Казаков К.Е. Об учете радиальной неоднородности при решении краевых задач для полых круговых цилиндров // Транспортное, горное и строительное машиностроение: наука и производство. – 2022. – №17-1. – С. 32-37.

УДК 539.3 https://doi.org/10.26160/2658-3305-2022-17-32-37

ОБ УЧЕТЕ РАДИАЛЬНОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ ПРИ РЕШЕНИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПОЛЫХ КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРОВ

Казаков К.Е.
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук, Москва

Ключевые слова: краевая задача, ОДУ, неоднородность, полый круговой цилиндр, специальные функции, уравнение Уиттекера.

Аннотация. В работе рассмотрена краевая задача для бесконечного радиально неоднородного полого кругового цилиндра. Показано, что в общем случае математической моделью такой задачи является однородное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами и двумя граничными условиями. Отмечено, что построение аналитического решения полученного дифференциального уравнения возможно только при определенных видах и соотношениях между коэффициентами. Приведены решения для нескольких таких соотношений. На примере случая, когда коэффициент Пуассона постоянен, а модуль Юнга меняется по экспоненциальному закону, показан процесс построения аналитического решения. Отмечено, что полученное решение позволяет проводить вычисления как с возрастающим вдоль радиальной координаты, так и с убывающим модулем Юнга.

ON THE CONSIDERATION OF RADIAL INHOMOGENEITY IN SOLVING BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR HOLLOW CIRCULAR CYLINDERS

Kazakov K.E.
Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow

Keywords: boundary value problem, ODE, inhomogeneity, hollow circular cylinder, special functions, Whittaker equation.

Abstract. The paper considers a boundary value problem for an infinite radially inhomogeneous hollow circular cylinder. It is shown that in the general case, the mathematical model of such a problem is a homogeneous ordinary differential equation of the second order with variable coefficients and two boundary conditions. It is noted that the construction of an analytical solution of the resulting differential equation is possible only with certain types and ratios between the coefficients. Solutions for several such relations are given. Using the example of the case when the Poisson's ratio is constant and the Young's modulus varies exponentially, the process of constructing an analytical solution is shown. It is noted that the obtained solution allows calculations to be carried out both with increasing along the radial coordinate and with decreasing Young's modulus.

Введение. Технологии, используемые в настоящее время, позволяют изготавливать детали и изделия, свойства и структура которых переменны. Этого можно достичь, например, при помощи различных методов технологии аддитивного производства. Различные неоднородности могут возникнуть и за счет последующей обработки уже готовых изделий. Такие свойства могут быть получены как намерено для обеспечения долговечности и износостойкости детали в сочетании с небольшой массой, теплопроводностью и т.п., так и за счет особенностей производства. В обоих случаях напряженно-деформированное состояние полученных неоднородных тел при их взаимодействии с другими телами будет отличаться от напряженно-деформированного состояния однородного тела, например, с усредненными характеристиками. Поэтому все эти особенности необходимо учитывать при произведении расчетов.

В промышленности, приборостроении и машиностроении широко используются различные толстостенные цилиндры. Примерами таких цилиндров могут служить водопроводные и буровые трубы, газо- и нефтепроводы и т.д. В ряде случаев их можно считать осесимметричными круговыми полыми цилиндрами с постоянной толщиной. Более того, внешние и внутренние нагрузки также могут обладать осевой симметрией. Такое происходит, например, когда труба находится под внутренним давлением, а снаружи на нее надета муфта. Для обеспечения жесткости конструкции в сочетании с другими необходимыми свойствами такие трубы целесообразно изготавливать либо из нескольких слоев, либо из неоднородного материала. Данная работа посвящена постановке и решению задач в случае, когда труба обладает радиальной неоднородностью. Подобные задачи ставились и решались, например, в работах [1-10], однако некоторые аналитические решения в данных работах имели ряд ограничений при их использовании.

Настоящая статьи посвящена постановке краевых задач для радиально неоднородных полых круговых цилиндров при осесимметричных граничных условиях, обзору случаев, когда можно построить аналитическое решение, а также демонстрации построения аналитического решения для экспоненциальной зависимости модуля Юнга от радиальной координаты.

