

## ПРОДОЛЬНАЯ ДИНАМИКА АВТОПОЕЗДОВ ПРИ ТОРМОЖЕНИИ

*Поляков П.А.*

*Кубанский государственный технологический университет, Краснодар*

**Ключевые слова:** торможение, продольная динамика, автопоезд, тягач, прицеп, полуприцеп.

**Аннотация.** Проведенный обзор литературных источников показал, что до настоящего времени не создана математическая модель продольной динамики автопоездов в режиме торможения. Данная модель является основой созданием адаптивной системы торможения, что предопределяет создание алгоритма ее работы. В работе предложены аналитические модели автопоездов с прицепом и полуприцепом, на основе решения уравнения Лагранжа II рода относительно трех координат, учитывающие вертикальное, продольное и угловое перемещение относительной центра масс тягача. Для приближения аналитических моделей к реальным условиям эксплуатации учитываются связи инерционных масс рамы тягача и прицепа (полуприцепа) с перемещающейся массой грузов. Были проведены сравнительные расчеты суммарных угловых колебаний рам тягачей автопоездов с прицепом и полуприцепом, в результате чего отличие имеет собственные колебания рамы на протяжении 5,5 с тормозного режима.

## LONGITUDINAL DYNAMICS OF ROAD TRAINS DURING BRAKING

*Polyakov P.A.*

*Kuban State Technological University, Krasnodar*

**Keywords:** braking, longitudinal dynamics, road train, tractor, chain, semi-trailer.

**Abstract.** The review of literature sources has shown that a mathematical model of the longitudinal dynamics of auto-rides in braking mode has not been created to date. This model is the basis for the creation of an adaptive braking system, which determines the creation of an algorithm for its operation. The paper proposes analytical models of road trains with a trailer and a semi-trailer, based on the solution of the Lagrange equation of the second kind with respect to three coordinates, taking into account the vertical, longitudinal and angular displacement of the relative center of mass of the tractor. In order to bring analytical models closer to real operating conditions, the connections of the inertial masses of the tractor frame and trailer (semi-trailer) with the moving mass of goods are taken into account. Comparative calculations of the total angular oscillations of the frames of tractor trailers with a trailer and a semi-trailer were carried out, as a result of which the difference has its own frame oscillations for 5.5 seconds of braking mode.

### Введение

Создание адаптивных систем торможения предполагают исследования [1, 2], в которых решаются комплексные задачи, связанные не только с управлением тормозной системы, но и поведения автомобиля и его систем в процессе торможения. Большинство работ [3-5] связано с созданием CFD-моделей транспортных средств в различных неустановившихся режимах движения, особенностями которых является изменяющиеся частотные диапазоны возмущающих колебаний со стороны опорной поверхности. Процесс торможения представляет собой неустановившийся режим движения с неравномерным нагружением колес в силу действия инерции и колебательного процесса поддресоренных масс [6]. Для реализации процесса адаптивности тормозной системы необходимо в первую очередь реализовать алгоритм распределения нагрузки на каждое из колес, а в дальнейшем при разработке системы управления необходимо, учитывая алгоритм, изменять тормозное усилие в зависимости от нагрузки. Исследованиям эксплуатационных свойств, в частности продольной устойчивости в тормозном режиме, автопоездов в данный момент не так много уделено внимания. В работе [7] представлен набор скоростей бифуркации для заданного критического набора контрольных значений с использованием первого метода Ляпунова. Проблема разработки математической модели автопоезда при торможении не находит отражения в современных источниках.

Автопоезд в установившемся режиме находится в состоянии равновесия, что определяет размещением перемещающихся масс на одних осях с центрами масс тягача (рис. 1а) и прицепа (рис. 1б).

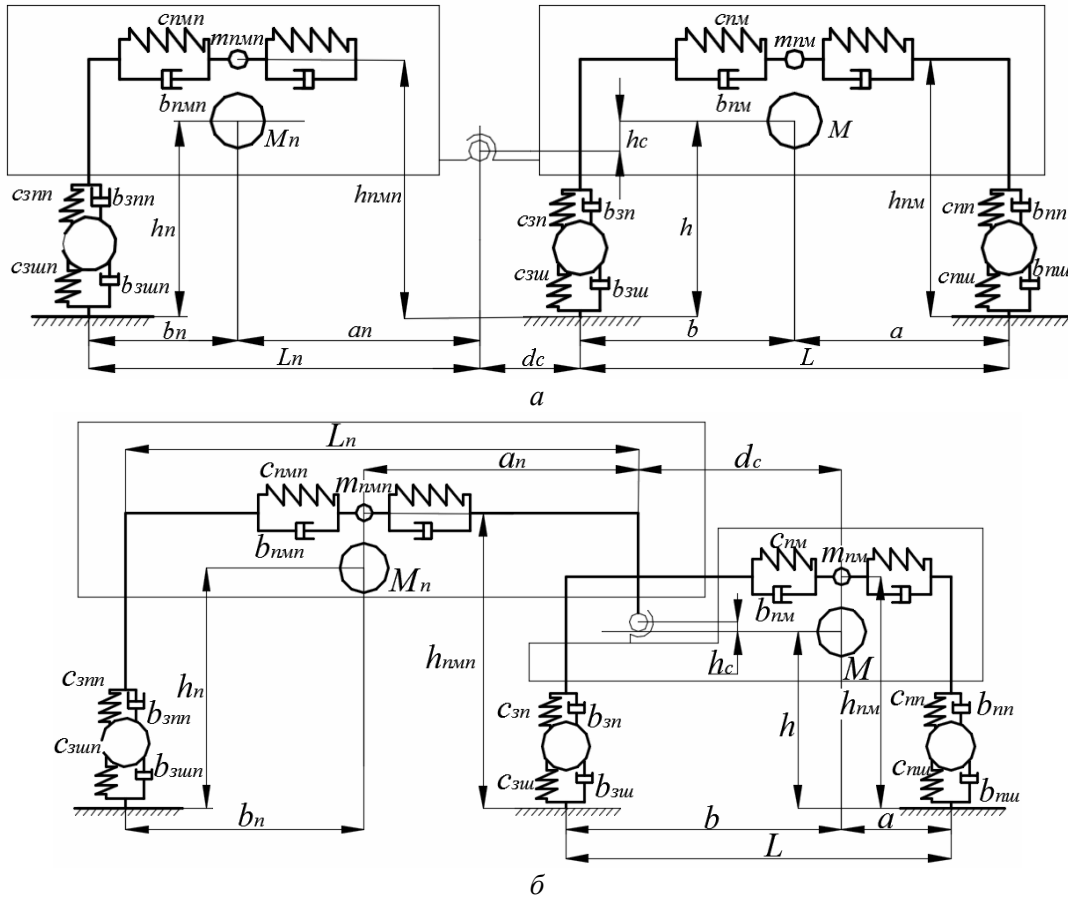


Рис. 1. Статические модели автопоездов в установившемся режиме: для прицепа (а) и полуприцепа (б):  $h, h_{nm}, h_n, h_{nmn}$  – расстояния от поверхности до центра масс и до тягача, до центра масс и до перемещающейся массы прицепа (полуприцепа);  $h_c$  – расстояние от центра масс до сцепки

