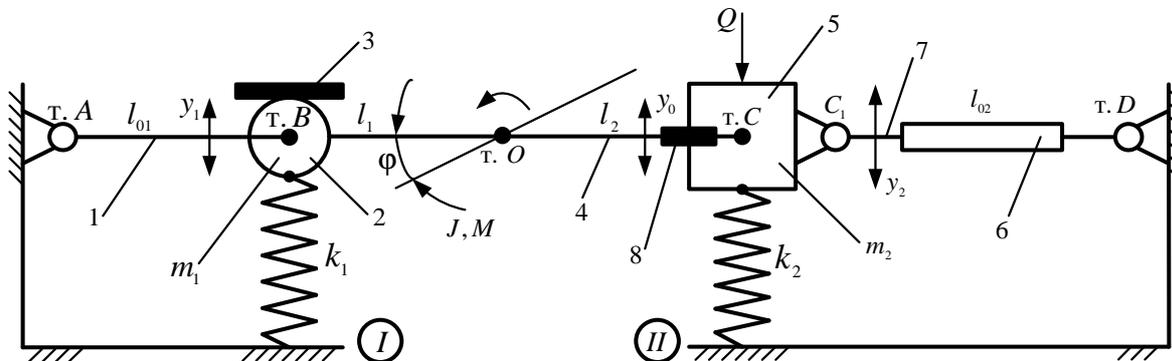


Рис. 5. Преобразованная расчетная схема

Испытательный вибрационный стенд содержит: 1 – стержень, 2 – подвижный блок, 3 – рабочая поверхность для виброупрочнения, 4 – рычажный механизм, 5 – вибровозбудитель, 6 – трос вертикального движения рабочего тела, 7 – устройство натяжения, 8 – устройство для компенсации продольных составляющих колебаний стержня 2,

твердое тело  $M$ ,  $J$  сосредоточенные массы  $m_1$  и  $m_2$ , упругие элементы  $k_1$  и  $k_2$ , плечи рычажного механизма второго рода  $l_1$  и  $l_2$ . Применяемые системы координат:  $y_1, y_2$  и  $y_0$  и  $\varphi$  [5, 11, 13, 14]. Предполагается, что центр колебаний не лежит на прямой  $BC$ , а точка  $O$  находится на перпендикуляре к прямой  $BC$ . В связи с этим  $M = m_1 + m_2$ , но  $J \neq m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2$ .

При расчетах используются кинематические соотношения:

$$y_0 = ay_1 + by_2; \varphi = c \cdot (y_2 - y_1); y_1 = y_0 - l_1 \varphi; y_2 = y_0 + l_2 \varphi; \quad (2)$$

$$a = \frac{l_2}{l_1 + l_2}; b = \frac{l_1}{l_1 + l_2}; c = \frac{1}{l_1 + l_2}.$$

После формирования выражений для кинетической и потенциальной энергий, получим уравнения движения системы в координатах  $y_1$  и  $y_2$  [5, 11, 13, 14]:

$$\bar{y}_1 \cdot [(Ma^2 + Jc^2)p^2 + k_1] + \bar{y}_2 \cdot (Mab - Jc^2)p^2 = 0; \quad (3)$$

$$\bar{y}_2 \cdot [(Mb^2 + Jc^2)p^2 + k_2] + \bar{y}_1 \cdot (Mab - Jc^2)p^2 = \bar{Q}_2. \quad (4)$$

Запишем передаточные функции системы

$$W_1(p) = \frac{\bar{y}_1}{\bar{Q}_2} = \frac{(Jc^2 - Mab)p^2}{A}; \quad (5) \quad W_2(p) = \frac{\bar{y}_2}{\bar{Q}_2} = \frac{(Ma^2 + Jc^2)p^2 + k_1}{A}; \quad (6)$$

где  $A = [(Ma^2 + Jc^2)p^2 + k_1] \cdot [(Mb^2 + Jc^2)p^2 + k_2] - (Jc^2 - Mab)^2 p^4 -$  частотное уравнение. (7)

После трансформации  $(Ma^2 + Jc^2)p^2 = (Ma^2 + Mab + Jc^2 - Mab)p^2 = [Ma + (Jc^2 - Mab)] \cdot p^2$ , а также  $(Mb^2 + Jc^2)p^2 = [Mb + (Jc^2 - Mab)] \cdot p^2$  получим структурную схему системы (рис. 6).

