

УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЕ КРУЧЕНИЕ АНИЗОТРОПНОГО ПО ХИЛЛУ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ В СЛУЧАЕ ЛОКАЛЬНОГО ОХВАТА ПЛАСТИЧЕСКОЙ ОБЛАСТЬЮ КОНТУРА ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

Щеглова Ю.Д.

Воронежский государственный университет, Воронеж

Ключевые слова: упругопластическое кручение, анизотропия, упругопластическая граница, частичная пластическая область, напряжения, перемещение.

Аннотация. В работе исследуется задача о напряженном состоянии анизотропного по Хиллу цилиндрического стержня овального поперечного сечения в случае частичного охвата пластической областью контура поперечного сечения стержня. Используется метод малого параметра, где нулевым приближением выступает линейная комбинация решений задачи упругого кручения и задачи упругопластического кручения при полном охвате пластической областью контура поперечного сечения. Задача решена в первом приближении.

ELASTIC-PLASTIC TORSION OF A HILL-ANISOTROPIC CYLINDRICAL ROD IN THE CASE OF LOCAL COVERAGE OF THE CROSS-SECTIONAL CONTOUR BY A PLASTIC REGION

Shcheglova Yu.D.

Voronezh State University, Voronezh

Keywords: elastoplastic torsion, anisotropy, elastoplastic boundary, partial plastic region, stress, displacement.

Abstract. This paper examines the stress state of a Hill-anisotropic cylindrical rod with an oval cross-section when the plastic region partially encloses the rod's cross-sectional contour. The small parameter method is used, where the zeroth approximation is a linear combination of the solutions to the elastic torsion problem and the elastoplastic torsion problem with complete plastic region enclosing the cross-sectional contour. The problem is solved to a first approximation.

В настоящей работе рассматривается применение метода малого параметра [1] к решению задачи упругопластического кручения стержня с околоскруговым поперечным сечением в случае локального охвата пластической областью контура поперечного сечения стержня. Используется вариация метода малого параметра, предложенная в работе [2] и заключающаяся в том, что в качестве нулевого приближения выступает линейная комбинация решений задачи упругого кручения и задачи упругопластического кручения с полным охватом пластической зоной контура поперечного сечения стержня.

Рассматривается задача определения напряженного состояния скручиваемого упругопластического стержня с контуром поперечного сечения L , заданным в виде

$$\Phi(\rho, \theta) = 0, \quad (1)$$

где ρ, θ – полярные координаты.

Система уравнений в безразмерном виде в цилиндрической системе координат состоит из следующих соотношений.

Уравнение равновесия

$$\frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\tau_{\rho z}}{\rho} = 0, \quad (2)$$

где $\tau_{\rho z}, \tau_{\theta z}$ – компоненты тензора напряжений.

Соотношения Коши

$$\varepsilon_{\rho z} = \frac{\omega}{2} \frac{\partial w}{\partial \rho}, \quad \varepsilon_{\theta z} = \frac{\omega}{2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \rho \right), \quad (3)$$

где $\varepsilon_{\rho z}, \varepsilon_{\theta z}$ и – компоненты тензора деформаций, w – функция перемещений в направлении оси z или функция депланации, ω – крутка или угол кручения на единицу длины.

Закон Гука

$$\tau_{\rho z} = 2G\varepsilon_{\rho z}, \quad \tau_{\theta z} = 2G\varepsilon_{\theta z}, \quad (4)$$

где G – модуль сдвига.

Условие пластичности для анизотропного согласно Хиллу материала [3]

$$A(\tau_{\rho z} \cos \theta - \tau_{\theta z} \sin \theta)^2 + B(\tau_{\rho z} \sin \theta + \tau_{\theta z} \cos \theta)^2 = 1, \quad (5)$$

где A, B – константы анизотропии.

Боковая поверхность стержня свободна от нагрузки, что ведет к выполнению условия

$$(\tau_{\rho z} n_\rho + \tau_{\theta z} n_\theta) \Big|_L = 0, \quad (6)$$

где n_ρ, n_θ – компоненты единичной нормали к контуру L .

На упругопластической границе L_s компоненты напряжений непрерывны, то есть выполняются условия

$$[\tau_{\rho z}] \Big|_{L_s} = 0, \quad [\tau_{\theta z}] \Big|_{L_s} = 0. \quad (7)$$

В области упругого деформирования из (2)-(4) следует уравнение

$$\Delta w = 0, \quad (8)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}$ – оператор Лапласа.

