Казаков К.Е. Об учете сложных форм и поверхностных свойств контактирующих тел в задаче взаимодействия трубы и осесимметричной вставки // Транспортное, горное и строительное машиностроение: наука и производство. – 2022. – №16. – С. 31-36.

УДК 539.3 https://doi.org/10.26160/2658-3305-2022-16-31-36

ОБ УЧЕТЕ СЛОЖНЫХ ФОРМ И ПОВЕРХНОСТНЫХ СВОЙСТВ КОНТАКТИРУЮЩИХ ТЕЛ В ЗАДАЧЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ТРУБЫ И ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ВСТАВКИ

Казаков К.Е.

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук, Москва

Ключевые слова: контактная задача, интегральное уравнение, вязкоупругость, покрытие, неоднородность, шероховатость.

Аннотация. В работе описана постановка и решение задачи о контакте осесимметричной вязкоупругой трубы с внутренним тонким покрытием и жесткой осесимметричной вставки в случае, когда формы контактирующих поверхностей обладают шероховатостью, а упругие свойства покрытия зависят от осевой координаты. Для поставленной задачи выписана математическая модель, представляющая из себя смешанное интегральное уравнение, которая затем приведена к безразмерному виду. Решение полученного уравнение построено при помощи специального метода, позволяющего учесть все особенности взаимодействия, что дает возможность производить точные расчеты даже в случаях, когда формы поверхностей и свойства покрытия описываются сложными быстро изменяющимися функциями.

ON THE CONSIDERATION OF COMPLEX SHAPES AND SURFACE PROPERTIES OF CONTACTING BODIES IN THE PROBLEM OF INTERACTION OF A PIPE AND AN AXISYMMETRIC INSERT

Kazakov K.E.

Ishlinsky Institute for Problems in mechanics of Russian Academy of Sciences, Moscow

Keywords: contact problem, integral equation, viscoelasticity, coating, nonuniformity, roughness.

Abstract. The paper describes the formulation and solution of the problem of contact of an axisymmetric viscoelastic tube with an internal thin coating and a rigid axisymmetric insert in the case when the shapes of the contacting surfaces have roughness, and the elastic properties of the coating depend on the axial coordinate. For the given task, a mathematical model is written out, which is a mixed integral equation, which is then reduced to a dimensionless form. The solution of the resulting equation is constructed using a special method that allows taking into account all the features of the interaction, which makes it possible to make accurate calculations even in cases where the shapes of surfaces and coating properties are described by complex rapidly changing functions.

Введение. Вследствие того, что трубы достаточно широко используются в различных областях машиностроения и промышленности, расчеты, связанные с надежностью и долговечностью конструкций, использующих трубы, являются актуальными. В данной работе рассмотрена задача взаимодействия жесткой вставки и трубы с внутренним покрытием. Ранее были рассмотрены аналогичные задачи для вязкоупругой стареющей трубы с покрытием и жесткой вставкой, когда покрытие обладает неоднородностью, а одна из контактирующих поверхностей шероховата (см., например, [1, 2]), а также, когда покрытие однородно, но обе контактирующие поверхности шероховаты [3]. В данной работе рассмотрен случай, когда покрытие обладает неоднородностью, а поверхности покрытия и вставки – шероховатостью.

Постановка задачи. Рассмотрим трубу, изготовленную из вязкоупругого стареющего материала. Свойства такого материала меняются с течением времени и напряженно-деформированное состояние тела, изготовленного из этого материала, зависит, в том числе и от истории нагружения. Пусть такая труба служит для переноса внутри нее какой-либо среды, которая может взаимодействовать с самой трубой и разрушать ее изнутри (например, вызывать коррозию). Для предотвращения этого на внутреннюю поверхность трубы нанесен

дополнительный тонкий слой, который имеет свойства, отличные от свойств трубы. В ряде мест трубу необходимо крепить к каким-либо внешним конструкциям, в других местах необходимо соединять различные отрезки трубы, в третьих – просто подкреплять трубу внутренними вставками. Рассмотрим те участки, где внутрь трубы помещена жесткая вставка. Вследствие взаимодействия ее с трубой возникает напряженно-деформированное состояние. Так как труба изготовлена из вязкоупругого стареющего материала, оно изменяется с течением времени. Более того, будем учитывать те случаи, когда покрытие неоднородно, а профили контактирующих поверхностей обладают шероховатостями.