Постановка задачи. Рассмотрим полую цилиндрическую круговую трубу, изготовленную из неоднородного материала, упругие свойства которой зависят только от радиальной координаты, т.е. модуль Юнга $E = E(r)$ и коэффициент Пуассона $\nu = \nu(r)$. Такая труба находится под внешним воздействием, которое также предполагается осесимметричным. Такими воздействиями могут, например, быть внутреннее и внешнее давления (в этом случае на внутренней и внешней гранях будут заданы радиальные напряжения), жесткие удерживающие элементы (муфты и вставки, в этом случае будут заданы соответствующие радиальные перемещения), либо комбинации этих факторов. В результате этого труба находится в напряженно-деформированном состоянии. Задача состоит в том, чтобы определить перемещения, деформации и напряжения, возникающие в трубе.

Математическая модель. Для нахождения параметров напряженно-деформированного состояния выпишем основные уравнения в цилиндрической системе координат (см., например, [11]), из которых в дальнейшем будет получено основное дифференциальное уравнение:

1) уравнение равновесия:

$$\frac{d\sigma_r(r)}{dr} + \frac{\sigma_r(r) - \sigma_\theta(r)}{r} = 0, \tag{1}$$

2) кинематические соотношения:

$$\varepsilon_r(r) = \frac{du(r)}{dr},\ \varepsilon_\theta(r) = \frac{u(r)}{r}, \tag{2}$$

3а) определяющие соотношения в плоско-деформированном случае:

$$\sigma_r(r) = \frac{E(r)}{1-\nu^2(r)}[\varepsilon_r(r) + \nu(r)\varepsilon_\theta(r)],\ \ \sigma_\theta(r) = \frac{E(r)}{1-\nu^2(r)}[\varepsilon_\theta(r) + \nu(r)\varepsilon_r(r)]. \tag{3}$$

3б) определяющие соотношения в плоско-напряженном случае:

$$\begin{aligned} \sigma_r(r) &= \frac{E(r)}{1-\nu(r)-\nu^2(r)}\{[1-\nu(r)]\varepsilon_r(r) + \nu(r)\varepsilon_\theta(r)\}, \\ \sigma_\theta(r) &= \frac{E(r)}{1-\nu(r)-\nu^2(r)}\{[1-\nu(r)]\varepsilon_\theta(r) + \nu(r)\varepsilon_r(r)\}. \end{aligned} \tag{4}$$

В соотношениях (1)-(4) $\sigma_r(r)$ и $\sigma_\theta(r)$ – радиальное и окружное напряжения, $\varepsilon_r(r)$ и $\varepsilon_\theta(r)$ – радиальная и окружная деформации, $u(r)$ – радиальное перемещение.

Из формул (1)-(3) или (1), (2), (4), в зависимости от состояния (плоско-деформированного или плоско-напряженного), можно получить математическую модель рассматриваемой задачи

а) в плоско-деформированном случае

$$\frac{d^2u(r)}{dr^2}+\left[\frac{K'(r)}{K(r)}+\frac{1}{r}\right]\frac{du(r)}{dr}+\left[\frac{K'(r)}{K(r)}\nu(r)-\frac{1}{r}+\nu'(r)\right]\frac{u(r)}{r}=0,$$
$$K(r)=\frac{E(r)}{1-\nu^2(r)}, \tag{5}$$

б) в плоско-напряженном случае

$$\frac{d^2u(r)}{dr^2}+\left[\frac{K'(r)}{K(r)}+\frac{1}{r}-\frac{\nu'(r)}{1-\nu(r)}\right]\frac{du(r)}{dr}+\left[\frac{K'(r)}{K(r)}\frac{\nu(r)}{1-\nu(r)}-\frac{1}{r}+\frac{\nu'(r)}{1-\nu(r)}\right]\frac{u(r)}{r}=0,$$
$$K(r)=\frac{E(r)}{1-\nu(r)-\nu^2(r)}. \tag{6}$$

Полученные уравнения следует дополнить краевыми условиями. Например, если внутри и снаружи заданы давления, то такие условия примут вид:

$$\sigma_r(r_{\text{in}})=P_{\text{in}},\quad \sigma_r(r_{\text{out}})=P_{\text{out}}. \tag{7}$$

Если же, например, внутри и снаружи труба взаимодействует с некоторым жестким телом (насажена на вал, закреплена в муфте и т.п.), то краевые условия будут следующими

$$u(r_{\text{in}})=u_{\text{in}},\quad u(r_{\text{out}})=u_{\text{out}}. \tag{8}$$

Здесь r_{in} – внутренний радиус трубы, r_{out} – внешний радиус трубы. Возможна и комбинация граничных условий.

В результате, математическая модель рассматриваемой задачи представляет дифференциальное уравнение (5) или (6) и два дополнительных краевых условия, например, (7) или (8).