Пусть при $\omega = \omega_0$ хотя бы в одной точке контура L возникают напряжения, удовлетворяющие условию (5), при $\omega = \omega_1 \geq \omega_0$ граница упругопластической области L_s является замкнутой кривой, касающейся контура L . При $\omega \geq \omega_1$ в стержне образуется упругое ядро, ограниченное контуром L_s .

Следуя [4], константы анизотропии представим в виде

$$A = 1 + \delta a_1 + \delta^2 a_2 + \dots, \quad B = 1 + \delta b_1 + \delta^2 b_2 + \dots, \quad (9)$$

где $\delta \ll 1$ – безразмерный малый параметр.

Предположим, что контур поперечного сечения представим в форме

$$\rho = 1 + \delta_1 R_1 + \delta_1^2 R_2 + \dots, \quad (10)$$

где $\delta_1 \ll 1$ – безразмерный малый параметр геометрии контура, $R_i = R_i(\theta)$.

Тогда (1) примет вид

$$\Phi(\rho, \theta) = \rho - (1 + \delta_1 R_1 + \delta_1^2 R_2 + \dots).$$

Компоненты единичной нормали будут вычисляться по формулам

$$n_p = 1 - \frac{1}{2} \delta_1^2 \dot{R}_1^2 + \dots, \quad n_\theta = -\delta_1 \dot{R}_1 - \delta_1^2 (\dot{R}_2 - R_1 \dot{R}_1) + \dots, \quad (11)$$

здесь точкой обозначена производная по θ .

Далее примем $\delta_1 = d_1 \delta$, $0 \leq d_1 \leq 1$ и ограничимся нулевым и первым приближением.

В качестве примера рассмотрим кручение стержня овального поперечного сечения, контур которого задан уравнением (10) в виде

$$\rho = 1 + \delta d_1 \cos 2\theta. \quad (12)$$

Решение задачи упругого кручения при $\omega \leq \omega_0$ можно получить, используя метод малого параметра и процедуру, приведенную в работе [2]. Оно будет иметь вид

$$w = -\delta d_1 \rho^2 \sin 2\theta, \quad \tau_{pz} = -\delta 2G\omega d_1 \rho \sin 2\theta, \quad \tau_{\theta z} = G\omega \rho - \delta 2G\omega d_1 \rho \cos 2\theta. \quad (13)$$

Решение задачи упругопластического кручения в случае полного охвата пластической областью контура поперечного сечения стержня при $\omega \geq \omega_1$ можно получить также, используя метод малого параметра и алгоритм, приведенный в работе [5]. Это решение имеет вид

в пластической области

$$\tau_{\theta z}^p = 1 + \delta \left(\frac{a_1 - b_1}{4} \cos 2\theta - \frac{a_1 + b_1}{4} \right), \quad \tau_{pz}^p = \delta \left(\frac{a_1 - b_1}{2} \left(1 - \frac{1}{\rho} \right) - \frac{2d_1}{\rho} \right) \sin 2\theta, \quad (14)$$

в упругой области

$$\begin{aligned} w^e &= \delta \left(\frac{a_1 - b_1}{4} \left(1 - \frac{1}{\rho_0} \right) - \frac{d_1}{\rho_0} \right) \rho^2 \sin 2\theta, \\ \tau_{pz}^{e(1)} &= \delta 2G\omega \left(\frac{a_1 - b_1}{4} \left(1 - \frac{1}{\rho_0} \right) - \frac{d_1}{\rho_0} \right) \rho \sin 2\theta, \\ \tau_{\theta z}^{e(1)} &= G\omega \rho + \delta 2G\omega \left(\frac{a_1 - b_1}{4} \left(1 - \frac{1}{\rho_0} \right) - \frac{d_1}{\rho_0} \right) \rho \cos 2\theta, \end{aligned} \quad (15)$$

упругопластическая граница

$$\rho_s = \rho_0 + \delta \left(\left(\frac{a_1 - b_1}{2} + 2d_1 - \frac{a_1 - b_1}{4} \rho_0 \right) \cos 2\theta - \frac{a_1 + b_1}{4} \rho_0 \right). \quad (16)$$

Рассмотрим случай неполного охвата пластическими областями контура поперечного сечения стержня L , что соответствует диапазону значений крутки $\omega_0 \leq \omega \leq \omega_1$.

Функцию деформации в упругой области будем искать в виде, следуя работе [2],

$$\bar{w}^e = \bar{w}^{e(0)} + \delta \bar{w}^{e(1)}. \quad (17)$$

В данном варианте нулевое приближение имеет вид

$$\bar{w}^{e(0)} = (1 - \alpha)w + \alpha w^e, \quad (18)$$

где $0 \leq \alpha \leq 1$, w и w^e – функции депланации в упругих областях, определенных формулами (13) и (15) при $\omega = \omega_0$ и $\omega = \omega_1$, соответственно.

