

НЕКЛАССИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА ДЛЯ ОПИСАНИЯ ПРОЦЕССА ЦЕНТРОБЕЖНОГО НАНЕСЕНИЯ ЗАЩИТНОГО ПОКРЫТИЯ НА ВНУТРЕНнюю ПОВЕРХНОСТЬ ПРЯМОЛИНЕЙНОГО УЧАСТКА ТРУБОПРОВОДА

Паршин Д.А.

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук, Москва

Ключевые слова: аддитивная технология, неклассическая модель механики, защита трубопровода, процесс нанесения покрытия, центробежные силы, старение материала, деформационная наследственность, напряжения в покрытии.

Аннотация. Рассматривается аддитивный процесс нанесения защитного покрытия на внутреннюю поверхность цилиндрической стенки трубопровода. Материал покрытия обладает свойствами старения и деформационной наследственности. Изучается случай формирования однородного, изотропного, равномерного по толщине слоя покрытия. Толщина покрытия предполагается произвольной. Строится квазистатическая модель механики поверхностно наращиваемых деформируемых твердых тел для описания процесса деформирования формируемого покрытия. В качестве деформирующих воздействий выступают распределенные по объему центробежные инерционные силы. Контакт покрытия со стенкой трубопровода считается идеальным. Модель учитывает не свойственные классическим твердым телам кинематические и силовые особенности механического поведения аддитивно формируемых тел. В рамках предлагаемой неклассической модели последовательно проводится постановка соответствующей краевой задачи механики. Разработана методика построения ее решения.

A NON-CLASSICAL MODEL OF DEFORMABLE SOLID MECHANICS FOR THE PROCESS OF PROTECTIVE COATING CENTRIFUGAL APPLICATION ONTO THE INNER SURFACE OF A PIPELINE RECTILINEAR SECTION

Parshin D.A.

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Science, Moscow

Keywords: additive technology, non-classical model of mechanics, pipeline protection, coating process, centrifugal forces, material aging, deformation heredity, stress in coatings.

Abstract. The additive process of applying a protective coating to the inner surface of a cylindrical pipeline wall is considered. The coating material has the properties of aging and deformational heredity. The case of applying a homogeneous, isotropic and uniform in thickness coating is studied. The coating thickness is assumed to be arbitrary. A quasi-static model of mechanics of surface-accreted deformable solids is constructed to describe the deformation process in the being applied coating. The centrifugal inertia forces distributed over the volume of the coating act as deforming effects on it. The contact of the coating layer with the pipeline wall is considered ideal. The model takes into account kinematic and power features of the mechanical behavior of additively formed solids, that are not characteristic of classical solids. Within the framework of the proposed non-classical model, the formulation of the corresponding boundary value problem of mechanics is consistently carried out. A methodology for constructing its solution has been developed.

Общая проблематика исследования и постановка задачи. Под *аддитивными технологическими процессами*, в широком смысле этого термина, следует понимать процессы создания функциональных изделий, в частности, элементов конструкций и деталей машин, при которых эти изделия формируются в результате *последовательного роста*, то есть вследствие их *наращивания* достаточно большим количеством относительно тонких последовательно добавляемых слоев дополнительных материальных элементов. При анализе таких процессов, вообще говоря, нельзя не учитывать механические нагрузки, которые действуют на формируемые в ходе этих процессов твердые тела. Между тем, адекватно учесть эти нагрузки