Обзор имеющихся аналитических решений. Как уже было указано ранее, в ряде случаев дифференциальное уравнение (5) или (6) допускает построение аналитического решения. Укажем такие случаи.

Случай 1. Модуль Юнга линейно зависит от радиальной координаты (возрастает), а коэффициент Пуассона постоянен, т.е.

$$E(r)=kr+b,\quad \nu(r)\equiv\nu_0\quad (k>0). \tag{9}$$

Тогда уравнения (5) и (6) приводятся к виду

$$\frac{d^2u(r)}{dr^2}+\left(\frac{k}{kr+b}+\frac{1}{r}\right)\frac{du(r)}{dr}+\left(\frac{k\tilde{\nu}}{kr+b}-\frac{1}{r}\right)\frac{u(r)}{r}=0, \tag{10}$$

где $\tilde{\nu}=\nu_0$ в плоско-деформированном случае и $\tilde{\nu}=\nu_0/(1-\nu_0)$ в плоско-напряженном случае. Общее решение полученного дифференциального уравнения (10) (см. [1, 2]) имеет вид

$$u(r)=C_1F\left(\frac{\gamma}{2}+1,\frac{\gamma}{2}-1;\gamma;-\frac{b}{kr}\right)r^{-\gamma/2}+C_2F\left(-\frac{\gamma}{2}+2,-\frac{\gamma}{2};2-\gamma;-\frac{b}{kr}\right)r^{\gamma/2+1}, \tag{11}$$

где $\gamma=1+\sqrt{5-4\tilde{\nu}}$, а $F(\cdots)$ — гипергеометрические функции. Следует отметить, что при $k<0$ решение будет иметь аналогичный вид, однако в имеющихся работах это не отражено.

Случай 2. Модуль Юнга обладает степенной зависимостью от радиальной координаты, а коэффициент Пуассона постоянен, т.е.

$$E(r)=kr^m,\quad \nu(r)\equiv\nu_0\quad (k>0). \tag{12}$$

Тогда уравнения (5) и (6) приводятся к виду

$$\frac{d^2u(r)}{dr^2}+\frac{m+1}{r}\frac{du(r)}{dr}+\frac{m\tilde{\nu}-1}{r^2}u(r)=0, \tag{13}$$

где коэффициент $\tilde{\nu}$ определяется так же, как и в случае 1.

В [3-8] показано, что общее решение уравнения (13) представимо в виде

$$u(r)=\begin{cases} C_1 r^{m_1}+C_2 r^{m_2}, & 4+m^2-4m\tilde{\nu}>0,\\ (C_1+C_2\ln r)r^{-m/2}, & 4+m^2-4m\tilde{\nu}=0,\\ [C_1\cos(m_y\ln r)+C_2\sin(m_y\ln r)]r^{m_x}, & 4+m^2-4m\tilde{\nu}<0, \end{cases} \tag{14}$$

где

$$m_1=\frac{-m-\sqrt{4+m^2-4m\tilde{\nu}}}{2},\quad m_2=\frac{-m+\sqrt{4+m^2-4m\tilde{\nu}}}{2}, \tag{15}$$

$$m_{1,2}=m_x\pm i m_y \quad \text{в случае комплексных } m_{1,2}.$$

Отметим, что такая зависимость имеет физическое (механическое) ограничение на параметр k, который не может быть отрицательным (модуль Юнга всегда положителен). Отдельно упомянем случай $m=0$, т.е. когда модуль Юнга постоянен. Тогда задача приводится к известной задачи Ламе и из (14) и (15) следует, что

$$u(r)=\frac{C_1}{r}+C_2 r. \tag{16}$$

Случай 3. Возрастающая экспоненциальная зависимость модуля Юнга при постоянстве коэффициента Пуассона, т.е

$$E(r)=k\exp(\lambda r),\quad \nu(r)\equiv\nu_0\quad (k>0). \tag{17}$$

В работах [9, 10] представлено решение лишь для случая, когда $\lambda>0$, т.е. для возрастающего с ростом радиальной координаты модуля Юнга (в следующем разделе данный недостаток будет устранен). Уравнения (5) и (6) приводится к виду

$$\frac{d^2u(r)}{dr^2}+\left(\lambda+\frac{1}{r}\right)\frac{du(r)}{dr}+\left(\lambda\tilde{\nu}-\frac{1}{r}\right)\frac{u(r)}{r}=0, \tag{18}$$

а общее решение (18) выражается при помощи функций Уиттекера $\mathrm{M}_{\tilde{\nu}-1/2,1}(\lambda r)$ и $\mathrm{W}_{\tilde{\nu}-1/2,1}(\lambda r)$:

$$u(r)=\frac{C_1\mathrm{M}_{\tilde{\nu}-1/2,1}(\lambda r)+C_2\mathrm{W}_{\tilde{\nu}-1/2,1}(\lambda r)}{\sqrt{re^{\lambda r}}}. \tag{19}$$

Отметим, что для всех указанных случаев, после нахождения построения общего решения необходимо определить константы C_1 и C_2 из дополнительных условий, например, из (7) или (8).