В процессе торможения автопоездов перемещающиеся массы смещаются в сторону передней оси относительно центров масс на некоторое расстояние  $x_n$  для тягача и на  $x_{nm}$  для прицепа в продольном направлении. Массы тягача, прицепа и перемещающихся масс смещаются относительно равновесного положения таким образом, что расстояние от центра масс до поверхности в установившихся режимах не равно расстояниям в тормозном режиме ( $h \neq h, h_n \neq h_n, h_{nm} \neq h_{nm}, h_{nmn} \neq h_{nmn}$ ). У прицепа и тягача, перераспределяя нагрузку между осями, появляется угол наклона рамы и кузова  $\varphi$  (рис. 2 а, б). Ограничения перемещающейся массы в кузове и прицепе необходимо заменить связями с жесткостными и диссипативными коэффициентами.

Связь между поверхностью и осями автопоезда обозначаются с помощью связей, обозначаемых жесткостными и диссипативными коэффициентами передней, задней осей тягача и осью прицепа, учитывающие упругие свойства не только подвески, но и шин колес. Для учета влияния связи между прицепом и тягачом необходимо предусмотреть связи с коэффициентами.

Представим уравнение движения тягача, используя уравнения Лагранжа II рода, записанного в виде системы силового баланса относительно трех координат ( $z, x, \varphi$ ):

Реакции, действующие со стороны прицепа ( $S_{cy}$ ), перемещающихся масс ( $S, S_n$ ) опорной поверхности ( $R_{zn}, R_{xn}, R_{z3}, R_{x3}, R_{z3n}, R_{x3n}$ ) заменим на действия упругих и диссипативных связей, действующих относительно каждой из координат. Помимо реакций на автопоезд с перемещающимися массами действуют различные инерционные силы и моменты (рис. 3 а, б).

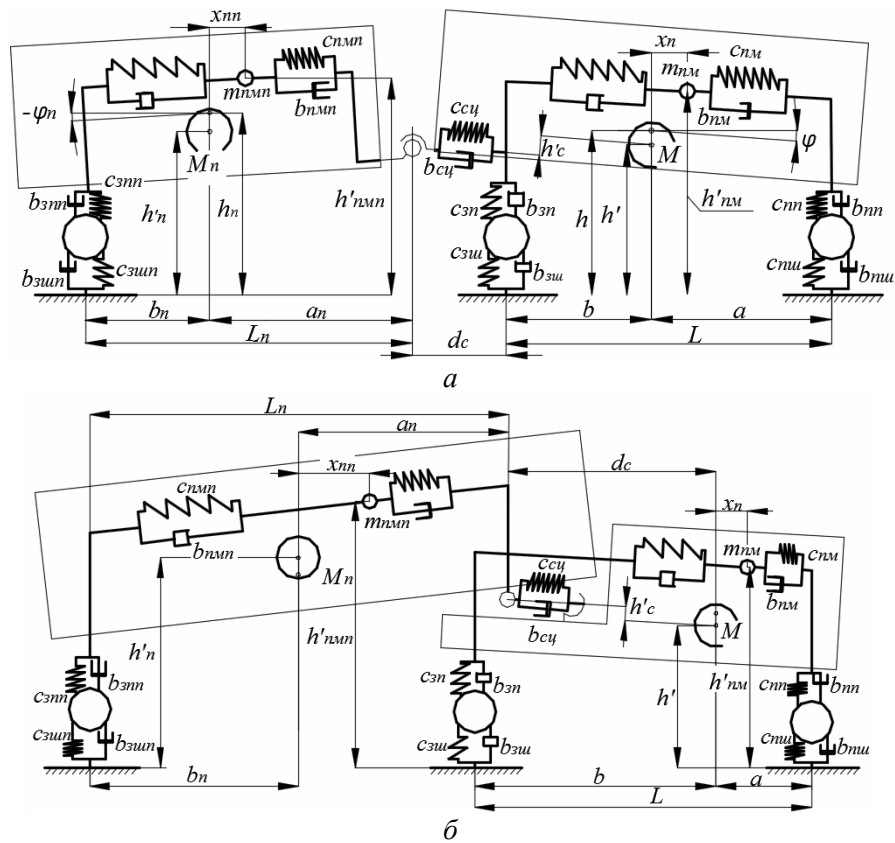


Рис. 2. Динамические модели автопоездов в тормозном режиме: для прицепа (а) и полуприцепа (б):  
 $h'$ ,  $h'_{nm}$ ,  $h'_n$ ,  $h'_{nm}$  – расстояния от поверхности до центра масс и до тягача, до центра масс и до перемещающейся массы прицепа (полуприцепа) при торможении;  $h'_c$  – расстояние от центра масс до сцепки при торможении

