Елисеев А.В., Кузнецов Н.К., Николаев А.В. Концепция динамических инвариантов в оценке вибрационных полей рабочих органов вибрационных технологических машин // Транспортное, горное и строительное машиностроение: наука и производство. – 2022. – №16. – С. 18-23.

УДК 519.71, 629.4.015, 62-752, 534.015 https://doi.org/10.26160/2658-3305-2022-16-18-23

КОНЦЕПЦИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ИНВАРИАНТОВ В ОЦЕНКЕ ВИБРАЦИОННЫХ ПОЛЕЙ РАБОЧИХ ОРГАНОВ ВИБРАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ МАШИН

Елисеев А.В.[1,2], Кузнецов Н.К.[2], Николаев А.В.[1]
[1]Иркутский государственный университет путей сообщения, Иркутск;
[2]Иркутский национальный исследовательский технический университет, Иркутск

Ключевые слова: структурное математическое моделирование, динамика вибрационных взаимодействий, связность силовых возмущений, формы взаимодействий элементов системы, динамические инварианты, вибрационное поле.
Аннотация. Развивается концепция динамических инвариантов для оценки многообразия состояний и форм взаимодействий элементов механических колебательных систем, включающих в состав твердое тело. Ставится задача оценки динамических особенностей объекта системы, находящейся в условиях связных вибрационных нагружений силовой природы. Разработан подход оценки динамических состояний твердого тела в условиях связных возмущений. Показано, что коэффициент связности двух возмущений может быть интерпретирован как координата точки приложения одного возмущения. В рамках предложенной интерпретации множество точек твердого тела может быть разбито на области, точки которых обладают одинаковыми динамическими характеристиками. Созданный подход к оценке динамических состояний обладает потенциалом разработки технологий управления вибрационным полем рабочих органов технологическим машин на основе обобщенных представлений о динамических состояниях.

THE CONCEPT OF DYNAMIC INVARIANTS IN THE EVALUATION OF THE VIBRATION FIELD OF THE WORKING BODY OF A VIBRATING TECHNOLOGICAL MACHINE

Eliseev A.V.[1,2], Kuznetsov N.K.[2], Nikolaev A.V.[1]
[1]Irkutsk State Transport University, Irkutsk;
[2]Irkutsk National Research Technical University, Irkutsk

Keywords: structural mathematical modeling, dynamics of vibrational interactions, connectivity of force disturbances, forms of interactions of system elements, dynamic invariants, vibrational field.
Abstract. The task of assessing the dynamic states and forms of dynamic interactions of a system element under conditions of coherent vibrational loads of a force nature is set. An approach for estimating the dynamic states of a solid under conditions of connected perturbations has been developed. It is shown that the coefficient of connectivity of force disturbances can be interpreted as the coordinate of the point of application of an external disturbance. Within the framework of the proposed interpretation of the connectivity coefficient using the coordinate of the force perturbation application, the set of points of a solid body can be divided into regions whose points have the same dynamic characteristics.

Введение. В настоящее время разработка методов управления вибрационными полями рабочих органов технологических машин обладает существенным потенциалом в плане увеличения эффективности реализации производственных процессов [1-3]. Существенное значение приобретают методы структурного математического моделирования, в рамках которых механической колебательной системе, используемой в качестве расчетной схемы технического объекта, сопоставляется схема эквивалентной в динамическом отношении системы автоматического управления [4-6]. Определенное развитие получили структурные методы в моделировании динамических состояний технических объектов, являющихся рабочими органами вибрационных технологических машин [7-9]. Вместе с тем, ряд вопросов требует детализации представлений, позволяющих охарактеризовать совокупность динамических состояний рабочего органа вибрационной технологической машины в зависимости от особенностей приложения силового возмущения.

Предлагаемая статья посвящена вопросам оценки динамических состояний и форм динамических взаимодействий элементов механической колебательной системы в виде твердого тела, находящегося в условиях связных вибрационных нагружений силовой природы.