невозможно без принятия во внимание специфической кинематики твердого тела, деформирующегося непосредственно во время своего роста, равно как и конкретных геометрических и силовых особенностей самого реализуемого процесса наращивания, – иными словами, на основе решения некоторой классической краевой задачи механики деформируемого твердого тела, сформулированной пусть даже в меняющейся с течением времени области пространства. Данное утверждение становится очевидным, как только мы уясним, что любое *наращиваемое деформируемое тело*, коль скоро оно продолжает формироваться в процессе деформирования, в принципе должно быть лишено единой для всех составляющих его материальных элементов конфигурации, которая была бы полностью свободна от механических напряжений и которая в классической механике деформируемого твердого тела всегда воспринимается как недеформированная (естественная) [1]. Значит для получения корректных представлений об эволюции распределений механических напряжений в аддитивно формируемых твердых телах требуется применение каких-то особых – неклассических подходов, которые должны составлять предмет изучения специального раздела механики деформируемого твердого тела. Этот раздел принято называть *механикой наращиваемых, или растущих тел*, и его подходы и методы получили к настоящему времени достаточно широкое развитие в работах отечественной научной школы, основанной академиком Н.Х. Арутюняном и профессором А.В. Манжировым [2-4], а полученные результаты позволили сформулировать и решить различные по своим целям и постановкам задачи о работоспособности и долговечности аддитивно изготовленных изделий в тех или иных условиях их нагружения и контактного взаимодействия, а также задачи о возможном технологическом управлении получаемыми механическими характеристиками этих изделий (см., например, [5-9]).

В настоящей работе мы рассмотрим аддитивный технологический процесс формирования слоя защитного покрытия произвольной толщины методом центробежного последовательного равномерного нанесения относительно тонких *монослоев* материала на внутреннюю поверхность прямолинейного участка трубопровода круглого сечения. Механической нагрузкой, которую необходимо учитывать при анализе этого процесса, будут, в первую очередь, распределенные по объему покрытия инерционные силы вращения. Будем изучать малую деформацию формируемого слоя и эволюцию соответствующих ей полей напряжений.

Первичные допущения модели. Относительная тонкость (по отношению к требуемой толщине готового покрытия) каждого отдельно наносимого монослоя, равномерность монослоя по толщине в продольном и окружном направлениях, а также возможность пренебречь временем, затрачиваемым на формирование единичного монослоя по сравнению со временем, требуемым на заметное изменение текущей общей толщины создаваемого покрытия, позволяют моделировать изучаемый аддитивный технологический процесс как процесс осесимметричного *непрерывного роста* полого цилиндрического твердого тела, представляющего собой формируемый слой покрытия, за счет его наращивания со стороны внутренней поверхности, при внешней поверхности, сцепленной с защищаемой трубой, жесткость которой несравнимо выше жесткости самого слоя покрытия. Последнее замечание означает, что внешний радиус покрытия (внутренний радиус трубы) r_0 на протяжении всего процесса роста можно считать постоянным. Непрерывно уменьшающийся с течением времени t внутренний радиус изготавливаемого покрытия обозначим за $r(t)$. Если процесс роста временно или окончательно останавливается, считаем в соответствующие моменты $r(t) = \text{const}$.

В определенных ситуациях при моделировании процессов, подобных изучаемым, может потребоваться учет индивидуальных *начальных напряжений*, с которыми отдельные монослои материала внедряются в состав растущего сплошного тела. Эти напряжения возникают вследствие физико-химических процессов, которые протекают при солидификации монослоя. В данной работе мы сосредоточимся на изучении влияния

инерционных объемных силовых воздействий на слой формируемого защитного покрытия, поэтому будем считать, что упомянутыми напряжениями можно пренебречь, полагая их нулевыми. Будем учитывать только центробежные составляющие сил инерции вращения, пренебрегая их касательными составляющими. Для этого необходимо, чтобы вращение трубы в процессе нанесения на нее покрытия происходило без быстрых изменений во времени угловой скорости ω : $|\omega^{-2} d\omega/dt| \ll 1$. Данное требование вместе с дополнительным допущением о незначительности динамических воздействий на растущее покрытие при его контактном взаимодействии с наносимым материалом позволяет моделировать процесс в квазистатическом приближении.