Схематично такое взаимодействие представлено на рисунке 1.

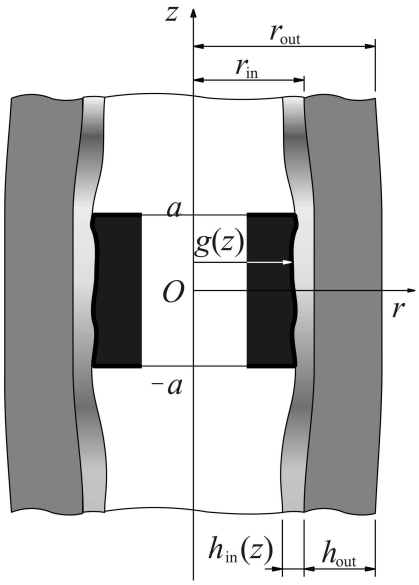

Рис. 1. Взаимодействие вставки и трубы с покрытием

Математическая модель. Обобщая выкладки, приведенные в работах [4, 5], можно получить математическую модель настоящей задачи, представляющей из себя интегральное уравнение с известной правой частью, содержащее операторы и с переменными пределами интегрирования и с постоянными:

$$\frac{1-\nu_{in}^2(z)}{E_{in}(z)}h_{in}(z)q(z,t)+\frac{2(1-\nu_{out}^2)}{\pi}\left[\frac{1}{E_{out}(t-\tau_{out})}\int_{-a}^{a}k_c\left(\frac{z-\zeta}{r_{in}}\right)q(\zeta,t)d\zeta-\right.$$

$$\left.-\int_{\tau_0}^{t}\frac{K(t,\tau)}{E_{out}(\tau-\tau_{out})}\int_{-a}^{a}k_c\left(\frac{z-\zeta}{r_{in}}\right)q(\zeta,\tau)d\zeta d\tau\right]=g(z)-[r_{in}-h_{in}(z)], \qquad (1)$$

$$z\in[-a,a],\quad t\geq\tau_0.$$

где $q(z,t)$ – контактные напряжения, возникающие в области взаимодействия вставки и трубы, $E_{in}(z)$ и $\nu_{in}(z)$ – модуль Юнга и коэффициент Пуассона покрытия, зависящие от осевой координаты, $E_{out}(t)$ – модуль Юнга основного слоя трубы, значение которого в общем случае зависит от времени, так как труба изготовлена из вязкоупругого стареющего материала, ν_{out} – коэффициент Пуассона трубы, который в настоящей работе считается постоянным, $K(t,\tau)$ – ядро ползучести материала трубы (оно может, например, иметь вид, описанный в монографиях [5–7]), $h_{in}(z)$ – толщина покрытия, зависящая от осевой координаты, r_{in} – внутренний радиус трубы, $g(z)$ – внешний радиус жесткой вставки, a – полуширина вставки, τ_0 – момент начала взаимодействия вставки и трубы с покрытием, τ_{out} – момент изготовления материала трубы (который, разумеется, не превосходит момента начала взаимодействия), $k_c(z)$ – ядро цилиндрической контактной задачи, имеющее вид

$$k_c(s)=\int_0^{\infty}\frac{L(u)}{u}\cos(su)du\,, \qquad (2)$$

в котором введена следующая функция

$$L(u)=\frac{u[f(k_r,u)D_1^2(u)+k_r^{-1}-k_r u^2C_1^2(u)]}{S(u)}\,. \qquad (3)$$

Здесь

$$S(u)=\frac{f(1,u)}{k_r}+f(k_r,u)+k_r u^4 A_1^2(u)-u^2 f(k_r,u)B_1^2(u)-k_r u^2 f(1,u)C_1^2(u)+$$

$$+f(1,u)f(k_r,u)D_1^2(u),\quad f(r,u)=\frac{2(1-\nu_{\text{in}})}{r}+u^2 r,\quad k_r=\frac{r_{\text{out}}}{r_{\text{in}}},$$

