

ЗАДАЧА ТЕРМОЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ ДЛЯ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА ПРИ НЕОСЕССИМЕТРИЧНОМ ТЕМПЕРАТУРНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

Юрин В.А.

Самарский государственный технический университет, Самара

Ключевые слова: задача термоэлектروупругости, пьезокерамический цилиндр, конечные интегральные преобразования, преобразования Фурье, пьезоэффект, температурный датчик.

Аннотация. Получено новое решение задачи термоэлектроупругости в случае неосесимметричного температурного воздействия на внутреннюю поверхность полого цилиндра из пьезокерамики. Поставленная начально-краевая задача рассмотрена в несвязанной постановке. Расчет выполнен путем применения к исходной системе уравнений конечных интегральных преобразований различных видов. Численный анализ результатов позволил определить толщину стенки цилиндра, а также область приложения температурной «нагрузки» для наиболее эффективного преобразования деформаций в электрический сигнал.

THERMOELECTROELASTICITY PROBLEM FOR A PIEZOCERAMIC CYLINDER UNDER NON-AXISYMMETRIC TEMPERATURE IMPACT

Yurin V.A.

Samara State Technical University, Samara

Keywords: thermoelectroelasticity problem, piezoceramic cylinder, finite integral transforms, Fourier transforms, piezoelectric effect, temperature sensor.

Abstract. A new solution of the thermoelectroelasticity problem has been obtained in a case of non-axisymmetric temperature impact on the inner surface of a hollow piezoceramic cylinder. The stated boundary-value problem is considered in an uncoupled formulation. The calculation was performed by applying finite integral transforms of various types to the initial system of equations. Numerical analysis of the results made it possible to determine the thickness of the cylinder wall, as well as the area of application of the temperature «load» for the most efficient conversion of deformations into an electrical signal.

Введение. Для описания и расчета конструкции температурных датчиков с пьезокерамическим чувствительным элементом применимы различные физико-математические теории [1, 2].

Целью данной работы является построение замкнутого решения задачи термоэлектроупругости в цилиндрических координатах при неосесимметричном температурном воздействии.

Формулировка задачи. Полый длинный пьезокерамический цилиндр, не закрепленный в радиальной плоскости, занимает область $\Sigma = \{(r_*, \varphi, z_*) | r_* \in [a; b], \varphi \in [0; 2\pi), z_* \in \mathbb{R}\}$, где r_* – радиальная координата, φ – угловая координата, z_* – высота в цилиндрической системе координат; a и b – внутренний и внешний радиусы полого цилиндра соответственно. Здесь и далее символом «*» обозначены переменные в размерной форме.

На внутренней цилиндрической поверхности функцией ω^* описывается неосесимметричное температурное воздействие, а между внешней поверхностью

цилиндра и окружающей средой с известной температурой ϑ^* задан закон конвективного теплообмена. Обе поверхности имеют электродное покрытие, причем внутренняя – заземлена, а внешняя – подключена к вольтметру.

Система уравнений термоэлектроупругости в безразмерной форме включает уравнения движения (1), (2) электростатики (3) и теплового баланса (4) относительно радиальных U и окружных V компонент вектора перемещений, потенциала электрического поля Φ и приращения температуры Θ , а также соответствующие начально-краевые условия (опущены) [3]:

$$\nabla \frac{\partial U}{\partial r} - a_1 \frac{U}{r^2} + a_2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + (a_3 + a_2) \frac{1}{r} \frac{\partial^2 V}{\partial r \partial \varphi} - (a_2 + a_1) \frac{1}{r^2} \frac{\partial V}{\partial \varphi} + \quad (1)$$

$$+ \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial r} - a_4 \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + a_5 \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} - \nabla \Theta + a_6 \frac{\Theta}{r} - \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0,$$

$$a_2 \nabla \frac{\partial V}{\partial r} + a_1 \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} - a_2 \frac{V}{r^2} + a_2 \frac{1}{r} \nabla \frac{\partial U}{\partial \varphi} + a_3 \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \quad (2)$$

$$+ a_1 \frac{1}{r^2} \frac{\partial U}{\partial \varphi} + a_4 \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \varphi} + a_5 \frac{1}{r} \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} - a_6 \frac{1}{r} \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi} - \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0;$$

$$- \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial r} - a_7 \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + a_8 \nabla \frac{\partial U}{\partial r} + a_9 \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + a_{10} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \quad (3)$$

$$+ (a_{10} + a_9) \frac{1}{r} \frac{\partial^2 V}{\partial r \partial \varphi} - a_{10} \frac{1}{r^2} \frac{\partial V}{\partial \varphi} + a_{11} \nabla \Theta = 0;$$

$$\nabla \frac{\partial \Theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial}{\partial t} \left(a_{12} \Theta + a_{13} \nabla U + a_{13} \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi} - a_{14} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) = 0, \quad (4)$$