Определяющее уравнение используемого материала. Хорошо известно [10, 11] о выраженном проявлении реологических свойств – таких как старение и запаздывание деформации – у полимеров и иных материалов, применяемых для создания защитных покрытий. Если подобные материалы участвуют в аддитивных процессах, то развивающейся с течением времени деформационной реакции растущего тела на действующие на него нагрузки должно сопутствовать перераспределение их действия на вновь вовлекаемые в процесс деформирования материальные элементы. Это обуславливает сложность моделирования подобных процессов. Поэтому в настоящей работе мы ограничимся случаем однородных механических свойств всего аддитивно формируемого покрытия. Будем описывать их в рамках изотропной теории наследственности стареющих сред [2], в которой определяющее уравнение материала, связывающее тензор напряжений σ с тензором малой деформации ε , имеет следующий операторный вид:

$$H^{t_0} \frac{\sigma}{2\mu} = \varepsilon + \frac{\mathbf{1} \cdot \varepsilon}{m-2}, \quad (1)$$

где $\mathbf{1}$ – тензорная единица ранга 2; m – число Пуассона, которое характеризует как упруго-мгновенную, так и развивающуюся со временем составляющие полной деформации, и не зависит от возраста материала; μ – модуль упругости второго рода, зависящий от возраста материала; H^{t_0} – интегральный оператор вольтеррова типа по времени с параметром t_0 , имеющим смысл времени *начала развития напряжений*,

$$H^{t_0} f(t) = f(t) - \int_{t_0}^t f(s) C(s, t) ds, \quad (2)$$

с ядром наследственности $C(s, t)$, выражаемым через механические характеристики материала; последние могут быть экспериментально измерены, например, в состоянии чистого сдвига:

$$C(s, t) = \mu(s) \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{1}{\mu(s)} + \chi(s, t) \right], \quad (3)$$

где $\chi(s, t)$ – мера наследственности при чистом сдвиге, $\chi(s, s) \equiv 0$. Заметим, что функция, заключенная в квадратные скобки в (3), описывает полную удельную деформацию сдвига (на единицу постоянного касательно напряжения, действующего в эксперименте на чистый сдвиг).

Механическая модель исследуемого процесса роста. Любое растущее деформируемое тело не представляется в своем окончательном материальном составе раньше момента приложения к нему каких-либо нагрузок (т.е. в некоторой естественной конфигурации), поскольку продолжает пополняться новыми материальными элементами и после начала своего деформирования. Поэтому момент t_0 в принятом уравнении состояния (1) при описании поведения *растущего тела* следует считать зависящим от его точки, в то время как у классического тела напряжения во всех точках в общем случае начинают развиваться в один и тот же момент времени t_0 — момент приложения нагрузки к этому телу. Итак, обозначая за \mathbf{x} радиус-вектор произвольной точки растущего тела, будем иметь

$t_0 = t_0(\mathbf{x})$. Очевидно, что вид функции $t_0(\mathbf{x})$ будет зависеть от реализуемой программы наращивания. В нашем случае следует считать $t_0(\mathbf{x}) = t_0(\rho)$, где ρ – полярное расстояние (от оси вращения до данной точки \mathbf{x}). Далее можно заметить, что определяющая поведение материала функция $t_0(\rho)$ должна находиться из условия

$$\rho \equiv r(t_0(\rho)). \quad (4)$$

Действительно, коль скоро мы пренебрегли начальными напряжениями в добавляемом материале, то должны считать, что он внедряется в состав тела *первоначально ненапряженным*. Поэтому напряжения в точках тела начинают развиваться с момента $t = t_0(\rho)$, когда эти точки находятся на мгновенной *поверхности роста* $\rho = r(t)$ этого тела. Функцию $r(t)$, в свою очередь, следует считать заданной в силу реализуемой программы наращивания. Последнее справедливо ввиду предполагаемой малости деформации, при которой допустимо пренебречь деформационным искажением поверхности роста на фоне ее смещения в пространстве вследствие непрерывного добавления нового материала.

Как сказано выше, мы принимаем для всех моментов непрерывного роста условие начальной ненапряженности добавляемых монослоев, т.е.

$$\boldsymbol{\sigma}|_{\rho=r(t)} = \mathbf{0}. \quad (5)$$

Это условие, заметим, автоматически предполагает, что *поверхность роста* необходимо должна быть *свободна от нагрузки* все время, пока продолжается непрерывное наращивание покрытия, т.е.