I. Основные положения. Постановка задачи. Рассматривается механическая колебательная система, образованная твердым телом, обладающим массой M и моментом инерции J, установленном на упругие элементы k_1, k_2 (рис. 1). Предполагается, что система совершает малые вынужденные установившиеся колебания относительно положение статического равновесия под воздействием гармонических синфазных силовых возмущений Q_1, Q_2, приложенных к точкам A и B. Центр тяжести находится в точке O отрезка AB на расстоянии l_1 и l_2 от точек A и B. В качестве обобщённых координат y_1, y_2 рассматриваются смещения точек A и B относительно положения статического равновесия. Наравне с системой координат y_1, y_2 рассматривается система обобщенных координат φ, z, где φ – угол поворота твердого тела относительно центра тяжести, а z – величина вертикального смещения центра тяжести относительно положения статического равновесия.

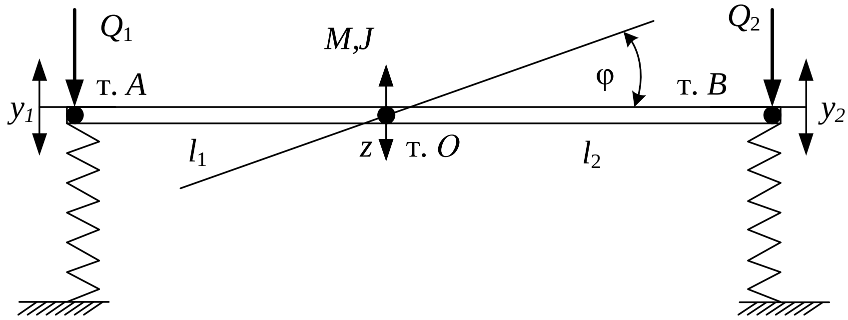

Рис. 1. Механическая колебательная система

Предполагается, что внешние синфазные силовые возмущения Q_1, Q_2 зависимы:

$$Q_2=\gamma Q_1, \tag{1}$$

где γ – коэффициент связности.

Приложение силовых возмущений Q_1 и Q_2 на различных частотах приводит к реализации динамических состояний, включающих критические состояния в виде режимов резонанса и режимов обнуления амплитуд колебания точки твердого тела, динамические состояния которой оцениваются.

Задача заключается в определении совокупности состояний и форм динамических взаимодействий элементов механической колебательной системы, образованной твердым телом, в зависимости от коэффициента связности внешних возмущений.

II. Математическая модель. Система дифференциальных уравнений движения твердого тела может быть построена в рамках формализма уравнений Лагранжа 2-ого рода. Потенциальная и кинетическая энергии колебательной системы могут быть выражены в координатах y_1, y_2, φ, z:

$$\Pi=\frac{1}{2}k_1y_1^2+\frac{1}{2}k_2y_2^2, \qquad (2) \qquad\qquad \mathrm{T}=\frac{1}{2}M\dot{z}^2+\frac{1}{2}J\varphi^2. \qquad (3)$$

Используемые системы координат $\{y_1, y_2\}$ и $\{\varphi, z\}$ связаны соотношениями

$$\begin{cases} y=ay_1+by_2 \\ \varphi=c(y_2-y_1) \end{cases} \text{ и } \begin{cases} y_1=y-l_1\varphi \\ y_2=y+l_2\varphi \end{cases}, \tag{4}$$

где $a=\dfrac{l_2}{l_1+l_2}; b=\dfrac{l_1}{l_1+l_2}; c=\dfrac{1}{l_1+l_2}$.

Приведенная к координатам $\{y_1, y_2\}$ на основе известных методов [4] механическая колебательная система (рис. 1) может быть представлена в виде структурной схемы (рис. 2).

Динамические особенности движения твердого тела под действием внешних возмущений могут быть выражены с помощью передаточных отношений системы и межпарциальных связей [4].

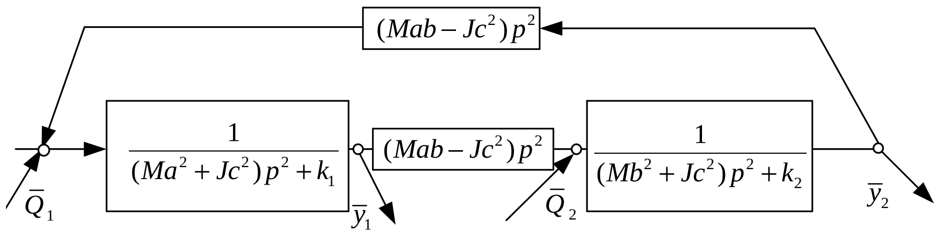

Рис. 2. Структурная схема механической колебательной системы (рис. 1), $p=j\omega$ – комплексная переменная, $j=\sqrt{-1}$, ω – частота внешнего возмущения, символ «-» над переменной обозначает изображение Лапласа [10]