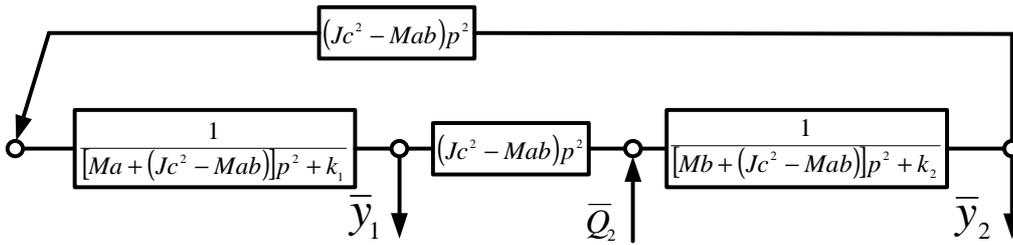


Рис. 6. Структурная схема вибростенда

Для вибростенда характерно то, что связь между парциальными системами имеет инерционный тип. Межпарциальная связь  $\bar{y}_1 / \bar{y}_2$  в операторном виде может быть получена из структурной схемы (рис. 10) и при входном воздействии  $Q$ , приложенном к элементу  $m_2$ , определяется выражением

$$W_{12}(p) = \frac{\bar{y}_1}{\bar{y}_2} = \frac{(Jc^2 - Mab)p^2}{[Ma + (Jc^2 - Mab)]p^2 + k_1}, \quad (8)$$

где  $p = j\omega$  – комплексная переменная, значок  $(-)$  над переменной соответствует изображению по Лапласу [5].

## Выводы

**1.** Полученная передаточная функция позволяет получить амплитудно-частотные характеристики при различных значениях параметров системы, а частности, при изменении массы динамического гасителя колебаний [12] с целью сравнение теоретических и экспериментальных результатов (рис). На рисунке 7 приведены примеры оформления результатов эксперимента.

Таким образом, полученная математическая модель системы в виде передаточной функции позволяет получить амплитудно-частотные характеристики в достаточной мере сходные с экспериментальными результатами. В частности, на низких частотах от 0,1 до 20 Гц точность совпадения теоретических результатов с экспериментальными находится в пределах 10-12%.

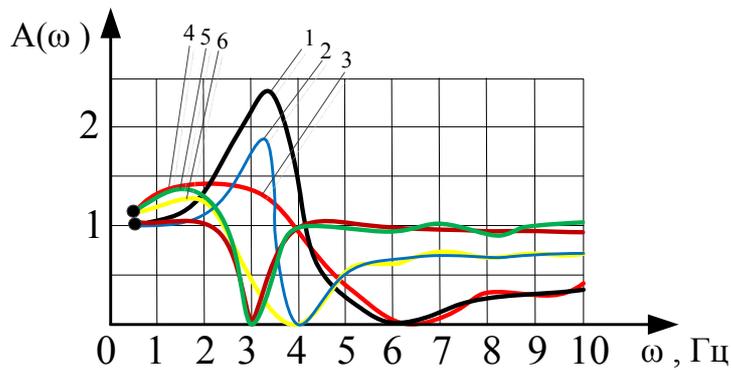


Рис. 7. Сопоставление результатов эксперимента с вычислительным моделированием:  
 1 – теоретические расчёты, 2 – результаты эксперимента при  $m = 0,2$  кг;  
 3 – теоретические расчёты, 4 – результаты эксперимента при  $m = 0,2$  кг, при  $m = 0,4$  кг;  
 5 – теоретические расчёты, 6 – результаты эксперимента при  $m = 0,7$  кг