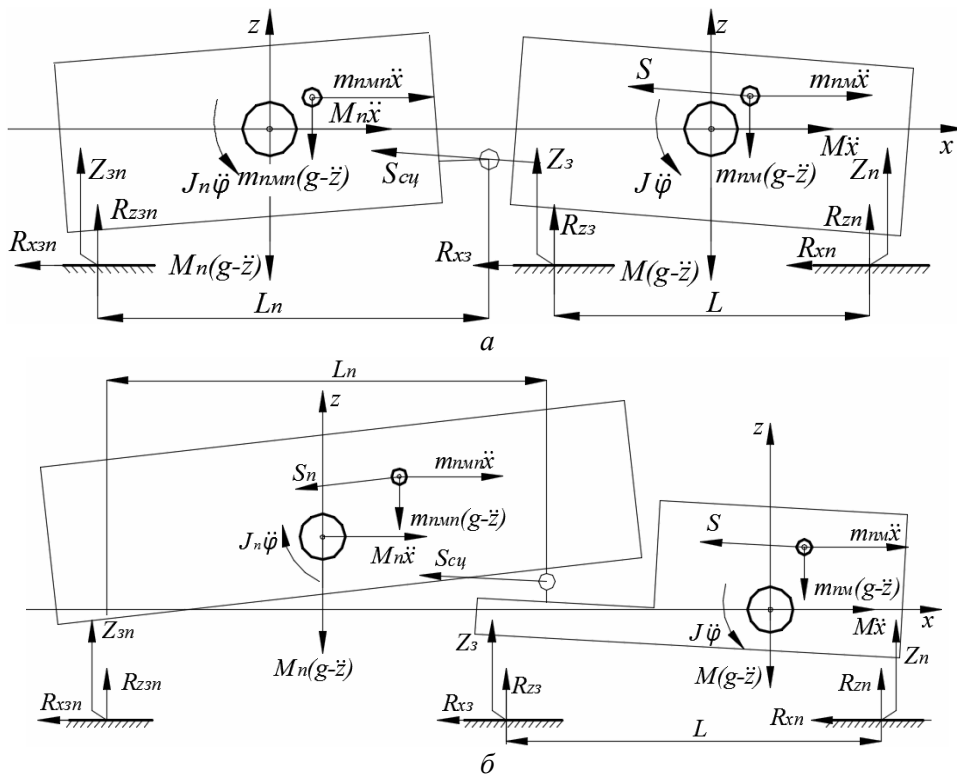


Рис. 3. Схемы действия сил и моментов на автопоезда с прицепом (а) и полуприцепом (б):  
 $S$ ,  $S_n$  – реакции кузова на перемещающиеся массы тягача и прицепа (полуприцепа),  $S_{cy}$  – реакции сцепного устройства;  $R_{zn}$ ,  $R_{xn}$ ,  $R_{z3}$ ,  $R_{x3}$ ,  $R_{zn}$ ,  $R_{x3n}$  – нормальные и касательные реакции передних, задних колес тягача и прицепа (полуприцепа)

Составим системы уравнений действия сил и моментов, действующих на автопоезда, в процессе торможения, относительно трех координат  $x, z, \varphi$  для прицепа (1) и для полуприцепа (2):

$$\begin{aligned}
 & - (M + m_{nm})(g - \ddot{z}) - (M_n + m_{nmm})(g - \ddot{z}) + m_{nm}\ddot{\varphi}x_n - m_{nmm}\ddot{\varphi}\left(\frac{b+d_c}{a_n-x_{nn}}\right) + \\
 & + c_{nm}z \sin \varphi + b_{nm}\dot{z} \sin \varphi - b_{nm}x_n\dot{\varphi} \sin \varphi - c_{nm}x_n\varphi \sin \varphi + b_{cy}\dot{z} \sin \varphi + \\
 & + c_{cy}z \sin \varphi + b_{cy}\dot{\varphi}(b+d_c) \sin \varphi + c_{cy}\varphi(b+d_c) \sin \varphi - b_{nmm}\dot{z} \sin \varphi - \\
 & - c_{nmm}z \sin \varphi - b_{nmm}\dot{\varphi}\left(\frac{b+d_c}{a_n-x_{nn}}\right) \sin \varphi - c_{nmm}\varphi\left(\frac{b+d_c}{a_n-x_{nn}}\right) \sin \varphi = \\
 & = (b_{nn} + b_{nu})\dot{Z}_n + (b_{3n} + b_{3uu})\dot{Z}_3 + (b_{3nn} + b_{3uun})\dot{Z}_{3n} + \frac{c_{nn}c_{nu}}{c_{nn} + c_{nu}}Z_n + \\
 & + \frac{c_{3n}c_{3uu}}{c_{3n} + c_{3uu}}Z_3 + \frac{c_{3nn}c_{3uun}}{c_{3nn} + c_{3uun}}Z_{3n}, \\
 & (M + m_{nm})\ddot{x} + (M_n + m_{nmm})\ddot{x} + m_{nm}\ddot{\varphi}(h'_{nm} - h') + m_{nmm}\ddot{\varphi}(h'_{nmm} - h') - \\
 & - c_{nm}x \cos \varphi - b_{nm}\dot{x} \cos \varphi - b_{nm}\dot{\varphi}(h'_{nm} - h') \cos \varphi - c_{nm}\varphi(h'_{nm} - h') \cos \varphi - \\
 & - c_{cy}x \cos \varphi - b_{cy}\dot{x} \cos \varphi - c_{cy}\dot{\varphi}h'_c \cos \varphi - b_{cy}\dot{\varphi}h'_c \cos \varphi - c_{nmm}x \cos \varphi - \\
 & - b_{nmm}\dot{x} \cos \varphi - c_{nmm}\varphi(h'_{nmm} - h') \cos \varphi - b_{nmm}\dot{\varphi}(h'_{nmm} - h') \cos \varphi = \\
 & = \varphi_c(b_{nn} + b_{nu})\dot{Z}_n + \varphi_c(b_{3n} + b_{3uu})\dot{Z}_3 + \varphi_c(b_{3nn} + b_{3uun})\dot{Z}_{3n} + \frac{\varphi_c c_{nn} c_{nu}}{c_{nn} + c_{nu}}Z_n + \\
 & + \frac{\varphi_c c_{3n} c_{3uu}}{c_{3n} + c_{3uu}}Z_3 + \frac{\varphi_c c_{3nn} c_{3uun}}{c_{3nn} + c_{3uun}}Z_{3n}, \\
 & m_{nm}x_n(g - \ddot{z}) + m_{nm}\ddot{x}(h'_{nm} - h') + m_{nmm}\ddot{\varphi}[(h'_{nm} - h')^2 + x_n^2] - J\ddot{\varphi} + J_n\ddot{\varphi} - \\
 & - M_n(g - \ddot{z})(d_c + a_n) + M_n\ddot{x}(h'_{nm} - h') - m_{nmm}(g - \ddot{z})(b + d_c + a_n - x_{nn}) + \\
 & + m_{nmm}\ddot{x}(h'_{nm} - h') - m_{nmm}\varphi[(h'_{nm} - h')^2 + (b + d_c + a_n - x_{nn})^2] - \\
 & - b_{nm}\dot{x}(h'_{nm} - h') - c_{nm}x(h'_{nm} - h') - c_{nm}x_n z - b_{nm}x_n\dot{z} - b_{nm}\dot{\varphi}[(h'_{nm} - h')^2 + x_n^2] - \\
 & - c_{nm}\varphi[(h'_{nm} - h')^2 + x_n^2] + b_{cy}\dot{z}(b + d_c) + c_{cy}z(b + d_c) + b_{cy}\dot{x}h'_c + c_{cy}xh'_c + \\
 & + b_{cy}\dot{\varphi}[(b + d_c)^2 + h_c'^2] + c_{cy}\varphi[(b + d_c)^2 + h_c'^2] - b_{nmm}\dot{z}(b + d_c + a_n - x_{nn}) - \\
 & - c_{nmm}z(b + d_c + a_n - x_{nn}) - b_{nmm}\dot{x}(h'_{nmm} - h') - c_{nmm}x(h'_{nmm} - h') + \\
 & + b_{nmm}\varphi[(b + d_c + a_n - x_{nn})^2 + (h'_{nm} - h')^2] + c_{nmm}\varphi\left[\frac{(b + d_c + a_n - x_{nn})^2 + (h'_{nm} - h')^2}{(h'_{nm} - h')^2}\right] = \\
 & = (a + \varphi_c h')(b_{nn} + b_{nu})Z_n + (b + \varphi_c h')(b_{3n} + b_{3uu})Z_3 + (b + L_n + \varphi_c h')(b + b)Z_{3n} + \\
 & + (a + \varphi_c h')\left(\frac{c_{nn}c_{nu}}{c_{nn} + c_{nu}}\right)Z_n + (b + \varphi_c h')\left(\frac{c_{3n}c_{3uu}}{c_{3n} + c_{3uu}}\right) + (b + L_n + \varphi_c h')\left(\frac{c_{3nn}c_{3uun}}{c_{3nn} + c_{3uun}}\right)
 \end{aligned}$$