Построение аналитического решения для экспоненциальной зависимости модуля Юнга. Как было указано выше, для случая экспоненциальной зависимости модуля Юнга от радиальной координаты ранее было приведено решение, когда данная зависимость является возрастающей. Ниже будет указан метод решения уравнения (18) и построено решение как для случая возрастающего модуля Юнга ($\lambda>0$), так и для случая убывающего модуля Юнга ($\lambda<0$).

В первую очередь, для построения решения произведем следующую замену переменных в уравнении (18)

$$x=pr,\quad u(r)=f_1(x)f_2(x). \tag{20}$$

Здесь x – новая переменная, p – постоянная, $f_1(x)$ и $f_2(x)$ – новые неизвестные функции. В результате мы получаем новое уравнение

$$\begin{aligned} &p^2 f_1(x)f_2''(x)+\left[2p^2 f_1'(x)+p\left(\lambda+\frac{p}{x}\right)f_1(x)\right]f_2'(x)+\\ &+\left[p^2 f_1''(x)+p\left(\lambda+\frac{p}{x}\right)f_1'(x)+\left(\lambda\tilde{\nu}-\frac{p}{x}\right)\frac{pf_1(x)}{x}\right]f_2(x)=0. \end{aligned} \tag{21}$$

Второе слагаемое в (21) исчезнет в случае, если выражение в квадратных скобках будет равно нулю. В этом случае

$$2p^2 f_1'(x) + p\left(\lambda + \frac{p}{x}\right) f_1(x) = 0$$

и тогда

$$f_1(x) = \frac{c_1}{\sqrt{x\exp(\lambda x / p)}}. \tag{22}$$

Подставляя (22) в (21), получим

$$f_2''(x) + \left[-\frac{\lambda^2}{4p^2} - \frac{3}{4x^2} + \frac{(\tilde{\nu} - 1/2)\lambda}{px}\right] f_2(x) = 0. \tag{23}$$

Для приведения уравнения (23) к уравнению Уиттекера произведем еще одну замену переменных

$$f_2(x) = y(s), \quad x = \begin{cases} ps/\lambda, & \lambda > 0, \\ -ps/\lambda, & \lambda < 0, \end{cases}. \tag{24}$$

где s – новая переменная.

Тогда уравнение (23) примет вид

$$\begin{aligned} \lambda > 0: \quad & y''(s) + \left[-\frac{1}{4} + \frac{\tilde{\nu} - 1/2}{s} - \frac{3}{4}\frac{1}{s^2}\right] y(s) = 0, \\ \lambda < 0: \quad & y''(s) + \left[-\frac{1}{4} + \frac{1/2 - \tilde{\nu}}{s} - \frac{3}{4}\frac{1}{s^2}\right] y(s) = 0. \end{aligned} \tag{25}$$

Таким образом, получены уравнения Виттекера с параметрами $\tilde{\nu} - 1/2{,}1$ для случая $\lambda > 0$ и $1/2 - \tilde{\nu}{,}1$ для случая $\lambda < 0$. Их общие решения имеют вид

$$\begin{aligned} \lambda > 0: \quad & y(s) = \tilde{C}_1 \mathrm{M}_{\tilde{\nu}-1/2,1}(s) + \tilde{C}_2 \mathrm{W}_{\tilde{\nu}-1/2,1}(s), \\ \lambda < 0: \quad & y(s) = \tilde{C}_1 \mathrm{M}_{1,\tilde{\nu}-1/2}(s) + \tilde{C}_2 \mathrm{W}_{1,\tilde{\nu}-1/2}(s), \end{aligned} \tag{26}$$

где $M_{\dots}(s)$ и $W_{\dots}(s)$ – функции Уиттекера.