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}|_{\rho=r(t)} = \mathbf{0}, \quad (6)$$

где \mathbf{n} – вектор единичной внешней нормали к поверхности роста:

$$\mathbf{n} = - \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \rho} / \left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \rho} \right|.$$

Отметим также, что граничное условие вида (5) не свойственно классическим задачам механики деформируемого твердого тела, однако является вполне типичным для задач роста [5].

Для наших дальнейших рассуждений принципиальными являются следующие наблюдения. Если у растущего твердого тела как сплошного и единого целого нет конфигурации, от которой следует отсчитывать деформирующие перемещения его точек, то нельзя использовать традиционные соотношения Коши для вычисления компонент тензора малой деформации, а значит не будут иметь места условия Сен-Венана совместности деформаций [3,5]. Однако, как нетрудно понять, *скорости деформаций* даже в растущем теле будут *совместны* в любой момент его деформирования ввиду сплошности (неразрывности) этого тела. Данный факт означает корректность определения в растущем теле компонент тензора скоростей деформации $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ стандартным соотношением

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \text{symgrad } \mathbf{v}, \quad (7)$$

где \mathbf{v} – поле скоростей движениями точек тела. В результате допустимо переписать определяющее уравнение (1) в терминах скоростей, учтя при этом зависимость момента начала развития напряжений от точки тела:

$$\boldsymbol{\zeta} = \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \frac{\mathbf{1} \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}}}{m-2}, \quad \boldsymbol{\zeta} = \frac{d}{dt} \left(\mathbf{H}^{t_0(\rho)} \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2\mu} \right), \quad (8)$$

после чего использовать в качестве основного искомого поля в нашей неклассической модели поле скоростей \mathbf{v} . Когда это векторное поле будет найдено из решения соответствующей краевой задачи, мы сможем с помощью (7) и (8) определить эволюцию во времени t тензорного поля скоростей операторных напряжений $\boldsymbol{\zeta}$ – во всей переменной области, занятой рассматриваемым растущим телом. По этой эволюции уже можно восстановить

эволюцию тензорного поля истинных напряжений σ , выполняя интегрирование по времени с начальным условием

$$\sigma|_{t=t_0(\rho)} = \mathbf{0}, \quad (9)$$

эквивалентным в силу (4) условию (5), и обращая затем интегральный оператор (2). Последняя процедура может быть выполнена аналитически, если для резольвенты $R(s,t)$ ядра наследственности $C(s,t)$ известно замкнутое выражение:

$$(\mathbf{H}^{t_0})^{-1} g(t) = g(t) + \int_{t_0}^t g(s) R(s,t) ds.$$

Каждый сформированный фрагмент сплошного растущего твердого тела, несмотря на отмеченную выше особую кинематику последнего, во все моменты своего деформирования пребывает в механическом равновесии под действием внешних сил, распределенных по его объему, напряжений, распределенных по его поверхности, и объемных сил деформационной инерции. В нашей модели ввиду сделанных ранее предположений о характере роста покрытия мы пренебрегаем последними силами, а в роли первых – при описании процесса деформирования в системе отсчета, связанной с вращающейся деталью трубопровода, – выступают центробежные силы. Таким образом, справедливо следующее уравнение квазистатического равновесия:

$$\operatorname{div} \sigma - D\omega^2(t)\rho \mathbf{n} = \mathbf{0}, \quad \rho \in (r(t), r_0), \quad (10)$$

где $D = \text{const}$ – плотность используемого материала покрытия.

Итак, мы можем сформулировать *краевую задачу*, описывающую процесс деформирования защитного покрытия, послойно наносимого центробежным методом на внутреннюю поверхность прямолинейного участка трубопровода, в рамках предлагаемой модели. Эта задача состоит из: дифференциального уравнения (10); определяющего уравнения в форме (8); аналога соотношения Коши для скоростей деформирования (7); начального условия (9), равносильного условию (5) на поверхности роста; граничного условия на защищаемой поверхности детали трубопровода

$$\mathbf{v}|_{\rho=r_0} = \mathbf{0}, \quad (11)$$

предписывающего идеальный контакт этой поверхности с покрытием; граничного условия на каждой из торцевых поверхностей слоя покрытия, расширяющихся внутрь трубы вследствие роста этого слоя, которое может иметь различный вид, в том числе интегральный [4], либо условия плоской деформации (для достаточно длинного участка трубопровода).