2. График  $\bar{y}_1 / \bar{y}_2(\omega)$  на рисунке 8,а в диапазоне изменения частоты внешнего воздействия от 0 до  $\omega_{\text{дин}}$  имеет отрицательное значение; после перехода  $\omega = \omega_{\text{дин}}$ , отношение  $y_1/y_2$  становится положительным и стремится при  $\omega \rightarrow \infty$  к пределу, определяемому выражением

$$W_{12}(p) = \frac{\bar{y}_1}{\bar{y}_2} = \frac{Jc^2 - Mab}{Ma + (Jc^2 - Mab)} < 1. \quad (9)$$

На рисунке 8,б приведены графики  $y_1(\omega)$  и  $y_2(\omega)$  при возбуждении по координате  $y_2$  и выполнении условия  $Jc^2 - Mab > 0$  (1 – зависимость  $y_1(\omega)$ ; 2 – зависимость  $y_2(\omega)$  при  $k_1 = 400000$  Н/м;  $k_2 = 1200000$  Н/м;  $a = 0,1$ ;  $b = 0,9$ ;  $R = 4$ ).

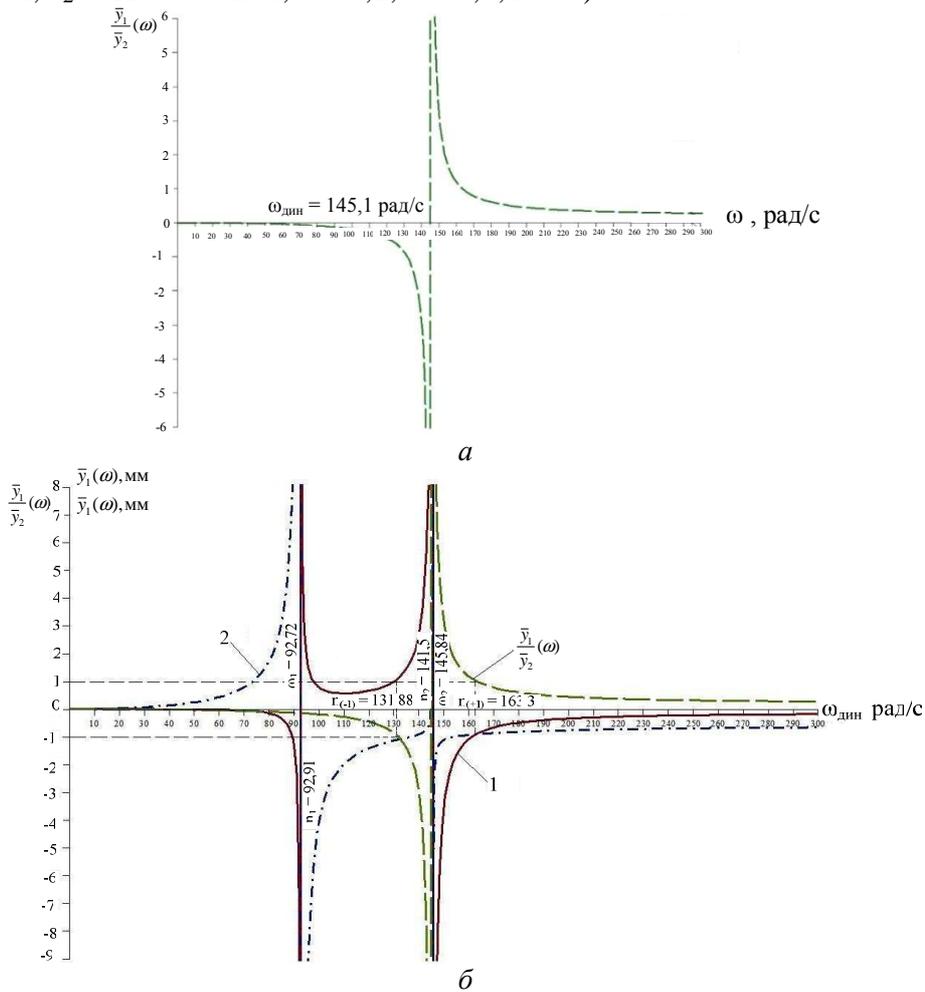


Рис. 8. График зависимости  $\bar{y}_1 / \bar{y}_2$  от частоты  $\omega$  – а; графики зависимостей амплитуд колебаний вибростенда от частоты внешнего воздействия  $\omega$  – б

Точность полученных результатов при использовании структурного математического моделирования по оценке частот колебаний системы в стационарном режиме ( $\approx 30$  Гц) и амплитудах колебаний обеспечивается в пределах 5-7%, что соответствует техническим регламентам эксплуатации комплекса [13, 14].