где  $M, M_n, m_{nm}, m_{nmm}$  – массы тягача, прицепа (полуприцепа), перемещающего груза тягача и прицепа (полуприцепа), соответственно, кг;  $J, J_n$  – моменты инерции тягача и прицепа (полуприцепа), кг м<sup>2</sup>;  $a, b$  – расстояние от центра масс до передней или до задней осей тягача, соответственно, м;  $a_n, b_n$  – расстояние от центра масс до передней или до задней осей прицепа (полуприцепа), соответственно, м;  $b_{nm}, b_{nmm}, b_{cy}$  – коэффициенты демпфирования кузова тягача и прицепа (полуприцепа), сцепного устройства, соответственно, Нс/м;

$$\begin{aligned}
& - (M + m_{nm})(g - \ddot{z}) - (M_n + m_{nmm})(g - \ddot{z}) + m_{nm}\ddot{\phi}x_n - m_{nmm}\ddot{\phi}\left(\begin{array}{c} d_c + \\ + a_n - x_{nm} \end{array}\right) + \\
& + c_{nm}z \sin \varphi + b_{nm}\dot{z} \sin \varphi - b_{nm}x_n\dot{\phi} \sin \varphi - c_{nm}x_n\varphi \sin \varphi + b_{cy}\dot{z} \sin \varphi + \\
& + c_{cy}z \sin \varphi + b_{cy}\dot{\phi}d_c \sin \varphi + c_{cy}\varphi d_c \sin \varphi - b_{nmm}\dot{z} \sin \varphi - \\
& - c_{nmm}z \sin \varphi - b_{nmm}\dot{\phi}\left(\begin{array}{c} d_c + \\ + a_n - x_{nm} \end{array}\right) \sin \varphi - c_{nmm}\varphi\left(\begin{array}{c} d_c + \\ + a_n - x_{nm} \end{array}\right) \sin \varphi = \\
& = (b_{nn} + b_{nu})\dot{Z}_n + (b_{3n} + b_{3u})\dot{Z}_3 + (b_{3nn} + b_{3un})\dot{Z}_{3n} + \frac{c_{nm}c_{nu}}{c_{nn} + c_{nu}}Z_n + \\
& + \frac{c_{3n}c_{3u}}{c_{3n} + c_{3u}}Z_3 + \frac{c_{3nn}c_{3un}}{c_{3nn} + c_{3un}}Z_{3n}, \\
& (M + m_{nm})\ddot{x} + (M_n + m_{nmm})\ddot{x} + m_{nm}\ddot{\phi}(h'_{nm} - h') + m_{nmm}\ddot{\phi}(h'_{nmm} - h') - \\
& - c_{nm}x \cos \varphi - b_{nm}\dot{x} \cos \varphi - b_{nm}\dot{\phi}(h'_{nm} - h') \cos \varphi - c_{nm}\varphi(h'_{nm} - h') \cos \varphi - \\
& - c_{cy}x \cos \varphi - b_{cy}\dot{x} \cos \varphi - c_{cy}\varphi h'_c \cos \varphi - b_{cy}\dot{\phi}h'_c \cos \varphi - c_{nmm}x \cos \varphi - \\
& - b_{nmm}\dot{x} \cos \varphi - c_{nmm}\varphi(h'_{nmm} - h') \cos \varphi - b_{nmm}\dot{\phi}(h'_{nmm} - h') \cos \varphi = \\
& = \varphi_c(b_{nn} + b_{nu})\dot{Z}_n + \varphi_c(b_{3n} + b_{3u})\dot{Z}_3 + \varphi_c(b_{3nn} + b_{3un})\dot{Z}_{3n} + \frac{\varphi_c c_{nm} c_{nu}}{c_{nn} + c_{nu}}Z_n + \\
& + \frac{\varphi_c c_{3n} c_{3u}}{c_{3n} + c_{3u}}Z_3 + \frac{\varphi_c c_{3nn} c_{3un}}{c_{3nn} + c_{3un}}Z_{3n}, \\
& m_{nm}x_n(g - \ddot{z}) + m_{nm}\ddot{x}(h'_{nm} - h') + m_{nm}\dot{\phi}[(h'_{nm} - h')^2 + x_n^2] - J\ddot{\phi} + J_n\ddot{\phi} - \\
& - M_n(g - \ddot{z})(d_c + a_n) + M_n\ddot{x}(h'_{nm} - h') - m_{nmm}(g - \ddot{z})(d_c + a_n - x_{nm}) + \\
& + m_{nmm}\ddot{x}(h'_{nmm} - h') - m_{nmm}\varphi[(h'_{nmm} - h')^2 + (d_c + a_n - x_{nm})^2] - \\
& - b_{nm}\dot{x}(h'_{nm} - h') - c_{nm}x(h'_{nm} - h') - c_{nm}x_n z - b_{nm}x_n \dot{z} - b_{nm}\dot{\phi}[(h'_{nm} - h')^2 + x_n^2] - \\
& - c_{nm}\varphi[(h'_{nm} - h')^2 + x_n^2] + b_{cy}\dot{z}d_c + c_{cy}z d_c + b_{cy}\dot{x}h'_c + c_{cy}xh'_c + \\
& + b_{cy}\dot{\phi}[d_c^2 + h_c'^2] + c_{cy}\varphi[d_c^2 + h_c'^2] - b_{nmm}\dot{z}(d_c + a_n - x_{nm}) - \\
& - c_{nmm}z(d_c + a_n - x_{nm}) - b_{nmm}\dot{x}(h'_{nmm} - h') - c_{nmm}x(h'_{nmm} - h') + \\
& + b_{nmm}\varphi[(d_c + a_n - x_{nm})^2 + (h'_{nm} - h')^2] + c_{nmm}\varphi\left[\begin{array}{c} (d_c + a_n - x_{nm})^2 + \\ + (h'_{nm} - h')^2 \end{array}\right] = \\
& = (a + \varphi_c h')(b_{nn} + b_{nu})Z_n + (b + \varphi_c h')(b_{3n} + b_{3u})Z_3 + (b + L_n + \varphi_c h')(b + b)Z_{3n} + \\
& + (a + \varphi_c h')\left(\frac{c_{nm}c_{nu}}{c_{nn} + c_{nu}}\right)Z_n + (b + \varphi_c h')\left(\frac{c_{3n}c_{3u}}{c_{3n} + c_{3u}}\right) + (b + L_n + \varphi_c h')\left(\frac{c_{3nn}c_{3un}}{c_{3nn} + c_{3un}}\right)
\end{aligned}$$