Методика построения решения краевой задачи. Предположим дополнительно, что *после завершения* аддитивного процесса нанесения покрытия, равно как и *в перерывах* между отдельными непрерывными стадиями этого процесса (при его многостадийной организации), вся внутренняя поверхность сформированного слоя покрытия не подвергается загрузке, т.е. остается справедливым условие (6). Тогда, опираясь на общие теоремы механики растущих тел, доказанные в фундаментальных работах профессора А.В. Манжирова, мы в нашей модели можем показать, что уравнение (10) допускает следующую переформулировку в терминах скоростей операторных напряжений:

$$\operatorname{div} \zeta - D w(t, \rho)\rho \mathbf{n} = \mathbf{0}, \quad \rho \in (r(t), r_0), \quad (12)$$

где функция $w(t, \rho)$ вычисляется следующим образом:

$$w(t, \rho) = \frac{\omega(t)}{\mu(t)} \frac{d\omega(t)}{dt} + \frac{\omega^2(t_0(\rho))}{2} \frac{\partial \chi(t_0(\rho), t)}{\partial t} + \int_{t_0(\rho)}^t \omega(s) \frac{d\omega(s)}{ds} \frac{\partial \chi(s, t)}{\partial t} ds.$$

С помощью полученного уравнения (12) мы можем также математически вывести из условия (5) необходимое условие на скорость изменения вектора операторного напряжения на проходящей через произвольную точку покрытия осесимметричной цилиндрической поверхности, которое должно быть справедливо в тот момент времени (начальный для данной точки), когда эта поверхность совпадает с поверхностью роста:

$$\mathbf{n} \cdot \zeta|_{\rho=r(t)} = \frac{D\omega^2(t)r(t)}{\mu(t)} \frac{dr(t)}{dt} \mathbf{n}. \quad (13)$$

Полученные результаты приводят к граничной задаче для величин \mathbf{v} и ζ , связанных первым соотношением (8) вместе с (7), включающей дифференциальное уравнение (12) и граничные условия (11) и (13). Эта задача параметрически зависит от t , сформулирована для специфических величин, но при этом имеет математическую структуру, стандартную для задач статики упругого тела; ее решение может строиться для каждого задаваемого значения параметра любым из применяемых для таких задач методов, в частности методом конечных элементов (в случае длинного участка трубопровода данная задача допускает аналитическое решение).

Выводы. Результатом работы является построение математической модели, позволяющей описать с позиций механики деформируемого твердого тела процессы нанесения центробежным методом защитных покрытий произвольной толщины со сложными реологическими свойствами на прямолинейные участки трубопроводов. Предложенная модель является неклассической и учитывает геометрическую, силовую и кинематическую специфику рассматриваемых аддитивных процессов.

Благодарности и финансирование. Работа выполнена по теме госзадания (номер госрегистрации АААА-А20-120011690132-4).