В системе (1)-(4): $a_1 = \frac{c_{11}}{c_{33}}$, $a_2 = \frac{c_{44}}{c_{33}}$, $a_3 = \frac{c_{13}}{c_{33}}$, $a_4 = \frac{e_{31}}{e_{33}}$, $a_5 = \frac{e_{15}}{e_{33}}$, $a_6 = \frac{\gamma_{11}}{\gamma_{33}}$,

$$a_7 = \frac{\epsilon_{11}}{\epsilon_{33}}, \quad a_8 = \frac{e_{33}^2}{c_{33}\epsilon_{33}}, \quad a_9 = \frac{e_{31}e_{33}}{c_{33}\epsilon_{33}}, \quad a_{10} = \frac{e_{15}e_{33}}{c_{33}\epsilon_{33}}, \quad a_{11} = \frac{e_{33}g_3}{\epsilon_{33}\gamma_{33}}, \quad a_{12} = \frac{bk}{\Lambda} \sqrt{\frac{c_{33}}{\rho}},$$

$$a_{13} = \frac{b\gamma_{33}^2 T_0}{\Lambda \sqrt{c_{33}\rho}}, \quad a_{14} = \frac{b\gamma_{33}g_3 T_0}{e_{33}\Lambda} \sqrt{\frac{c_{33}}{\rho}}; \quad \nabla = \frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial r}; \quad \{U, V, r\} = \{U^*, V^*, r_*\} / b;$$

$$\Phi = \frac{e_{33}}{bc_{33}} \Phi^*; \quad \Theta = \frac{\gamma_{33}}{c_{33}} \Theta^*; \quad t = t_* \frac{\Lambda}{kb^2}; \quad c_{11}, c_{13}, c_{33}, c_{44} - \text{модули упругости}$$

пьезокерамики с гексагональной кристаллической решеткой класса симметрии 6mm; e_{31} , e_{33} , e_{15} – пьезомодули; γ_{11} , γ_{33} – компоненты тензора температурных напряжений; ϵ_{11} , ϵ_{33} – коэффициенты диэлектрической проницаемости; k – коэффициент объемной теплоемкости; Λ – коэффициент теплопроводности; ρ – плотность; T_0 – начальная температура тела в недеформированном состоянии.

Алгоритм расчета. Для преодоления математических трудностей при интегрировании исходной системы уравнений на первом этапе определяется функция распределения температуры в стенке цилиндра без учета влияния

упругого и электрического полей, а далее, исходя из вычисленных параметров температурного поля, решается связанная задача электроупругости.

При решении систем уравнений применяются преобразования Фурье по угловой координате φ и обобщенное конечное интегральное преобразование по радиальной координате r [4].

Окончательные выражения для радиальных и окружных компонент вектора перемещений, электрического потенциала и приращения температуры записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} U &= \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n \left[H_1 + \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_{in}, n, t) K_1(\lambda_{in}, r) \|K_{in}\|^{-2} \right] \cos(n\varphi), \\ V &= \pi^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \left[H_2 + \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_{in}, n, t) K_2(\lambda_{in}, r) \|K_{in}\|^{-2} \right] \sin(n\varphi); \\ \Phi &= \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n \left[H_3 + \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_{in}, n, t) K_3(\lambda_{in}, r) \|K_{in}\|^{-2} \right] \cos(n\varphi); \\ \Theta &= \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n \left[H_4 + \sum_{i=1}^{\infty} N(\lambda_{in}, n, t) K_4(\lambda_{in}, r) \|K_{in}\|^{-2} \right] \cos(n\varphi). \end{aligned} \quad (5)$$

В выражениях (5): $\Omega_n = (2\pi)^{-1}$ при $n = 0$, $\Omega_n = \pi^{-1}$ при $n \neq 0$; $H_1 \dots H_4$ – стандартизирующие функции; G, N – трансформанты температурной «нагрузки»; $K_1 \dots K_4$ – компоненты вектор-функции ядра преобразования; λ_{in} – собственные значения; $\|K_{in}\|$ – норма ядра преобразования.