III. Оценка динамических состояний механической колебательной системы на основе передаточных отношений системы

1. Для оценки динамического состояния в точке B (рис. 1) на основе структурной схемы при условии связности (1) может быть построена передаточная функция системы:

$$W_{21}(p)=\frac{\bar{y}_2}{\bar{Q}_1}\Bigg|_{\bar{Q}_1\neq 0}=\frac{((Ma^2+Jc^2)p^2+k_1)\gamma-(Mab-Jc^2)p^2}{A(p)}, \quad (5)$$

где $A(p)=((Ma^2+Jc^2)p^2+k_1)((Mb^2+Jc^2)p^2+k_2)-((Mab-Jc^2)p^2)^2$ представляет собой характеристический многочлен системы.

Амплитудно-частотная характеристика передаточной функции (5) имеет вид:

$$A_{21}(\gamma,\omega)=\frac{(-(Ma^2+Jc^2)\omega^2+k_1)\gamma+(Mab-Jc^2)\omega^2}{(-(Ma^2+Jc^2)\omega^2+k_1)(-(Mb^2+Jc^2)\omega^2+k_2)-((Mab-Jc^2)\omega^2)^2}. \quad (6)$$

Собственные частоты σ_1, σ_2 системы определяются из биквадратного характеристического уравнения $A(j\omega)=0$. Парциальные частоты n_1 и n_2 определяются выражениями:

$$n_1^2=\frac{k_1}{Ma^2+Jc^2}, \quad (7) \qquad n_2^2=\frac{k_2}{Mb^2+Jc^2}. \quad (8)$$

На основе числителя амплитудно-частотной характеристики (6) может быть определена так называемая частотная функция обнуления амплитуды колебания координаты y_2:

$$\omega^2(\gamma)=\frac{k_1\gamma}{(Ma^2+Jc^2)\gamma-(Mab-Jc^2)}. \quad (9)$$

Для каждого фиксированного коэффициента связности γ существенные особенности динамических взаимодействий элементов системы, выражающиеся в количествах резонансов, режимов динамического гашения, положительных и отрицательных форм динамических взаимодействий, могут быть определены с учетом расположения σ_1, σ_2 частот собственных колебаний системы относительно частоты $\omega^2(\gamma)$ обнуления амплитуды колебания координаты y_2 (9).

2. Для построения конкретной совокупности динамических инвариантов может быть рассмотрена механическая колебательная система в предположении, что для собственных частот σ_1, σ_2 системы и парциальных частот n_1 и n_2 выполнены условия:

$$\sigma_1 < \min\{n_1, n_2\} < \max\{n_1, n_2\} < \sigma_2. \quad (10)$$

В этом случае на основе частотной функция могут быть определены значение коэффициента связности γ_0, в котором частотная функция (9) обнуляется, и значение γ_{kp}, в котором частотная функция (9) терпит разрыв второго рода:

$$\omega^2(\gamma_0)=0, \quad (11) \qquad \gamma_{kp}=\frac{Mab-Jc^2}{Ma^2+Jc^2}. \quad (12)$$

В свою очередь, совпадение частотной функции обнуления $\omega^2(\gamma)$ с собственными частотами σ_1, σ_2 механической колебательной системы определяет особенные значениями γ_1, γ_2 коэффициента связности:

$$\omega^2(\gamma_1)=\sigma_1^2, \quad (13) \qquad \omega^2(\gamma_1)=\sigma_1^2. \quad (14).$$

Совокупность динамических инвариантов позволяет охарактеризовать бесконечное семейство взаимодействий элементов системы в виде амплитудно-частотных характеристик, зависящего от коэффициента связности γ, с помощью конечного набора динамических инвариантов, обладающими характеристиками вида $S_l^k F_n^m$, где k – количество резонансов, l – количество режимов обнуления амплитуды колебания координаты объекта, динамическое состояние которого оценивается, m – количество положительных форм взаимодействий, n – количество отрицательных форм динамических взаимодействий, $J_{k+l+m+n}$ – интегральная характеристика (табл. 1).