$$A_1(u)=\mathrm{I}_0(u)\mathrm{K}_0(k_r u)-\mathrm{I}_0(k_r u)\mathrm{K}_0(u),\quad B_1(u)=\mathrm{I}_0(u)\mathrm{K}_1(k_r u)+\mathrm{I}_1(k_r u)\mathrm{K}_0(u),$$

$$C_1(u)=\mathrm{I}_0(k_r u)\mathrm{K}_1(u)+\mathrm{I}_1(u)\mathrm{K}_0(k_r u),\quad D_1(u)=\mathrm{I}_1(u)\mathrm{K}_1(k_r u)-\mathrm{I}_1(k_r u)\mathrm{K}_1(u),$$

r_{out} – внешний радиус трубы, $\mathrm{I}_0(u)$, $\mathrm{I}_1(u)$, $\mathrm{K}_0(u)$, $\mathrm{K}_1(u)$ – модифицированные функции Бесселя первого и второго рода. Следует отметить, что все геометрические размеры тел задаются в недеформированном состоянии, т.е. в момент, когда тела еще не вступили во взаимодействие.

Математическая модель приведена для следующих предположений:

1) все деформации малы;

2) толщина покрытия значительно меньше всех остальных линейных размеров;

3) динамические эффекты отсутствуют;

4) материал покрытия мягче материала трубы;

5) между трубой и покрытием, а также между покрытием и вставкой осуществляется гладкий контакт;

6) область взаимодействия известна и совпадает с шириной вставки.

Вследствие того, что внешний радиус вставки больше внутреннего радиуса трубы в любой точке, после начала взаимодействия труба деформируется. Задача состоит в том, чтобы найти контактные напряжения в области взаимодействия, то есть определить $q(z,t)$ из уравнения (1).

Построение аналитического решения. Интегральное уравнение (1) может быть приведено к следующему безразмерному виду

$$c^*(t^*)m^*(z^*)q^*(z^*,t^*)+(\mathbf{I}-\mathbf{V}^*)\mathbf{F}^*q^*(z^*,t^*)=-g^*(z^*),\quad z^*\in[-1,1],\quad t^*\geq 1. \tag{4}$$

Для этого необходимо ввести следующие новые безразмерные коэффициенты и функции

$$\begin{gathered}
z^*=\frac{z}{a},\quad \zeta^*=\frac{\zeta}{a},\quad \tau_{\text{out}}^*=\frac{\tau_{\text{out}}}{\tau_0},\quad t^*=\frac{t}{\tau_0},\quad g^*(z^*)=\frac{r_{\text{in}}(z)-h_{\text{in}}-g(z)}{a},\\
c^*(t^*)=\frac{E_{\text{out}}(t-\tau_{\text{out}})}{E_0},\ m^*(z^*)=\frac{E_0[1-\nu_{\text{in}}^2(z)]h_{\text{in}}(z)}{2E_{\text{in}}(z)(1-\nu_{\text{out}}^2)a},\ q^*(z^*,t^*)=\frac{2(1-\nu_{\text{out}}^2)q(z,t)}{E_{\text{out}}(t-\tau_{\text{out}})},\\
\mathbf{V}^*f(t^*)=\int_1^{t^*}K(t^*,\tau^*)f(\tau^*)d\tau^*,\quad \mathbf{F}^*f(z^*)=\int_{-1}^{1}k^*(z^*,\zeta^*)f(\zeta^*)d\zeta^*,\\
k^*(z^*,\zeta^*)=\frac{1}{\pi}k_{\text{c}}\left(\frac{z-\zeta}{r_{\text{in}}}\right),\quad K^*(t^*,\tau^*)=K(t-\tau_{\text{out}},\tau-\tau_{\text{out}})\tau_0.
\end{gathered} \tag{5}$$

В уравнении (4) оператор $\mathbf{I}$ – это тождественный оператор, а размерная константа E_0 должна иметь тот же порядок, что и $E_{\text{in}}(z)$, и может быть найдена, например, как $E_0=E_{\text{in}}(0)$.

Теперь задача состоит в том, чтобы из безразмерного смешанного интегрального уравнения (4) определить функцию $q^*(z^*,t^*)$, а затем при помощи обратной замены переменных (5) найти исходную функцию $q(z,t)$, описывающую контактные давления в области взаимодействия.