### **Заключение**

Таким образом, подходы, основанные на структурной теории виброзащитных систем, позволяют создавать математические модели технических объектов с учетом дополнительных связей. При помощи рассматриваемой методики может производиться детализированная оценка динамического состояния технологического оборудования с различным набором параметров составляющих элементов. Дополнительные связи в виде рычажных механизмов дают возможность для получения режимов динамического гашения. Используемые подходы позволяют строить математические модели виброзащитных систем с несколькими степенями свободы. Оценка результатов натурного эксперимента показывает их сходимость с теоретическими выкладками, полученными в рамках структурного математического моделирования.

Показано, что наличие дополнительных элементов позволяет получать необходимые технологические режимы эксплуатации вибрационных стендов за счёт управления параметрами упругих и рычажных связей. Наличие рычажных механизмов и дополнительных масс в этом случае определяет возможности корректировки приведённой жесткости системы. Рассматривается применение структурной теории виброзащитных систем при построении математических моделей вибрационных технологических машин и оценка экспериментальных результатов оценки их изменения их динамического состояния.

### **Список литературы**

1. Фролов К.В., Фурман Ф.А. Прикладная теория виброзащитных систем. – М.: Машиностроение, 1985. – 286 с.
2. Махутов Н.А. Прочность и безопасность: фундаментальные и прикладные исследования. – Новосибирск: Наука, 2008. – 528 с.
3. Пановко Г.Я. Динамика вибрационных технологических процессов: монография. – М. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2006. – 176 с.
4. Бабичев А.П., Бабичев И.А. Основы вибрационной технологии. – Изд. 2-е, перераб. и доп. – Ростов-на-Дону: Изд. центр ДГТУ, 2008. – 693 с.
5. Елисеев С.В. Прикладной системный анализ и структурное математическое моделирование (динамика транспортных и технологических машин: связность движений, вибрационные взаимодействия, рычажные связи): монография – Иркутск: ИрГУПС, 2018. – 692 с.
6. Копылов Ю.Р. Динамика процессов виброударного упрочнения: монография. – Воронеж: Научная книга, 2011. – 569 с.
7. Елисеев С.В., Елисеев А.В., Большаков Р.С., Хоменко А.П. Методология системного анализа в задачах оценки, формирования и управления динамическим состоянием технологических и транспортных машин. – Новосибирск: Наука, 2021. – 679 с.
8. Большаков Р.С. Особенности вибрационных состояний транспортных и технологических машин. Динамические реакции и формы взаимодействия элементов. – Новосибирск: Наука, 2020. – 411 с.
9. Машков Ю.К. Трибофизика металлов и полимеров. – Омск: Омский государственный технический университет, 2013. – 240 с.
10. Корнеев С.В., Ярмович Я.В., Буравкин Р.В. Совершенствование эксплуатации дробильно-размольного оборудования // Журнал Сибирского федерального университета. Серия: Техника и технологии. – 2017. – Т. 10, № 7. – С. 922-931. – DOI: 10.17516/1999-494X-2017-10-7-922-931.
11. Елисеев С.В., Трофимов А.Н., Большаков Р.С., Савченко А.А. Концепция обратной связи в динамике механических систем и динамическое гашение колебаний // Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 2012. – №5. – С. 25. – DOI: 10.7463/0512.0378353.
12. Трофимов А.Н. Концепция обратной связи в динамике механических систем и процессы динамического гашения колебаний: дисс. ... канд. техн. наук. – Иркутск, 2012. – 169 с.
13. Каимов Е.В. Рычажные связи и механизмы во взаимодействиях элементов машин и оборудования при вибрационных внешних возмущениях: дисс. ... канд. техн. наук. – Братск, 2016. – 190 с.
14. Каимов Е.В., Вьонг К.Ч., Пнев А.Г. Вибростенд с возможностями использования рабочего органа в режиме динамического гасителя колебаний // III Международная Школа-конференция молодых ученых "Нелинейная динамика машин" - School-NDM 2016: Сборник трудов. – М.: Институт машиноведения им. А.А. Благонравова Российской академии наук, 2016. – С. 154-162.

