

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВЫНУЖДЕННЫХ И ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ ПРИ СОЧЕТАНИИ ЛИНЕЙНОГО И НЕЛИНЕЙНОГО ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ

Алифов А.А.

Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва

Ключевые слова: взаимодействие, колебания, параметрические колебания, вынужденные колебания, линейность, нелинейность.

Аннотация. Рассмотрено взаимодействие вынужденных и параметрических колебаний при сочетании линейного, нелинейного параметрического возбуждения и нелинейной силы упругости. Для решения нелинейного дифференциального уравнения использован асимптотический метод усреднения нелинейной механики. Выведены уравнения для нестационарных и стационарных режимов колебаний. На основе критериев Рауса-Гурвица получены условия устойчивости стационарных колебаний и проведены расчеты.

INTERACTION OF FORCED AND PARAMETRIC OSCILLATIONS WITH A COMBINATION OF LINEAR AND NONLINEAR PARAMETRIC INFLUENCE

Alifov A.A.

Mechanical Engineering Research Institute of the RAS, Moscow

Keywords: interaction, oscillations, parametric oscillations, forced oscillations, linearity, nonlinearity.

Abstract. The interaction of forced and parametric oscillations is considered with a combination of linear and nonlinear parametric excitation and a nonlinear elastic force. The asymptotic averaging method of nonlinear mechanics is used to solve the nonlinear differential equation. Equations are derived for nonstationary and stationary oscillation modes. Using the Routh-Hurwitz criteria, stability conditions for stationary oscillations are obtained and calculations are performed.

Как показано в работе [1] колебательное движение является наиболее общим движением и все в Природе подвергается колебаниям. Теория динамических систем и колебаний пронизывает все науки. Существует огромное множество работ, посвященных исследованию различных колебательных процессов. По классификации колебательных процессов, имеющейся в [2], взаимодействие вынужденных и параметрических колебаний является одним из классов смешанных колебаний (всего 4 класса). Изучение этого класса смешанных колебаний проводилось в ряде работ автора, в том числе в [2-4]. В монографии [2] он рассмотрен при линейном параметрическом возбуждении, а в [3, 4] – нелинейном.

Целью настоящей работы является изучение взаимодействия вынужденных и параметрических колебаний при совместном действии линейного и нелинейного параметрического возбуждения в случае нелинейной силы упругости. Решение нелинейного дифференциального уравнения этих колебаний будет проведено с использованием асимптотического метода усреднения [5-7].

Рассмотрим дифференциальное уравнение, описывающее взаимодействие вынужденных и параметрических колебаний при комбинации линейного и нелинейного параметрического возбуждения:

$$m\ddot{x} + k\dot{x} + cx + (b_1x + b_3x^3)\cos vt = \lambda \sin v_1t - \gamma x^3. \quad (1)$$

Здесь $\ddot{x}$ – ускорение, $\dot{x}$ – скорость, x – перемещение, $m = \text{const}$ – масса тела, $k = \text{const}$ и $c = \text{const}$ – коэффициенты демпфирования и жесткости, $b_1 = \text{const}$, $b_3 = \text{const}$, $\lambda = \text{const}$ – соответственно коэффициенты параметрического возбуждения $(b_1x + b_3x^3)\cos vt$ и вынуждающей силы $\lambda \sin v_1t$, $v_1 = \text{const}$ и $v = \text{const}$ – частоты, $\gamma = \text{const}$ – коэффициент нелинейной части силы упругости.

По асимптотическому методу усреднения [5] решения (1) представляем для области основного параметрического резонанса в виде

$$x = a \cos \psi, \quad \dot{x} = -a p \sin \psi, \quad \psi = pt + \xi, \quad p = v/2 \quad (2)$$

и из (1) получаем следующие соотношения для определения нестационарных значений амплитуды a и фазы ξ колебаний с частотой p :

$$\begin{aligned} \dot{a} &= -\left[2kpa + 2\lambda \cos \xi - (b_1a + 0,5b_3a^3)\sin 2\xi\right]/4mp, \\ \dot{\xi} &= \left[2am(\omega^2 - p^2) + 1,5\gamma a^3 + 2\lambda \sin \xi + (b_1a + b_3a^3)\cos 2\xi\right]/4mpa, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\omega^2 = c/m$ – собственная частота.