Табл. 1. Динамические инварианты в зависимости от коэффициента связности γ

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
I	$\gamma<\gamma_1$	$\gamma=\gamma_1$	$\gamma_1<\gamma<\gamma_0$	$\gamma=\gamma_0$	$\gamma_0<\gamma<\gamma_{kp}$	$\gamma=\gamma_{kp}$	$\gamma_{kp}<\gamma<\gamma_2$	$\gamma=\gamma_2$	$\gamma_2<\gamma$
II	$S_1^2F_2^2$	$S_0^1F_1^1$	$S_1^2F_2^2$	$S_1^2F_1^2$	$S_0^2F_1^2$	$S_0^2F_1^2$	$S_1^2F_2^2$	$S_0^1F_1^1$	$S_1^2F_2^2$
III	J_7	J_3	J_7	J_6	J_5	J_5	J_7	J_3	J_7

Каждый динамический инвариант отображает частотный характер взаимодействий элементов механической колебательной системы, реализующийся в выбранной точке твердого тела в зависимости от коэффициента связности внешних возмущений.

Вместе с тем, коэффициент связности γ, отражающий зависимость двух внешних возмущений Q_1 и Q_2, может быть интерпретирован координатой точки приложения возмущения Q_0, к которой, за исключением случая, когда силовые возмущения образую пару, может быть приведена данная совокупность возмущений. Возмущающее воздействие Q_0 с физической точки зрения может отображать особенности инерционного возбуждения колебаний рабочего органа технологических вибрационных машин [4].

IV. Интерпретация динамического состояния объекта в зависимости от точки приложения возмущающего воздействия. Рассматривается механическая колебательная система (рис. 1), в которой силовые возмущения Q_1 и Q_2 приведены к одному Q_0 (рис. 4).

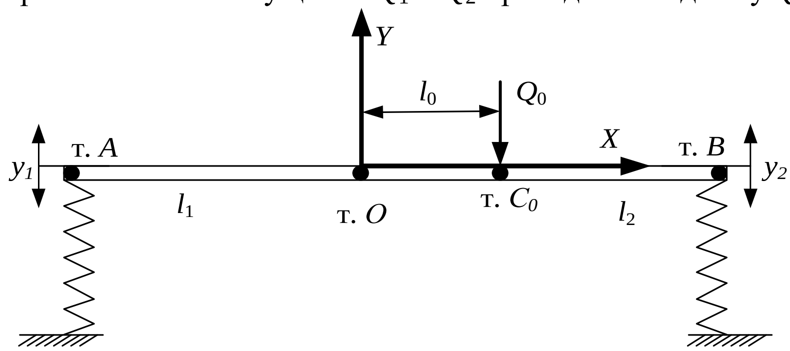

Рис. 4. Механическая колебательная система: Q_0 – приведенное к точке C_0 силовое возмущение

Силовое возмущение Q_0 может быть найдено из условий совпадения главного вектора и главного момента систем сил $\{Q_1, Q_2\}$ и $\{Q_0\}$ относительно центра O:

$$\begin{cases} Q_0 = Q_2 + Q_1 \\ -l_0 Q_0 = -l_2 Q_2 + l_1 Q_1 \end{cases}, \tag{15}$$

где $Q_2=\gamma Q_1$ – связные силовые возмущения.

В случае, если совокупность сил $\{Q_1, Q_2\}$ не образует пару $\{Q_1, -Q_1\}$, то она может быть представлена одной силой $Q_0 = (\gamma+1)Q_1$, приложенной к точке C_0, которая удалена от центра O на расстояние l_0:

$$l_0 = \frac{l_2\gamma - l_1}{1+\gamma}. \tag{16}$$

Координата l_0 точки C_0 приложения приведенной силы Q_0 зависит от коэффициента связности γ и может рассматриваться как функция $l_0(\gamma)$, график которой терпит разрыв второго рода для значения $\gamma= -1$.