где  $c_{nm}$ ,  $c_{nmm}$ ,  $c_{cy}$  – коэффициенты жесткости кузова тягача и прицепа (полуприцепа), сцепного устройства, соответственно, Н/м;  $d_c$  – расстояние от центра масс тягача до сцепки, м;  $b_{nn}$ ,  $b_{3n}$ ,  $b_{3nn}$ ,  $b_{nu}$ ,  $b_{3u}$ ,  $b_{3un}$  – коэффициенты демпфирования передней, задней подвесок тягача, задней подвески прицепа (полуприцепа), передней, задней шин колес тягача, задней шины прицепа (полуприцепа), соответственно, Нс/м;  $c_{nn}$ ,  $c_{3n}$ ,  $c_{3nn}$ ,  $c_{nu}$ ,  $c_{3u}$ ,  $c_{3un}$  – коэффициенты жесткости передней, задней подвесок тягача, задней подвески прицепа (полуприцепа), передней, задней шин колес тягача, задней шины прицепа (полуприцепа), соответственно, Н/м;  $\dot{Z}_n$ ,  $\dot{Z}_3$ ,  $\dot{Z}_{3n}$  – скорости векторов возмущения, м/с;  $Z_n$ ,  $Z_3$ ,  $Z_{3n}$  – векторы возмущения, м;  $\varphi_c$  – коэффициент сцепления шин с поверхностью;  $L$ ,  $L_n$  – база тягача и прицепа (полуприцепа), м.

Представим системы уравнений (1) и (2) в виде уравнения в векторно-матричной форме в обобщенных координатах  $q$  [8] с инерционными ( $A$ ), диссипативными ( $B$ ), жесткостными ( $C$ ), векторами скоростей возмущений  $\dot{Z}$  ( $D$ ) и векторами возмущений  $Z$  ( $E$ ) коэффициентами:

$$A\ddot{q} + B\dot{q} + Cq = D\dot{Z} + EZ, \quad (3)$$

Коэффициенты уравнения являются решениями матриц:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & A_{13} \\ 0 & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}, \quad (4) \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & 0 & B_{13} \\ 0 & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix}, \quad (5) \quad C = \begin{bmatrix} C_{11} & 0 & C_{13} \\ 0 & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix}, \quad (7) \quad E = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{bmatrix}, \quad (8)$$

Члены матриц  $[A_{11}; A_{33}]$ ,  $[B_{11}; B_{33}]$ ,  $[C_{11}; C_{33}]$ ,  $[D_{11}; D_{33}]$ ,  $[E_{11}; E_{33}]$  для автопоездов с прицепом и полуприцепом представлены в таблице 1.

Табл. 1. Члены матриц

Член матрицы	Для прицепа	Для полуприцепа
$A_{11}^*$	$-(M + m_{nm} + M_n + m_{nmm})$	
$A_{13}$	$m_{nm}x_n - m_{nmm}(b + d_c + a_n - x_{nm})$	$m_{nm}x_n - m_{nmm}(d_c + a_n - x_{nm})$
$A_{22}$	$(M + m_{nm} + M_n + m_{nmm})$	
$A_{23}$	$m_{nm}[h'_{nm} - h'] + m_{nmm}(h'_{nmm} - h')$	
$A_{31}$	$m_{nm}x_n - m_{nmm}(b + d_c + a_n - x_{nm}) - M_n[b + d_c + a_n]$	$m_{nm}x_n - m_{nmm}(d_c + a_n - x_{nm}) - M_n[d_c + a_n]$
$A_{32}$	$m_{nm}[h'_{nm} - h'] + m_{nmm}(h'_{nmm} - h') + M_n[h'_n - h']$	
$A_{33}$	$m_{nm}[(h'_{nm} - h')^2 + x_n^2] - m_{nmm}[(b + d_c + a_n - x_{nm})^2 + (h'_{nmm} - h')^2] - J + J_n$	$m_{nm}[(h'_{nm} - h')^2 + x_n^2] - m_{nmm}[(d_c + a_n - x_{nm})^2 + (h'_{nmm} - h')^2] - J + J_n$
$B_{11}$	$(b_{cy} - b_{nm} - b_{nmm})\sin\varphi$	
$B_{13}$	$[-b_{nm}x_n + b_{cy}(b + d_c) - b_{nmm}(b + d_c + a_n - x_{nm})]\sin\varphi$	$[-b_{nm}x_n + b_{cy}d_c - b_{nmm}(d_c + a_n - x_{nm})]\sin\varphi$
$B_{22}$	$-(b_{cy} + b_{nm} + b_{nmm})\cos\varphi$	
$B_{23}$	$[-b_{nm}[h'_{nm} - h'] + b_{cy}h'_c - b_{nmm}(h'_{nmm} - h')]\cos\varphi$	
$B_{31}$	$[-b_{nm}x_n + b_{cy}(b + d_c) - b_{nmm}(b + d_c + a_n - x_{nm})]$	$[-b_{nm}x_n + b_{cy}d_c - b_{nmm}(d_c + a_n - x_{nm})]$
$B_{32}$	$[-b_{nm}[h'_{nm} - h'] + b_{cy}h'_c - b_{nmm}(h'_{nmm} - h')]$	
$B_{33}$	$b_c[(b + d_c)^2 + h_c'^2] - b_{nm}[(h'_{nm} - h')^2 + x_n^2] - b_{nmm}[(b + d_c + a_n - x_{nm})^2 + (h'_{nmm} - h')^2]$	$b_c[d_c^2 + h_c'^2] - b_{nm}[(h'_{nm} - h')^2 + x_n^2] - b_{nmm}[(d_c + a_n - x_{nm})^2 + (h'_{nmm} - h')^2]$