Результаты. В качестве образца принимается длинный полый цилиндр из пьезокерамики PZT-4. Неосесимметричное температурное воздействие на внутреннюю поверхность цилиндра описывается функцией:

$$\omega^* = Y^* \left[H\left(\frac{\theta}{2} - \varphi\right) + H\left(\varphi + \frac{\theta}{2} - 2\pi\right) \right] + T_0^* \left[H\left(\varphi - \frac{\theta}{2}\right) - H\left(\varphi + \frac{\theta}{2} - 2\pi\right) \right],$$

где $Y^* = T_{\max}^* \left[\sin\left(\frac{\pi}{2t_{\max}^*} t_*\right) H(t_{\max}^* - t_*) + H(t_* - t_{\max}^*) \right]$; θ – величина центрального

угла, который ограничивает область температурного воздействия Y^* ; $H(\dots)$ – единичная функция Хэвисайда; $T_{\max}^*$, $t_{\max}^*$ – максимальное значение температурного воздействия и его время ($T_{\max}^* = 100^\circ\text{C}$, $t_{\max}^* = 1$ с); $T_0^* = 20^\circ\text{C}$.

На рисунке 1 представлены графики зависимости напряжения от времени (в безразмерной форме) в стенке цилиндра при различных отношениях $\frac{a}{b}$ и при различных величинах θ .

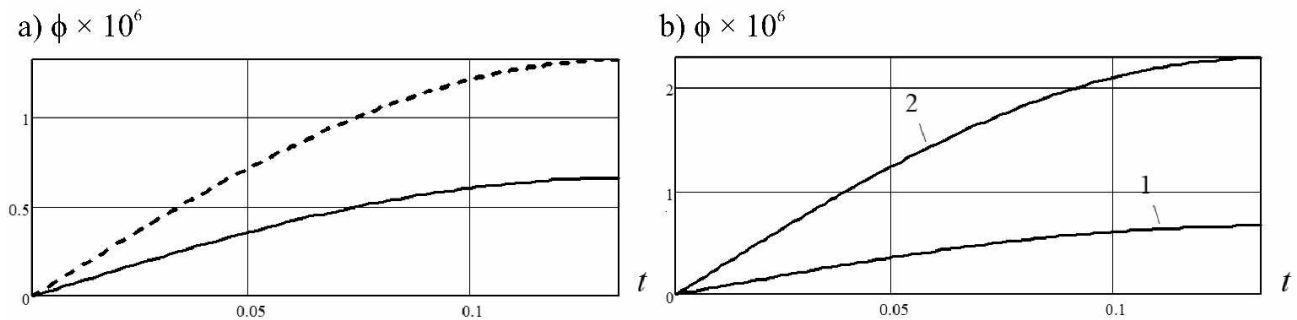


Рис. 1. Графики зависимости напряжения от времени

а) при постоянном $\frac{a}{b} = 0,8$ и разных θ : сплошная линия – $\theta = \pi/2$; пунктирная линия – $\theta = \pi$;

б) при постоянном $\theta = \pi/2$ и разных $\frac{a}{b}$: 1 – $\frac{a}{b} = 0,8$; 2 – $\frac{a}{b} = 0,5$

Выводы. Полученное решение позволяет определить все компоненты термоэластичных полей в длинном пьезокерамическом цилиндре как при установившемся, так и при нестационарном температурном режиме. Анализ полученных графиков показывает, что увеличение толщины стенки цилиндра и области температурного воздействия приводит к увеличению индуцируемого электрического сигнала.

Список литературы

1. Lord H.W., Shulman Y. A generalized dynamical theory of thermoelasticity // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 1967, vol. 15, no. 5, pp. 299-309. DOI: 10.1016/0022-5096(67)90024-5.
2. Green A.E., Naghdi P.M. Thermoelasticity without energy dissipation // Journal of Elasticity. 1993, vol. 31, pp. 189-208. DOI: 10.1007/BF00044969.
3. Шляхин Д.А., Юрин В.А. Неосесимметричная связанная нестационарная задача термоэластичности для длинного пьезокерамического цилиндра // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2024. – №2. – С. 325-344. – DOI: 10.31857/S1026351924020161.
4. Сеницкий Ю.Э. Исследование упругого деформирования элементов конструкций при динамических воздействиях методом конечных интегральных преобразований. – Саратов: Издательство Саратовского университета, 1985. – 174 с.

Сведения об авторе:

Юрин Владимир Андреевич – аспирант, ассистент кафедры «Строительная механика, инженерная геология, основания и фундаменты».