На основе (16) функциональной зависимости $l_0(\gamma)$ особенные точки γ_1, γ_0, γ_{kp}, γ_2 могут быть отображены в особенные координаты $l_{01}= l_0(\gamma_1)$, $l_{00}=l_0(\gamma_0)$, $l_{0\text{kp}}=l_0(\gamma_{\text{kp}})$, $l_{02}=l_0(\gamma_2)$ (рис. 5). Таким образом, интервалам и особенным значениям коэффициента связности γ могут быть сопоставлены интервалы и особенные координаты l_0 точки приложения силы Q_0 с учетом разрыва второго рода в точке $\gamma= -1$.

Вместе с тем, каждой координате l_0 приложения силового возмущения Q_0 можно сопоставить коэффициент связности γ внешних возмущений:

$$\gamma = \frac{l_1 + l_0}{l_2 - l_0}. \qquad (17)$$

Зависимость коэффициента связности γ от координаты l_0 приложения силового возмущения Q_0 представляет собой зависимость с точкой разрыва $l_0= l_2$.

Обратное отображение $\gamma(l_0)$, сопоставляющее координате l_0 значение коэффициента связности, позволяет определить «распределение» динамических инвариантов по «поверхности» твердого тела (табл. 2).

Табл. 2. Динамические инварианты в зависимости от координаты l_0

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
I	$l_0<-l_1$	$l_0= -l_1$	$-l_1< l_0< l_{0kp}$	$l_0= l_{0kp}$	$l_{0\text{kp}}< l_0< l_{02}$	$l_0= l_{02}$	$l_{02}< l_0< l_2$	$l_2< l_0< l_{01}$	$l_0= l_{01}$	$l_{01}<l_0$
II	$S_1^2F_2^2$	$S_1^2F_1^2$	$S_0^2F_1^2$	$S_0^2F_1^2$	$S_1^2F_2^2$	$S_0^1F_1^1$	$S_1^2F_2^2$	$S_1^2F_2^2$	$S_0^1F_1^1$	$S_1^2F_2^2$
III	J_7	J_6	J_5	J_5	J_7	J_3	J_7	J_7	J_3	J_7

Особенности «распределения» динамических инвариантов определяются значениями координат l_{01}, l_{00}, l_{0kp}, l_{02}. На интервалах и особенных точках координаты l_0 могут быть определены значения интегральных характеристик динамических инвариантов. Так на интервале $-l_1<l_0<l_{0kp}$ реализуется динамический инвариант $S_0^2F_1^2$, который исключает возможность реализации в точке B режима обнуления амплитуды колебания. В точке $l_0=l_{02}$ реализуется режим $S_0^1F_1^1$, который характерен для систем с одной степенью свободы.

Таким образом, динамическое многообразие области твердого тела, в данном случае представленной фиксированной точкой, проявляющееся в результате приложения возмущающих воздействий на различных частотах, может быть определено конечным набором динамических инвариантов, «распределенных» по поверхности твердого тела.

Заключение. В рамках методологии структурного математического моделирования рассмотрена задача оценки разнообразия динамических состояний области твердого тела в зависимости от коэффициента связности внешних возмущений силовой природы. Показано, что коэффициент связности с физической точки зрения может быть интерпретирован как координата точки приложения силового возмущения. Предложенная интерпретация позволяет обнаруживать на твердом теле области, приложение к которым возмущающих воздействий приводит к проявлению в заданной точки, динамическое состояние которой оценивается, различных форм и состояний динамических взаимодействий, которые в свою очередь, могут быть охарактеризованы конечным набором динамических инвариантов.

Предложенный подход оценки динамических состояний фиксированной точки твердого тела в зависимости от приложения внешнего возмущения может быть расширен для оценки разнообразия динамических состояний произвольной области твердого тела.

Разработанная методика обладает потенциалом создания на её основе технологии управления вибрационным полем рабочего органа вибрационной технологической машины на основе концепции динамических инвариантов.

Список литературы

1. Harris C.M., Crede C.E. Shock and Vibration Handbook. – New York: McGraw – Hill Book Co, 2002. – 1457 p.
2. Пановко Г.Я. Динамика вибрационных технологических процессов. – М.-Ижевск: НИЦ «Регуларная и хаотическая динамика», Институт компьютерных технологий, 2006. – 176 с.
3. Копылов Ю.Р. Динамика процессов виброударного упрочнения: монография. – Воронеж: ИПЦ «Научная книга», 2011. – 568 с.