Табл. 1. Продолжение

Член матрицы	Для прицепа		Для полуприцепа		
$C_{11}$	$(c_{cy} - c_{nm} - c_{nmn}) \sin \varphi$				
$C_{13}$	$\begin{bmatrix} -c_{nm}x_n + c_{cy}(b+d_c) - \\ -c_{nmn}(b+d_c+a_n-x_{nn}) \end{bmatrix} \sin \varphi$		$\begin{bmatrix} -c_{nm}x_n + c_{cy}d_c - \\ -c_{nmn}(d_c+a_n-x_{nn}) \end{bmatrix} \sin \varphi$		
$C_{22}$	$-(c_{cy} + c_{nm} + c_{nmn}) \cos \varphi$				
$C_{23}$	$[-c_{nm}[h'_{nm} - h'] + c_{cy}h'_c - c_{nmn}(h'_{nmn} - h')] \cos \varphi$				
$C_{31}$	$\begin{bmatrix} -c_{nm}x_n + c_{cy}(b+d_c) - \\ -c_{nmn}(b+d_c+a_n-x_{nn}) \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} -c_{nm}x_n + c_{cy}d_c - \\ -c_{nmn}(d_c+a_n-x_{nn}) \end{bmatrix}$		
$C_{32}$	$[-c_{nm}[h'_{nm} - h'] + c_{cy}h'_c - c_{nmn}(h'_{nmn} - h')]$				
$C_{33}$	$c_c \left[ (b+d_c)^2 + h_c'^2 \right] - c_{nm} \left[ (h'_{nm} - h')^2 + x_n^2 \right] -$ $-c_{nmn} \left[ (b+d_c+a_n-x_{nn})^2 + \right.$ $\left. + (h'_{nmn} - h')^2 \right]$		$c_c \left[ d_c^2 + h_c'^2 \right] - c_{nm} \left[ (h'_{nm} - h')^2 + x_n^2 \right] -$ $-c_{nmn} \left[ (d_c+a_n-x_{nn})^2 + \right.$ $\left. + (h'_{nmn} - h')^2 \right]$		
$D_{11}$	$(b_{nn} + b_{nu})$	$D_{12}$	$(b_{3n} + b_{3uu})$	$D_{13}$	$(b_{3nn} + b_{3uun})$
$D_{21}$	$\varphi_c(b_{nn} + b_{nu})$	$D_{22}$	$\varphi_c(b_{3n} + b_{3uu})$	$D_{23}$	$\varphi_c(b_{3nn} + b_{3uun})$
$D_{31}$	$(b_{nn} + b_{nu}) \times$ $\times (\varphi_c h'_c + a)$	$D_{32}$	$(b_{3n} + b_{3uu}) \times$ $\times (\varphi_c h'_c + b)$	$D_{33}$	$(b_{3nn} + b_{3uun}) \times$ $\times (\varphi_c h'_c + b + L_n)$
$E_{11}$	$\frac{c_{nn}c_{nu}}{c_{nn} + c_{nu}}$	$E_{12}$	$\frac{c_{3n}c_{3uu}}{c_{3n} + c_{3uu}}$	$E_{13}$	$\frac{c_{3nn}c_{3uun}}{c_{3nn} + c_{3uun}}$
$E_{21}$	$\frac{\varphi_c c_{nn}c_{nu}}{c_{nn} + c_{nu}}$	$E_{22}$	$\frac{\varphi_c c_{3n}c_{3uu}}{c_{3n} + c_{3uu}}$	$E_{23}$	$\frac{\varphi_c c_{3nn}c_{3uun}}{c_{3nn} + c_{3uun}}$
$E_{31}$	$\left( \frac{c_{nn}c_{nu}}{c_{nn} + c_{nu}} \right) \times$ $\times (\varphi_c h'_c + a)$	$E_{32}$	$\left( \frac{c_{3n}c_{3uu}}{c_{3n} + c_{3uu}} \right) \times$ $\times (\varphi_c h'_c + b)$	$E_{33}$	$\left( \frac{c_{3nn}c_{3uun}}{c_{3nn} + c_{3uun}} \right) \times$ $\times (\varphi_c h'_c + b + L_n)$

Решение данного дифференциального уравнения в обобщенных координатах не позволит разделить влияния различных коэффициентов на амплитуды колебаний в трех изначальных координатах, поэтому целесообразно привести системы уравнений (1) и (2) к общему решению дифференциального уравнения колебательной системы [9] в виде системы относительно каждой из рассматриваемых координат ( $z$ ,  $x$ ,  $\varphi$ ).

$$z = e^{-\frac{b_{np1}\tau}{m_{np1}}} \left( \frac{\frac{b_{np1}}{m_{np1}} z_0}{\sqrt{\left[ \frac{c_{np1}}{m_{np1}} \right]^2 - \left[ \frac{b_{np1}}{m_{np1}} \right]^2}} \sin \left[ \sqrt{\left( \frac{c_{np1}}{m_{np1}} \right)^2 - \left( \frac{b_{np1}}{m_{np1}} \right)^2} \tau + \right. \right. \\ \left. \left. + z_0 \cos \left[ \sqrt{\left( \frac{c_{np1}}{m_{np1}} \right)^2 - \left( \frac{b_{np1}}{m_{np1}} \right)^2} \tau \right] \right) + k_{11} \sin(\omega_{\epsilon n} \tau + \psi_{\epsilon 11}) + k_{12} \sin(\omega_{\epsilon 3} \tau + \psi_{\epsilon 12}) + k_{13} \sin(\omega_{\epsilon 3n} \tau + \psi_{\epsilon 13}),$$