## References

1. Frolov K.V., Furman F.A. Applied theory of vibration protection systems. – M.: Mechanical Engineering, 1985. – 286 p.
2. Makhutov N.A. Strength and safety: fundamental and applied research. – Novosibirsk: Science, 2008. – 528 p.
3. Panovko G.Ya. Dynamics of vibrational technological processes: monograph. – M. – Izhevsk: Research Center "Regular and Chaotic Dynamics", Institute of Computer Research, 2006. – 176 p.
4. Babichev A.P., Babichev I.A. Fundamentals of vibration technology. – Ed. 2nd, revised and additional. – Rostov-on-Don: Publ. center of DSTU, 2008. – 693 p.
5. Eliseev S.V. Applied system analysis and structural mathematical modeling (dynamics of transport and technological machines: connectedness of movements, vibrational interactions, lever connections): monograph. – Irkutsk: IrGUPS, 2018. – 692 p.
6. Kopylov Yu.R. Dynamics of processes of vibro-impact hardening: monograph. – Voronezh: Science book, 2011. – 569 p.
7. Eliseev S.V., Eliseev A.V., Bolshakov R.S., Khomenko A.P. Methodology of system analysis in the problems of evaluation, formation and control of the dynamic state of technological and transport machines. – Novosibirsk: Science, 2021. – 679 p.
8. Bol'shakov R.S. Features of vibration states of transport and technological machines Dynamic reactions and forms of interaction of elements. – Novosibirsk: Science, 2020. – 411 p.
9. Mashkov Yu.K. Tribophysics of metals and polymers. – Omsk: Omsk State Technical University, 2013. – 240 p.
10. Korneev S.V., Yarmovich Ya.V., Buravkin R.V. Improving the operation of crushing and grinding equipment // Journal of the Siberian Federal University. Series: Technics and technologies. 2017, vol. 10, no. 7, pp. 922-931. DOI: 10.17516/1999-494X-2017-10-7-922-931.
11. Eliseev S.V., Trofimov A.N., Bolshakov R.S., Savchenko A.A. The concept of feedback in the dynamics of mechanical systems and dynamic damping of oscillations // Science and education: scientific edition of the Moscow State Technical University. N.E. Bauman. 2012, no. 5, p. 25. DOI: 10.7463/0512.0378353.
12. Trofimov A.N. The concept of feedback in the dynamics of mechanical systems and the processes of dynamic damping of oscillations: diss. ... cand. of tech. sc. – Irkutsk, 2012. – 169 p.
13. Kaimov E.V. Lever connections and mechanisms in the interactions of machine and equipment elements under vibrational external disturbances: diss. ... cand. of tech. sc. – Bratsk, 2016. – 190 p.
14. Kaimov E.V., Vyong K.Ch., Pnev A.G. Vibrostand with the possibility of using the working body in the mode of a dynamic vibration damper // III International School-Conference of Young Scientists "Nonlinear dynamics of machines" - School-NDM 2016: Proceedings. – M.: Institute of Mechanical Engineering n.a. A.A. Blagonravov of the Russian Academy of Sciences, 2016. – P. 154-162.

### *Сведения об авторах:*

### *Information about authors:*

<b>Корнеев Сергей Васильевич</b> – доктор технических наук, профессор, профессор кафедры «Химия и химическая технология»	<b>Korneev Sergey Vasilievich</b> – doctor of technical sciences, professor, professor of Department «Chemistry and chemical technology»
<b>Большаков Роман Сергеевич</b> – кандидат технических наук, доцент кафедры «Управление эксплуатационной работой»	<b>Bolshakov Roman Sergeevich</b> – candidate of technical sciences, associate professor of Department «Control of operational work»
bolshakov_rs@mail.ru	

Получена 26.01.2023