Можно заметить, что полученное интегральное уравнение (4) совпадает с уравнением (5) из статьи [1], если предположить, что в правой его части $\alpha(t)=0$ и $\delta(t)=0$. Более того,

ядра операторов Фредгольма в настоящей статье (формула (2)) и в [1] имеют схожие свойства (симметричные, положительно определенные), а функции $L(u)$ (формула (3)) – аналогичные асимптотики: $\lim\limits_{u\to 0} L(u)/u = \text{const} > 0$, $\lim\limits_{u\to\infty} L(u) = 1$, $L(u) > 0$. Это позволяет нам при построении решения задачи, описанной в настоящей статье, использовать те же подходы и методы, что и в работе [1]. Более того, это дает возможность сразу выписать решение в безразмерном виде, однако приведем всё же основные этапы построения решения.

Во-первых, представим неизвестную функцию $q^*(z^*,t^*)$ в виде

$$q^*(z^*,t^*) = \frac{\tilde{q}(z^*,t^*)}{\sqrt{m^*(z^*)}} - \frac{g^*(z^*)}{c^*(t^*)m^*(z^*)}, \tag{6}$$

в результате чего уравнение (4) преобразуется к виду

$$c^*(t^*)\tilde{q}(z^*,t^*) + (\mathbf{I}-\mathbf{V}^*)\tilde{\mathbf{F}}\tilde{q}(z^*,t^*) = (\mathbf{I}-\mathbf{V}^*)\frac{\tilde{g}(z)}{c^*(t^*)\sqrt{m^*(z^*)}}, \quad z^* \in [-1,1], \quad t^* \ge 1, \tag{7}$$

где

$$\tilde{g}(z) = \mathbf{F}^*\frac{g^*(z^*)}{m^*(z^*)}, \quad \tilde{\mathbf{F}}f(z^*) = \int_{-1}^{1}\frac{k^*(z^*,\zeta^*)}{\sqrt{m^*(z^*)m^*(\zeta^*)}}f(\zeta^*)d\zeta^*. \tag{8}$$

Здесь $\tilde{q}(z^*,t^*)$ – новая неизвестная функция. Следует заметить, что новый оператор Фредгольма $\tilde{\mathbf{F}}$ также как и старый $\mathbf{F}^*$ является симметричным и положительно определенным, что видно из замены (8). В отличие от уравнения (4) теперь числитель правой части (7) обладает гладкостью, то есть его можно эффективно разложить по системе многочленов (под эффективностью разложения здесь понимается возможность удержания относительно небольшого количества членов ряда для достаточно точного описания разлагаемой функции, что важно при численных расчетах).

Вторым шагом является построение решения уравнения (7) в виде функционального ряда по специальной системе ортонормированных базисных функций $\{p_j^0(z)\}_{j=0,1,2,\ldots}$ в классе непрерывных по времени функций в гильбертовом пространстве $L_2[-1,1]$ (см., например, [8]), которая учитывает вид ядра оператора Фредгольма $\tilde{\mathbf{F}}$, вид правой части уравнения (7) и представление решения (6). Такая система базисных функций может быть построена при помощи ортогонализации и нормировки в $L_2[-1,1]$ следующей системы линейно независимых функций

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{m^*(z^*)}}, \frac{z^*}{\sqrt{m^*(z^*)}}, \frac{(z^*)^2}{\sqrt{m^*(z^*)}}, \ldots\right\}.$$

Ортонормирование следует выполнять, применяя следующее скалярное произведение в $L_2[-1,1]$: $(f_1(z), f_2(z)) = \int_{-1}^{1} f_1(z)f_2(z)dz$.

Затем следует построить собственные функции оператора $\tilde{\mathbf{F}}$ на основании базиса, полученного на втором шаге. Они также будут составлять базис пространства $L_2[-1,1]$ [9]. Это позволит привести результирующую систему уравнений для функциональных коэффициентов к диагональному виду.