Список литературы

1. Дятловицкий Л.И., Рабинович Л.Б. Упругая задача для тел с изменяющейся в процессе загрузки конфигурацией // Инженерный журнал. – 1962. – Т. 2, №2. – С. 287-297.
2. Арутюнян Н.Х., Манжиров А.В., Наумов В.Э. Контактные задачи механики растущих тел. – М.: Наука, 1991. – 176 с.
3. Манжиров А.В. Общая безынерционная начально-краевая задача для кусочно-непрерывно наращиваемого вязкоупругого стареющего тела // Прикладная математика и механика. – 1995. – Т. 59, №5. – С. 836-848.
4. Parshin D.A., Manzhirou A.V. The mechanical problems on additive manufacturing of viscoelastic solids with integral conditions on a surface increasing in the growth process // Journal of Physics: Conference Series. 2018, vol. 991, p. 012063.
5. Манжиров А.В., Паршин Д.А. Применение преднапряженных конструктивных элементов при возведении тяжелой вязкоупругой арочной конструкции с использованием аддитивной технологии // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2016. – №6. – С. 93-104.
6. Manzhirou A.V., Kazakov K.E. Plane problem of contact interaction for foundation with multilayer nonuniform coating // Journal of Physics: Conference Series. 2019, vol. 1205, p. 012037.
7. Казаков К.Е. О взаимодействии цилиндрической вставки и трубы с внутренним сильно неоднородным покрытием // Фундаментальные основы механики. – 2020. – №6. – С. 50-53.
8. Казаков К.Е. Об учете сложных форм и поверхностных свойств контактирующих тел в задаче взаимодействия трубы и осесимметричной вставки // Транспортное, горное и строительное машиностроение: наука и производство. – 2022. – №16. – С. 31-36.
9. Parshin D.A. Some technological abilities to control the stresses developing in products of cylindrical shape in the processes of their additive manufacturing // Journal of Advanced Research in Technical Science. 2020, no. 22, pp. 22-26.
10. Ферри Дж.Д. Вязкоупругие свойства полимеров / Пер. с англ. под ред. В.Е. Гуля. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1963. – 536 с.
11. Struik L.C.E. Physical Aging in Amorphous Polymers and Other Materials. –Amsterdam: Elsevier, 1978. – 229 p.

References

1. Dyatlovitsky L.I., Rabinovich L.B. The elastic problem for bodies with configuration changing during loading // Engineering Journal. 1962, vol. 2, no. 2, pp. 287-297.
2. Arutyunyan N.Kh., Manzhirou A.V., Naumov V.E. Contact Problems in Mechanics of Growing Solids. – М.: Science, 1991. – 176 p.
3. Manzhirou A.V. The general non-inertial initial-boundaryvalue problem for a viscoelastic ageing solid with piecewise-continuous accretion // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1995, vol. 59, no. 5, pp. 805-816.
4. Parshin D.A., Manzhirou A.V. The mechanical problems on additive manufacturing of viscoelastic solids with integral conditions on a surface increasing in the growth process // Journal of Physics: Conference Series. 2018, vol. 991, p. 012063.

5. Manzhurov A.V., Parshin D.A. Application of prestressed structural elements in the erection of heavy viscoelastic arched structures with the use of an additive technology // *Mechanics of Solids*. 2016, vol. 51, no. 6, pp. 692-700.
6. Manzhurov A.V., Kazakov K.E. Plane problem of contact interaction for foundation with multilayer nonuniform coating // *Journal of Physics: Conference Series*. 2019, vol. 1205, p. 012037.
7. Kazakov K.E. Interaction between a cylindrical insert and a pipe with a highly nonuniform inner coating // *Fundamentals of Mechanics*. 2020, no. 6, pp. 50-53.
8. Kazakov K.E. On the consideration of complex shapes and surface properties of contacting bodies in the problem of interaction of a pipe and an axisymmetric insert // *Transport, Mining and Construction Engineering: Science and Production*. 2022, no. 16, pp. 31-36.
9. Parshin D.A. Some technological abilities to control the stresses developing in products of cylindrical shape in the processes of their additive manufacturing // *Journal of Advanced Research in Technical Science*. 2020, no. 22, pp. 22-26.
10. Ferry J.D. *Viscoelastic Properties of Polymers*. – New York: John Wiley & Sons, 1980. – 672 p.
11. Struik L.C.E. *Physical Aging in Amorphous Polymers and Other Materials*. –Amsterdam: Elsevier, 1978. – 229 p.

Сведения об авторах:

Information about authors:

Паршин Дмитрий Александрович – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник	Parshin Dmitry Alexandrovich – candidate of physical and mathematical sciences, senior researcher
parshin@ipmnet.ru	

Получена 30.11.2022