С учетом (18) и соотношений (13) и (15) равенство (17) запишется в виде

$$\bar{w}^e = \delta \left(\bar{w}^{e(1)} + (1 - \alpha)w^{(1)} + \alpha w^{e(1)} \right). \quad (19)$$

Уравнения упругопластических границ будем искать в виде

$$\rho_s = \bar{\rho}_0 + \delta \bar{\rho}_1, \quad (20)$$

при этом

$$\bar{\rho}_0 = (1 - \alpha)\bar{R} + \alpha \bar{r}. \quad (21)$$

Здесь введены обозначения

$$\bar{R} = \frac{1}{G\omega_0} = \frac{1}{G\omega_0} \max_L \tau_{\theta z} = 1 + \delta \bar{R}_1, \quad \bar{r} = \frac{1}{G\omega_1} = \frac{1}{G\omega_1} \min_{L_s} \tau_{\theta z}^e = 1 + \delta \bar{r}_1. \quad (22)$$

Согласно (20), (21) и (22) уравнения упругопластических границ представляются соотношением

$$\rho_s = 1 + \delta \left(\bar{\rho}_1 + (1 - \alpha)\bar{R}_1 + \alpha \bar{r}_1 \right). \quad (23)$$

Определим параметр нагружения, следуя [2], выражением $\bar{\omega} = \frac{\omega - \omega_0}{\omega}$.

Полагая $\rho_0 = 1/G\omega$ и учитывая (21), а также (22), можно получить

$$\bar{\omega} = \alpha \left(1 - \frac{\bar{r}}{\bar{R}} \right) = \alpha \delta \left(\bar{R}_1 - \bar{r}_1 \right). \quad (24)$$

Пусть $L_e^{(0)}$ и $L_s^{(0)}$ – части контура единичной окружности, находящиеся в упругом и пластическом состояниях, соответственно. Тогда, используя соотношения (3), (4), (6) и (7) с учетом (11) и (19), получим

$$\left. \frac{\partial \bar{w}^{e(1)}}{\partial \rho} \right|_{\rho=1} = d_1 \dot{R}_1 - (1 - \alpha) \left. \frac{\partial w^{(1)}}{\partial \rho} \right|_{\rho=1} - \alpha \left. \frac{\partial w^{e(1)}}{\partial \rho} \right|_{\rho=1} \quad \text{на } L_e^{(0)}, \quad (25)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{w}^{e(1)}}{\partial \rho} \right|_{\rho=1} = \frac{1}{G\omega} \tau_{\rho z}^{p(1)} \Big|_{\rho=1} - (1 - \alpha) \left. \frac{\partial w^{(1)}}{\partial \rho} \right|_{\rho=1} - \alpha \left. \frac{\partial w^{e(1)}}{\partial \rho} \right|_{\rho=1} \quad \text{на } L_s^{(0)}, \quad (26)$$

$$\bar{\rho}_1 = \tau_{\theta z}^{p(1)} \Big|_{\rho=1} - \left. \frac{\partial \bar{w}^{e(1)}}{\partial \theta} \right|_{\rho=1} - (1 - \alpha) \left. \frac{\partial w^{(1)}}{\partial \theta} \right|_{\rho=1} - \alpha \left. \frac{\partial w^{e(1)}}{\partial \theta} \right|_{\rho=1}. \quad (27)$$

Можно показать, что соотношения (25) и (26) совпадают, кроме того, правая часть этих соотношений равна нулю. Тогда для функции депланации в упругой области получаем задачу Неймана

$$\begin{cases} \Delta \bar{w}^{e(1)} = 0, & 0 \leq \rho < 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \\ \left. \frac{\partial \bar{w}^{e(1)}}{\partial \rho} \right|_{\rho=1} = 0. \end{cases}.$$

Откуда следует, что $\bar{w}^{e(1)} = 0$.

Угол охвата пластической областью определяется из условия пересечения упругопластических границ с контуром L , что на основании (10) и (23) приводит к уравнению

$$\bar{\rho}_1(\theta_*^{(1)}) + (1 - \alpha)\bar{R}_1 + \alpha\bar{r}_1 = d_1 R_1(\theta_*^{(1)}). \quad (28)$$

Для стержня с контуром, представленным (12), будем иметь.