Стационарные значения амплитуды и фазы колебаний можно найти из условий $\dot{a} = 0$, $\dot{\xi} = 0$, которые дают

$$\begin{aligned} (Q^2 - 4R^2)(QB - 2\lambda R)^2 + 16R^4a^2p^2k^2 &= 0, \\ \operatorname{tg} \xi &= Q(QB - 2\lambda R)/4kapR^2. \end{aligned} \quad (4)$$

где $Q = \lambda \pm \sqrt{G}$, $G = \lambda^2 + 4R(aE + 0,5R)$, $B = b_1a + 0,5b_3a^3$,

$$R = b_1a + b_3a^3, \quad E = m(\omega^2 - p^2) + 0,75\gamma a^2.$$

Рассматривая устойчивость установившихся колебаний, составляем уравнения в вариациях для (3) и на основе критериев Рауса-Гурвица получаем следующие условия:

$$D_1 = -(b_{11} + b_{22}) > 0, \quad D_2 = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} > 0,$$

где $b_{11} = -\frac{1}{4pm}\left[2kp - (b_1 + \frac{3}{2}b_3a^2)\sin 2\xi\right]$, $b_{12} = \frac{1}{2pm}\left[\lambda \sin \xi + (b_1a + 0,5b_3a^3)\cos 2\xi\right]$,

$$b_{21} = \frac{1}{2pm}\left[1,5\gamma a - \frac{\lambda}{a^2}\sin \xi + b_3a \cos 2\xi\right], \quad b_{22} = \frac{1}{2pma}\left[\lambda \cos \xi - (b_1a + b_3a^3)\sin 2\xi\right].$$

Для получения информации о взаимодействии вынужденных и параметрических колебаний при комбинации линейного и нелинейного параметрического возбуждения с учетом нелинейности упругой силы были проведены расчеты на основе следующих параметров: $m = 1 \text{ кгс} \cdot \text{с}^2 \cdot \text{см}^{-1}$, $k = 0,02 \text{ кгс} \cdot \text{с} \cdot \text{см}^{-1}$, $c = 1 \text{ кгс} \cdot \text{см}^{-1}$, $b_1 = 0,07 \text{ кгс} \cdot \text{см}^{-1}$, $b_3 = 0,07 \text{ кгс} \cdot \text{см}^{-3}$, $\lambda = 0,02 \text{ кгс}$, $\gamma = \pm 0,2 \text{ кгс} \cdot \text{см}^{-3}$.

На рисунке 1 показаны некоторые результаты расчетов амплитудно-частотных кривых при $\gamma > 0$ (рис. 1, а) и $\gamma < 0$ (рис. 1, б). Кривые синего цвета представляют случай *нелинейного* параметрического возбуждения $b_3 x^3 \cos vt$. Они приведены для сравнения и наглядно показывают различия при наличии лишь *нелинейного* параметрического возбуждения и *совместном действии линейного и нелинейного* параметрического возбуждения.

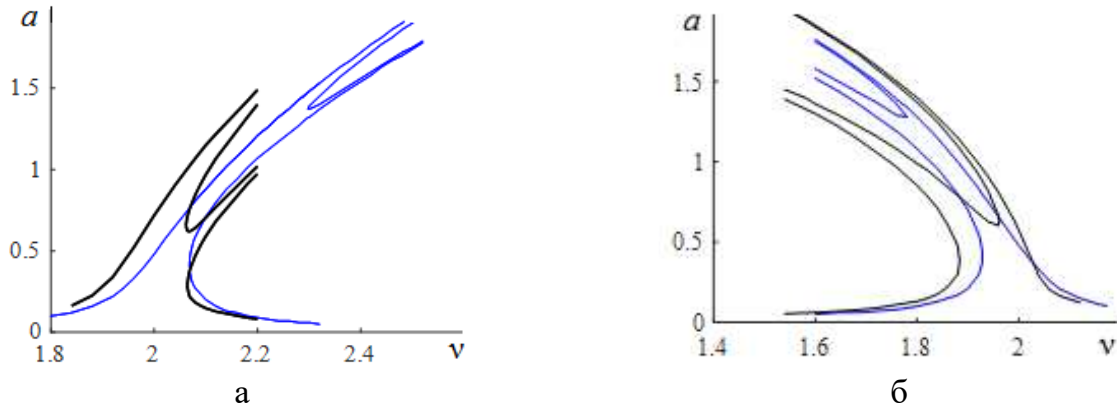


Рис. 1. Амплитудно-частотные кривые: а) $\gamma = 0,2$; б) $\gamma = -0,2$

Финансирование. Работа выполнена в рамках Государственного задания на проведение фундаментальных исследований (код темы FFGU-2024-0018).

Список литературы

1. Алифов А.А. Взаимодействия в Природе. Единая теория. – М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2008. – 472 с.
2. Alifov A.A., Frolov K.V. Interaction of Nonlinear Oscillatory Systems with Energy Sources. – New York: Hemisphere Pub. Corp. Taylor & Francis Group, 1990.
3. Alifov A.A. Parametric and self-excited oscillations under nonlinear parametric action and lag in elasticity // Physics and Mathematics. 2024, vol. 17(4), pp. 48-56. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.17404>.
4. Алифов А.А. Динамика параметрических и вынужденных колебаний при нелинейном параметрическом воздействии // Современные проблемы теории машин. – 2024. – №17. – С. 62-64. – DOI: 10.26160/2307-342X-2024-17-62-64.
5. Боголюбов Н.Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 504 с.
6. Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики. – М.: Наука, 1981. – 400 с.
7. Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Введение в теорию нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1976. – 256 с.

Сведения об авторе:

Алифов Алишир Али оглы – д.т.н., главный научный сотрудник.