Приведем теперь окончательные формулы для нахождения безразмерной функции $q^*(z^*,t^*)$:

$$q^*(z^*,t^*) = \frac{1}{m^*(z^*)}\left[\sum_{k=0}^{\infty} f_k^*(t^*)\varphi_k(z^*) - \frac{g^*(z^*)}{c^*(t^*)}\right], \quad z^* \in [-1,1], \quad t^* \ge 1, \tag{9}$$

где

$$\varphi_k(z^*)=\sum_{m=0}^{\infty}\psi_m^{(k)}p_m(z^*),\quad f_k^*(t^*)=g_k\left\{\frac{1}{c^*(t^*)[c^*(t^*)+\gamma_k]}+\int_1^{t^*}\frac{g_kR_k(t^*,\tau^*)d\tau^*}{c^*(t^*)[c^*(t^*)+\gamma_k]}\right\},$$

$$g_k=\sum_{i=0}^{\infty}\psi_i^{(k)}\sum_{l=0}^{\infty}R_{il}\int_{-1}^{1}\frac{p_l(\zeta^*)g^*(\zeta^*)}{m^*(\zeta^*)}d\zeta^*,\quad k=0,1,2,\ldots, \tag{10}$$

$$R_{il}=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{k_c^*(z^*,\zeta^*)p_i(z^*)p_l(\zeta^*)}{m^*(z^*)m^*(\zeta^*)}dz^*d\zeta^*,\quad i,l=0,1,2,\ldots,$$

ядра $R_k(t^*,\tau^*)$ являются резольвентами ядер $\gamma_kK^*(t^*,\tau^*)/[c^*(t^*)+\gamma_k]$, константы γ_k и $\psi_i^{(k)}$ находятся из решения спектральной задачи

$$\sum_{l=0}^{\infty}R_{il}\psi_l^{(k)}=\gamma_k\psi_i^{(k)},\quad i,k=0,1,2,\ldots, \tag{11}$$

а система многочленов $\{p_j(z)\}_{j=0,1,2,\ldots}$ может быть найдена, например, из соотношений [10]

$$p_j(z^*)=\frac{1}{\sqrt{d_{j-1}d_j}}\begin{vmatrix}J_0 & J_1 & \cdots & J_j\\ J_1 & J_2 & \cdots & J_{j+1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & z^* & \cdots & (z^*)^j\end{vmatrix},\quad d_i=\begin{vmatrix}J_0 & J_1 & \cdots & J_i\\ J_1 & J_2 & \cdots & J_{i+1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ J_i & J_{i+1} & \cdots & J_{2i}\end{vmatrix}, \tag{12}$$

$$J_i=\int_{-1}^{1}\frac{(\zeta^*)^i}{m^*(\zeta^*)}d\zeta^*,\quad i=0,1,2,\ldots,\quad z^*\in[-1,1],\quad t^*\geq 1.$$

Эта система многочленов связана системой ортонормированных функций $\{p_j^0(z)\}_{j=0,1,2,\ldots}$ при помощи выражения $p_j^0(z^*)=p_j(z^*)/\sqrt{m^*(z^*)}$ ($j=0,1,2,\ldots$).

Выражение для размерных контактных напряжений можно получить, если в формуле (10) сделать обратную замену переменных при помощи соотношений (5):

$$q(z,t)=\frac{E_{\text{in}}(z)}{[1-\nu_{\text{in}}^2(z)]h_{\text{in}}(z)}\left[\sum_{k=0}^{\infty}f_k(t)\sum_{m=0}^{\infty}\psi_m^{(k)}p_m\left(\frac{z}{a}\right)+g(z)-(r_{\text{in}}-h_{\text{in}}(z))\right],$$
$$z\in[-a,a],\quad t\geq\tau_0 \tag{13}$$

где $f_k(t)=aE_{\text{out}}(t-\tau_{\text{out}})E_0^{-1}f_k^*(t/\tau_0),\quad t\geq\tau_0$.