4. Елисеев С.В. Прикладной системный анализ и структурное математическое моделирование (динамика транспортных и технологических машин: связность движений, вибрационные взаимодействия, рычажные связи): монография. – Иркутск: ИрГУПС, 2018. – 692 с.
5. Karnovsky I.A., Lebed E. Theory of Vibration Protection. – Switzerland: Springer International Publishing, 2016. – 708 p.
6. Елисеев С.В., Хоменко А.П. Динамическое гашение колебаний: концепция обратной связи и структурные методы математического моделирования. – Новосибирск: Наука, 2014. – 357 с.
7. Елисеев А.В., Арюнин А.И., Нгуен Д.Х., Выонг К.Ч. Управление вибрационным полем технологической машины на основе изменения приведенных инерционных свойств // Вибрационные технологии, мехатроника и управляемые машины: сб. науч. ст.: в 2 ч. – Ч. 1. – Курск: Юго-Зап. гос. ун-т, 2016. – 343 с.
8. Елисеев С.В., Елисеев А.В. Особенности возникновения зазора в механической системе с неудерживающей связью при импульсном воздействии // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – 2013. – №2(38). – С. 36-45.
9. Елисеев А.В., Ситов И.С., Елисеев А.В. Движение материальной частицы с подбрасыванием на примере модельной задачи с неудерживающими связями // Машиностроение и безопасность жизнедеятельности. – 2012. – №3(13). – С. 53-59.
10. Лурье А.И. Операционное исчисление и применение в технических приложениях. – М.: Наука. 1959. – 368с.

References

1. Harris C.M., Crede C.E. Shock and Vibration Handbook. – New York: McGraw – Hill Book Co, 2002. – 1457 p.
2. Panovko G.Ya. Dynamics of vibrational technological processes. – M.-Izhevsk: SRC "Regularistic and chaotic dynamics", Institute of Computer Technologies, 2006. – 176 p.
3. Kopylov Yu.R. Dynamics of vibration-shock hardening processes: monograph. – Voronezh: CPI "Scientific Book", 2011. – 568 p.
4. Eliseev S.V. Applied system analysis and structural mathematical modeling (dynamics of transport and technological machines: connectivity of movements, vibration interactions, lever connections): monograph. – Irkutsk: IrGUPS, 2018. – 692 p.
5. Karnovsky I.A., Lebed E. Theory of Vibration Protection. – Switzerland: Springer International Publishing, 2016. – 708 p.
6. Eliseev S.V., Khomenko A.P. Dynamic vibration damping: feedback concept and structural methods of mathematical modeling. – Novosibirsk: Science, 2014. – 357 p.
7. Eliseev A.V., Aryunin A.I., Nguyen D.H., Vyong K.C. Control of the vibration field of a technological machine based on changes in the reduced inertial properties // Vibration technologies, mechatronics and controlled machines: collection of scientific articles: in 2 parts. – Part 1. – Kursk: South-West State University, 2016. – 343 p.
8. Eliseev S.V., Eliseev A.V. Features of the occurrence of a gap in a mechanical system with an unstoppable coupling under pulsed action // Modern technologies. System analysis. Modeling. 2013, no. 2(38), pp. 36-45.
9. Eliseev A.V., Sitov I.S., Eliseev A.V. Motion of a material particle with tossing on the example of a model problem with unstoppable connections // Mechanical engineering and life safety. Scientific and Technical Journal. 2012, no.3(13), pp. 53-59.
10. Lurie A.I. Operational calculus and application in technical applications. – M.: Science. 1959. – 368 p.

Сведения об авторах:	*Information about authors:*
Елисеев Андрей Владимирович – кандидат технических наук, доцент кафедры математики ИрГУПС, доцент кафедры конструирования и стандартизации в машиностроении ИрНИТУ	**Eliseev Andrey Vladimirovich** – candidate of technical sciences, associate professor of the Department of mathematics, associate professor of the Department of design and standardization in mechanical engineering
Кузнецов Николай Константинович – доктор технических наук, профессор кафедры конструирования и стандартизации в машиностроении	**Kuznetsov Nikolai Konstantinovich** – doctor of technical sciences, professor of the Department of design and standardization in mechanical engineering
Николаев Андрей Владимирович – соискатель	**Nikolaev Andrey Vladimirovich** – applicant
eavsh@ya.ru	

Получена 30.09.2022