$$\begin{aligned}
& \left. \begin{aligned}
& x = e^{-\frac{b_{np2}\tau}{m_{np2}}} \left( \frac{\left[ \frac{b_{np2}}{m_{np2}} \right] x_0}{\sqrt{\left[ \frac{c_{np2}}{m_{np2}} \right]^2 - \left[ \frac{b_{np2}}{m_{np2}} \right]^2}} \sin \left[ \sqrt{\left( \frac{c}{m} \right)^2 - \left( \frac{b}{m} \right)^2} \tau + \right. \right. \\
& \left. \left. + x_0 \cos \left[ \sqrt{\left( \frac{c_{np2}}{m_{np2}} \right)^2 - \left( \frac{b_{np2}}{m_{np2}} \right)^2} \tau \right] \right) + \\
& + k_{21} \sin(\omega_{\varepsilon n} \tau + \psi_{\varepsilon 21}) + k_{22} \sin(\omega_{\varepsilon 3} \tau + \psi_{\varepsilon 22}) + k_{23} \sin(\omega_{\varepsilon 3n} \tau + \psi_{\varepsilon 23}), \\
& \phi = e^{-\frac{b_{np3}\tau}{J_{np}}} \left( \frac{\left[ \frac{b_{np3}}{J_{np}} \right] \phi_0}{\sqrt{\left[ \frac{c_{np3}}{J_{np}} \right]^2 - \left[ \frac{b_{np3}}{J_{np}} \right]^2}} \sin \left[ \sqrt{\left( \frac{c_{np3}}{J_{np}} \right)^2 - \left( \frac{b_{np3}}{J_{np}} \right)^2} \tau + \right. \right. \\
& \left. \left. + \phi_0 \cos \left[ \sqrt{\left( \frac{c_{np3}}{J_{np}} \right)^2 - \left( \frac{b_{np3}}{J_{np}} \right)^2} \tau \right] \right) + \\
& + k_{31} \sin(\omega_{\varepsilon n} + \psi_{\varepsilon 31}) + k_{32} \sin(\omega_{\varepsilon 3} + \psi_{\varepsilon 32}) + k_{33} \sin(\omega_{\varepsilon 3n} + \psi_{\varepsilon 33}).
\end{aligned} \right\} \quad (9)
\end{aligned}$$

где  $m_{np1}$ ,  $m_{np2}$ ,  $J_{np}$  – приведенные инерционные коэффициенты относительно координат  $z$ ,  $x$ ,  $\phi$ , соответственно, кг;  $b_{np1}$ ,  $b_{np2}$ ,  $b_{np3}$  – диссипативные коэффициенты относительно координат  $z$ ,  $x$ ,  $\phi$ , соответственно, Нс/м;  $c_{np1}$ ,  $c_{np2}$ ,  $c_{np3}$  – жесткостные коэффициенты относительно координат  $z$ ,  $x$ ,  $\phi$ , соответственно, Н/м;  $k_{11}$ ,  $k_{12}$ ,  $k_{13}$ ,  $k_{21}$ ,  $k_{22}$ ,  $k_{23}$ ,  $k_{31}$ ,  $k_{32}$ ,  $k_{33}$  – амплитуды вынужденных колебаний передней, задней осей тягача и прицепа (полуприцепа) относительно координат  $z$ ,  $x$ ,  $\phi$ , соответственно;  $\psi_{\varepsilon 11}$ ,  $\psi_{\varepsilon 12}$ ,  $\psi_{\varepsilon 13}$ ,  $\psi_{\varepsilon 21}$ ,  $\psi_{\varepsilon 22}$ ,  $\psi_{\varepsilon 23}$ ,  $\psi_{\varepsilon 31}$ ,  $\psi_{\varepsilon 32}$ ,  $\psi_{\varepsilon 33}$  – сдвигами фаз вынужденных колебаний передней, задней осей тягача и прицепа (полуприцепа) относительно координат  $z$ ,  $x$ ,  $\phi$ , соответственно, град.;  $\omega_n$ ,  $\omega_3$ ,  $\omega_{3n}$  – частоты вынужденных колебаний передней, задней осей тягача и прицепа (полуприцепа), соответственно, Гц;  $\tau$  – время торможения, с.

Для нахождения приведенных коэффициентов общего решения дифференциального уравнения колебательной системы (9) необходимо воспользоваться методом сложения матриц частным результатом, которого является нулевая матрица:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & 0 & A_{13} \\ 0 & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_{np1} & 0 & 0 \\ 0 & m_{np2} & 0 \\ 0 & 0 & m_{np3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

В результате получим приведенные коэффициенты системы (8) относительно трех координат ( $z$ ,  $x$ ,  $\phi$ ) для автопоездов из соотношений таблицы 1.

Сравним математические модели тягачей автопоездов с прицепом и полуприцепом на основе угловых колебаний (рис. 4).

Начальные значения угла тангажа тягача, частоты осей будут идентичны друг другу, тогда весовые, жесткостные и демпфирующие коэффициенты будут рассчитаны по исходным данным [10] представленным выше:

- для прицепа  $J_{np}=13019\text{кг м}^2$ ;  $b_{np3}=10094\text{Нс/м}$ ;  $c_{np3}=11045\text{Н/м}$ ;
- для полуприцепа  $J_{np}=14748\text{кг м}^2$ ;  $b_{np3}=12937\text{Нс/м}$ ;  $c_{np3}=13513\text{Н/м}$ .

Полученные результаты амплитуд собственных колебаний свидетельствует о том, что с 0 до 5,2 с изменения носит экспоненциальный характер и незначительно отличается лишь кривизной, после 5,2 с собственные колебания нивелируются, и основной вклад в суммарные колебания вносит вынужденная составляющая.



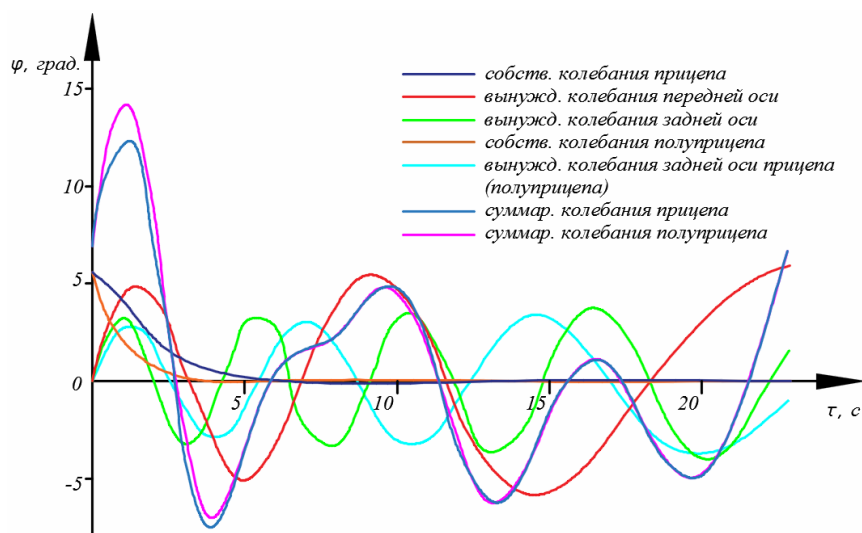


Рис. 4. Изменения амплитуд угловых колебаний автопоездов с прицепом и полуприцепом в процессе торможения

### Заключение

В рамках исследований разработаны аналитические модели автопоездов с прицепом и полуприцепом, на основе решения уравнения Лагранжа II рода относительно трех координат, учитывающие вертикальное, продольное и угловое перемещение относительной центра масс тягача. Для приближения аналитических моделей к реальным условиям эксплуатации учитываются связи инерционных масс рамы тягача и прицепа (полуприцепа) с перемещающейся массой грузов. Были проведены сравнительные расчеты суммарных угловых колебаний рам тягачей автопоездов с прицепом и полуприцепом, в результате чего отличие имеет собственные колебания рамы на протяжении 5,5 с тормозного режима.