Сделав в (26) обратные замены переменных по формулам (20), (22), (24), получим общее решение для перемещений

$$\begin{aligned} \lambda > 0: \quad & u(r) = \frac{C_1 \mathrm{M}_{\tilde{\nu}-1/2,1}(\lambda r) + C_2 \mathrm{W}_{\tilde{\nu}-1/2,1}(\lambda r)}{\sqrt{r\exp(\lambda r)}}, \\ \lambda < 0: \quad & u(r) = \frac{C_1 \mathrm{M}_{1/2-\tilde{\nu},1}(-\lambda r) + C_2 \mathrm{W}_{1/2-\tilde{\nu},1}(-\lambda r)}{\sqrt{r\exp(\lambda r)}}. \end{aligned} \tag{27}$$

Постоянные C_1 и C_2 определяются из дополнительных условий.

Результаты и выводы. В статье приведен ряд аналитических решений краевой задачи для полого кругового радиально неоднородного цилиндра при некоторых видах неоднородности. Для экспоненциальной зависимости модуля Юнга от радиальной координаты при постоянном коэффициенте Пуассона подробно расписан порядок нахождения аналитического решения.

Так как при построении математических моделей разнообразных контактных и износо-контактных задач используются результаты решения граничных задач, то полученные результаты можно использовать при формулировке и решении ряда контактных задач для неоднородных цилиндрических тел.

Таким образом, приведенные и полученные аналитические решения краевых задач, а также последующие их применения в контактных задачах, предоставляют возможность вырабатывать рекомендации практического характера, которые можно будет использовать в научно-исследовательской, проектно-конструкторской и производственной практике. Это предоставляет возможность на этапе проектирования механизмов и конструкций вносить необходимые изменения и добиваться лучших характеристик конечного изделия.

Благодарности и финансирование. Исследование выполнено в рамках государственного задания (номер госрегистрации АААА-А20-120011690132-4).

Список литературы / References

1. Hongjun X., Zhifei S., Taotao Z. Elastic analyses of heterogeneous hollow cylinders // Mechanics Research Communications. 2006, vol. 33, pp. 681-691.
2. Zhifei S., Taotao Z., Hongjun X. Exact solutions of heterogeneous elastic hollow cylinders // Composite Structures. 2007, vol. 79, pp. 140-147.
3. Horgan C.O., Chan A.M. The pressurized hollow cylinder or disk problem for functionally graded isotropic linearly elastic materials // Journal of Elasticity. 1999, vol. 55, pp. 43-59.
4. Tutuncu N., Ozturk M. Exact solutions for stresses in functionally graded pressure vessels // Composites Part B: Engineering. 2001, vol. 32, pp. 683-686.
5. Jabbari M., Sohrabpour S., Elsam M.R. Mechanical and thermal stresses in a functionally graded hollow cylinder due to radially symmetric loads // International Journal of Pressure Vessels and Piping. 2002, vol. 79. Iss. 7, pp. 493-497.
6. Nikkhah M., Honarvar F., Dehghan E. Elastodynamic solution for plane-strain response of functionally graded thick hollow cylinders by analytical method // Applied Mathematics and Mechanics. 2011, vol. 32, iss. 2, pp. 189-202.
7. Ghannad M., Nejad M.Z. Elastic analysis of heterogeneous thick cylinders subjected to internal or external pressure using shear deformation theory // Acta Polytechnica Hungarica. 2012, vol. 9, iss. 6, pp. 117-136.
8. Sachdeva C., Padhee S.S. Functionally graded cylinders: Asymptotically exact analytical formulations // Applied Mathematical Modelling. 2018, vol. 54, pp. 782-802.
9. Hongjun X., Zhifei S., Taotao Z. Elastic analyses of heterogeneous hollow cylinders // Mechanics Research Communications. 2006, vol. 33, pp. 681-691.
10. Shariati M., Sadeghi H., Ghannad M., Gharooni H. Semi analytical analysis of FGM thick-walled cylindrical pressure vessel with longitudinal variation of elastic modulus under internal pressure // Journal of Solid Mechanics. 2015, vol. 7, pp. 131-145.
11. Тимошенко С.П., Гудиер Дж. Теория упругости. – М.: Наука, 1975. – 576 с.

   11. Timoshenko S.P., Goodier J.N. Theory of Elasticity. – M.: Science, 1975. – 576 p.

Сведения об авторах:	*Information about authors:*
Казаков Кирилл Евгеньевич – кандидат физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник	**Kazakov Kirill Evgenievich** – candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, senior researcher
kazakov-ke@yandex.ru	

Получена 29.11.2022