Соотношения (22) с использованием решений (13), (15) и (16) будут иметь вид

$$\bar{R} = 1 + \delta d_1, \quad \bar{r} = 1 + \delta \left(\frac{b_1}{2} - d_1 \right). \quad (29)$$

Из (27) с учетом решений (13)-(15) получим

$$\bar{\rho}_1 = \left(\frac{a_1 - b_1}{4} + 2d_1 \right) \cos 2\theta - \frac{a_1 + b_1}{4}. \quad (30)$$

Из уравнения (28) при учете (29), (30) и (12) будем иметь

$$\cos 2\theta_*^{(1)} = \frac{a_1 + b_1 - 4(1 - \alpha) - \alpha(2b_1 - 4d_1)}{a_1 - b_1 + 4d_1}. \quad (31)$$

Из (31) следует, что при $\alpha = 0$ пластические зоны представляют собой точки контура L с координатами $\theta = \pi/2 + \pi n$ ($n=0, 1$). При $\alpha=1$ происходит полный охват контура L пластическими областями.

Согласно (29) параметр нагружения (24) при $\omega_0 \leq \omega \leq \omega_1$ определится равенством

$$\bar{\omega} = \delta \alpha \left(2d_1 - \frac{b_1}{2} \right).$$

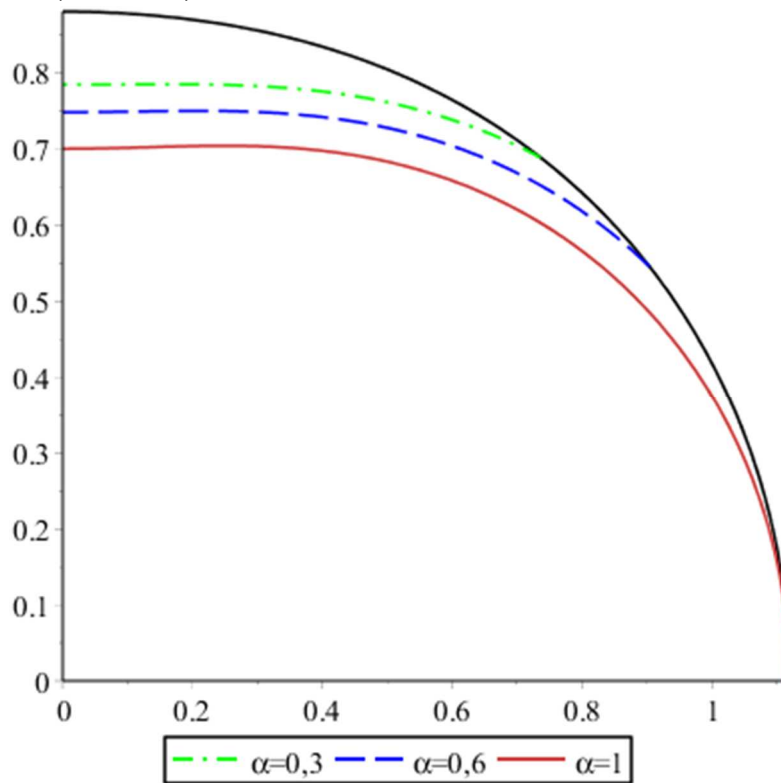


Рис. 1. Положение упругопластических границ

На рисунке 1 показано положение упругопластических границ при значениях $\delta = 0,12$, $a_1 = 1$, $b_1 = 2$ и различных значениях α .

Таким образом, в настоящей работе дано развитие метода малого параметра к задаче упругопластического кручения пластически анизотропного по Хиллу цилиндрического стержня, поперечное сечение которого представлено овалом. Рассмотрен случай неполного охвата пластической областью контура поперечного сечения стержня. В первом приближении определены функция депланации в упругой области, уравнения упругопластических границ, углы охвата пластической областью контура поперечного сечения стержня и параметр нагружения, при котором пластическая область является локальной.

Список литературы

1. Ивлев Д.Д., Ершов Л.В. Метод возмущений в теории упругопластического тела. – М.: Наука, 1978. – 208 с.
2. Цветков Ю.Д. Кручение упругопластического цилиндрического стержня с поперечным сечением, близким к круговому // Актуальные задачи механики сплошных сред: межвузовский сборник. – Чебоксары: Изд. Чуваш. ун-та, 1986. – С. 117-125.
3. Хилл Р. Математическая теория пластичности. – М.: ГИТТЛ, 1956. – 407 с.
4. Ивлев Д.А. О предельном состоянии слоистых анизотропных круговых цилиндров при кручении // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2011. – №1(9). – С. 107-110.
5. Ковалев А.В., Свиридов И.Э., Щеглова Ю.Д. Упругопластическое состояние толстостенного стержня некругового поперечного сечения при кручении в случае анизотропии общего вида // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2016. – №4(30). – С. 41-52.

Сведения об авторе:

Щеглова Юлия Дмитриевна – к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры механики и компьютерного моделирования.