Результаты и выводы. Полученное выражение (13) совместно с формулами (10)-(12) позволяет находить контактные давления, возникающие в области взаимодействия жесткой вставки и трубы с внутренним покрытием. Следует заметить, что как в выражении (10), так и в выражении (13), функции, связанные со сложными свойствами и профилями контактирующих тел выделены отдельными множителями и слагаемыми (безразмерные функции $g^*(z^*)$, $m^*(z^*)$ и размерные $g(z)$, $h_{\text{in}}(z)$, $E_{\text{in}}(z)$, $\nu_{\text{in}}(z)$), а все остальные функции являются непрерывными и достаточно гладкими. Это позволяет производить эффективные вычисления даже в случаях, когда формы контактирующих поверхностей и свойства внутреннего покрытия описываются быстро изменяющимися функциями. При проведении реальных расчетов достаточно ограничиться 20–30 слагаемыми из ряда, стоящего в правой части выражения (13), чтобы получить решение, с достаточной точностью описывающее решение интегрального уравнения (1). Остальные известные подходы (разложение по стандартным базисным функциям) не позволяют достичь подобных результатов. Применяя их при расчете необходимо оставлять большое количество членов ряда, что вызывает сложности, так как при вычислениях накапливается большая погрешность.

Благодарности и финансирование. Исследование выполнено в рамках государственного задания (номер госрегистрации АААА-А20-120011690132-4).

Список литературы

1. Kazakov K.E., Kurdina S.P. Interaction of viscoelastic tube with inner nonuniform coating of variable thickness and rigid cylindrical insert // Key Engineering Materials. 2021, vol. 894, pp. 67-71.
2. Kazakov K.E., Kurdina S.P. Wear problem for tube with thin nonuniform inner coating and rigid insert with complex profile // E3S Web of Conferences. 2021, vol. 243, p. 02008.
3. Kazakov K.E. On accounting complex forms of surfaces in the task of interaction of a rigid insert and pipe with internal coating // Procedia Structural Integrity. 2022, vol. 40, pp. 201-206.
4. Манжиров А.В., Черныш В.А. Контактная задача для слоистого неоднородного стареющего цилиндра, подкрепленного жестким кольцом // Прикладная механика и техническая физика. – 1990. – №6. – С. 101-109.
5. Арутюнян Н.Х., Манжиров А.В. Контактные задачи теории ползучести. – Ереван: Изд-во НАН РА, 1999. – 318 с.
6. Арутюнян Н.Х. Некоторые вопросы теории ползучести. – М.-Л.: Гостехиздат, 1952. – 324 с.
7. Арутюнян Н.Х., Колмановский В.Б. Теория ползучести неоднородных тел. – М.: Наука, 1983. – 336 с.
8. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1981. – 512 с.
9. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1976. – 496 с.
10. Сегё Г. Ортогональные многочлены. – М.: Физматлит, 1962. – 500 с.

References

1. Kazakov K.E., Kurdina S.P. Interaction of viscoelastic tube with inner nonuniform coating of variable thickness and rigid cylindrical insert // Key Engineering Materials. 2021, vol. 894, pp. 67-71.
2. Kazakov K.E., Kurdina S.P. Wear problem for tube with thin nonuniform inner coating and rigid insert with complex profile // E3S Web of Conferences. 2021, vol. 243, p. 02008.
3. Kazakov K.E. On accounting complex forms of surfaces in the task of interaction of a rigid insert and pipe with internal coating // Procedia Structural Integrity. 2022, vol. 40, pp. 201-206.
4. Manzhirov A.V., Chernysh V.A. Contact problem for a layered inhomogeneous aging cylinder reinforced by a rigid ring // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 1990, no. 6, pp. 101-109.
5. Arutyunyan N.Kh., Manzhirov A.V. Contact Problems of the Theory of Creep. – Erevan: Publ. house of NAS RA, 1999. – 318 p.
6. Arutyunyan N.Kh. Several Problems of the Theory of Creep. – M.-L.: Gostekhizdat, 1952. – 324 p.
7. Arutyunyan N.Kh, Kolmanovskii V.B. Creep Theory of Inhomogeneous Solids. – M.: Science, 1983. – 336 p.
8. Vladimirov V.S. Equations of Mathematical Physics. – M.: Science, 1981. – 512 p.
9. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis. – M.: Nauka, 1976. – 496 p.
10. Szegö G. Orthogonal Polynomials. – M.: Fizmatlit, 1962. – 500 p.

Сведения об авторах:	*Information about authors:*
Казаков Кирилл Евгеньевич – кандидат физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник	**Kazakov Kirill Evgenievich** – candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, senior researcher
kazakov-ke@yandex.ru	

Получена 08.09.2022