### Список литературы

1. Dygalo V., Keller A., Shcherbin A. Principles of application of virtual and physical simulation technology in production of digital twin of active vehicle safety systems // Transportation Research Procedia. – Saint Petersburg, 2020. – P. 121-129. – DOI: 10.1016/j.trpro.2020.10.015.
2. Дыгало В.Г., Ревин А.А. Виртуально-физическая технология моделирования в цикле проектирования автоматизированных тормозных систем // Известия Волгоградского государственного технического университета. Серия: Наземные транспортные системы. – 2007. – Т. 2, №8(34). – С. 13-15.
3. Wang J., Zhang L., Zhang D., Li K. An adaptive longitudinal driving assistance system based on driver characteristics // IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems. 2013, vol. 14, no. 1, pp. 1-12. DOI: 10.1109 / TITS.2012.2205143.
4. Wang F., Lu Y., Li H. Heavy-duty vehicle braking stability control and hil verification for improving traffic safety // Journal of Advanced Transportation. 2022, 27p. doi.org/10.1155/2022/5680599.
5. Polack P., d'Andrea-Novel B., Fliess M., de La Fortelle A., Menhour L. Finite-time stabilization of longitudinal control for autonomous vehicles via a model-free approach // International research Chair Drive for All. 2017, 6 p. doi.org/10.48550/arXiv.1704.01383.
6. Ревин А.А. Повышение эффективности, устойчивости и управляемости при торможении автотранспортных средств: Дисс. ... докт. техн. наук: 05.05.03 / Ревин Александр Александрович. – Волгоград, 1983. – 524 с.
7. Поповский В., Безверхий А., Татиевский Д. Исследование расходящейся потери устойчивости автопоезда при движении по программной траектории // ТАРП. – 2018. – №2(44). – С. 50-55. – DOI: 10.15587/2312-8372.2018.150924.
8. Яицков И.А., Поляков П.А. Влияние жесткости элементов тормозных колодок на динамические нагрузки при торможении // Вестник Ростовского государственного университета путей со-общения. – 2022. – № 1(85). – С. 36-45. – DOI 10.46973/0201-727X\_2022\_1\_36.
9. Поляков П.А. Влияние конструкции прижимающих механизмов тормоза дисково-колодочного типа на колебания, возникающее в контакте фрикционного узла // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. – 2022. – № 5. – С. 408-420. – DOI 10.24412/2071-6168-2022-5-408-420.
10. Поляков П.А., Задаянчук Н.А., Гончарова Н.А. Совершенствование тягово-скоростных свойств автопоездов // Транспортное, горное и строительное машиностроение: наука и производство. – 2022. – № 15. – С. 58-66. – DOI: 10.26160/2658-3305-2022-15-58-66.

## References

1. Dygalo V., Keller A., Shcherbin A. Principles of application of virtual and physical simulation technology in production of digital twin of active vehicle safety systems // Transportation Research Procedia. – Saint Petersburg, 2020. – P. 121-129. – DOI: 10.1016/j.trpro.2020.10.015.
2. Dygalo V.G., Revin A.A. Virtual-physical modeling technology in the design cycle of automated braking systems // News of the Volgograd State Technical University. Series: Ground transport systems. 2007, vol. 2, no. 8(34), pp. 13-15.
3. Wang J., Zhang L., Zhang D., Li K. An adaptive longitudinal driving assistance system based on driver characteristics // IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems. 2013, vol. 14, no. 1, pp. 1-12. DOI: 10.1109/TITS.2012.2205143.
4. Wang F., Lu Y., Li H. Heavy-duty vehicle braking stability control and hil verification for improving traffic safety // Journal of Advanced Transportation. 2022, 27p. doi.org/10.1155/2022/5680599.
5. Polack P., d'Andrea-Novel B., Fliess M., de La Fortelle A., Menhour L. Finite-time stabilization of longitudinal control for autonomous vehicles via a model-free approach // International research Chair Drive for All. 2017, 6 p. doi.org/10.48550/arXiv.1704.01383.
6. Revin A.A. Improving efficiency, stability and controllability when braking vehicles: Diss. ... doct. tech. sc.: 05.05.03 / Revin Aleksandr Aleksandrovich. – Volgograd, 1983. – 524 p.
7. Popovsky V., Bezverhiy A., Tatishchevsky D. Investigation of divergent loss of stability of a road train when moving along a program trajectory // TARP. 2018, no. 2(44), pp. 50-55. DOI: 10.15587/2312-8372.2018.150924.
8. Yaitskov I.A., Polyakov P.A. Influence of rigidity of brake pad elements on dynamic loads during braking // Bulletin of the Rostov State University of Ways of Communication. 2022, no. 1(85), pp. 36-45. – DOI 10.46973/0201-727X\_2022\_1\_36.
9. Polyakov P.A. The influence of the design of the clamping mechanisms of the disc-pad brake on the vibrations arising in the contact of the friction unit // News of the Tula State University. Technical sciences. 2022, no. 5, pp. 408-420. DOI: 10.24412/2071-6168-2022-5-408-420.
10. Polyakov P.A., Zadoyanchuk N.A., Goncharova N.A. Improvement of traction-speed properties of road trains // Transport, mining and construction engineering: science and production. 2022, no. 15, pp. 58-66. DOI: 10.26160/2658-3305-2022-15-58-66.

### *Сведения об авторах:*

<b>Поляков Павел Александрович</b> – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры транспортных процессов и технологических комплексов polyakov.pavel88@mail.ru	<b>Polyakov Pavel Aleksandrovich</b> – candidate of technical sciences, associate professor, associate professor of the Department of transport processes and technological complexes
--	---

### *Information about authors:*

Получена 24.11.2022