

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ПРИБОРАХ ИЗМЕРЕНИЯ ДАВЛЕНИЯ РАБОЧЕЙ СРЕДЫ В ДВИГАТЕЛЯХ

Вельмисов П.А., Покладова Ю.В.

Ульяновский государственный технический университет, Ульяновск

Ключевые слова: аэрогидроупругость, датчик давления, трубопровод, упругая пластина, деформация, динамика, метод Бубнова-Галёркина.

Аннотация. Предложена математическая модель механической системы, предназначенной для измерения давления рабочей среды в камере сгорания двигателя. Система включает в себя трубопровод с рабочей средой и датчик давления среды. Получено интегро-дифференциальное уравнение, описывающее динамику упругого элемента датчика и связывающее его деформацию с давлением среды на входе в трубопровод (на выходе из камеры сгорания двигателя) в каждый момент времени. Предложен численно-аналитический метод решения этого уравнения и приведены примеры численных расчетов динамики элемента.

INVESTIGATION OF DYNAMIC PROCESSES IN DEVICES FOR MEASURING THE PRESSURE OF THE WORKING MEDIUM IN ENGINES

Velmisov P.A., Pokladova Yu.V.

Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk

Keywords: aerohydroelasticity, pressure sensor, pipeline, elastic plate, deformation, dynamics, Bubnov-Galerkin method.

Abstract. A mathematical model of a mechanical system designed to measure the pressure of the working medium in the combustion chamber of an engine is proposed. The system includes a pipeline with a working medium and a medium pressure sensor. An integro-differential equation describing the dynamics of the elastic element of the sensor and relating its deformation to the pressure of the medium at the inlet to the pipeline (at the outlet of the combustion chamber of the engine) at each moment of time is obtained. A numerical-analytical method for solving this equation is proposed and examples of numerical calculations of the dynamics of the element are given.

Измерение давления и использование полученных данных для контроля и мониторинга технологических процессов имеет ключевое значение во многих отраслях современной промышленности. Точное и надежное измерение необходимо для обеспечения качества и безопасности многих процессов [1].

Все датчики давления в той или иной степени критичны к воздействию высоких температур и повышенных виброускорений. Размещение датчика на корпусе двигателя может привести к большим погрешностям измерения и даже разрушению чувствительного элемента. Возникает задача проектирования механической системы «трубопровод – датчик давления», в которой датчик расположен на некотором расстоянии от двигателя и соединен с ним с помощью трубопровода, что позволяет ослабить негативное воздействие высоких температур и виброускорений.

Различные математические модели механической системы «трубопровод – датчик давления» рассматривались в [2-4]. В статье [4] была предложена модель

со сжимаемой рабочей средой. В данной работе рассматривается модель с несжимаемой рабочей средой и другим расположением датчика давления.

Пусть датчик измерения давления рабочей среды, содержащий в качестве составного элемента упругую пластину (рис. 1), расположен на боковой стенке трубопровода. На выходе из камеры сгорания двигателя задан закон изменения давления рабочей среды.

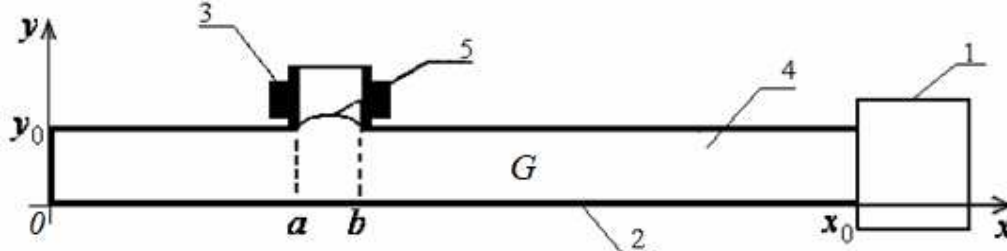


Рис. 1. Трубопровод с датчиком на боковой стенке: 1 – двигатель, 2 – трубопровод, 3 – датчик, 4 – рабочая среда, 5 – пластина (упругий элемент датчика)

Математическую модель механической системы можно представить в виде:

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0, \quad (x, y) \in G = \{(x, y): 0 < x < x_0, 0 < y < y_0\}; \quad (1)$$

$$\varphi_y(x, 0, t) = 0, \quad x \in (0, x_0); \quad (2)$$

$$\varphi_x(0, y, t) = 0, \quad y \in (0, y_0); \quad (3)$$

$$\varphi_y(x, y_0, t) = 0, \quad x \in (0, a) \cup (b, x_0); \quad (4)$$

$$\varphi_y(x, y_0, t) = \dot{\omega}(x, t), \quad x \in (a, b); \quad (5)$$

$$\tilde{P} - \rho\varphi_t(x_0, y, t) = P_*(y, t), \quad y \in (0, y_0); \quad (6)$$

$$L(\omega) \equiv M\ddot{\omega} + D\omega_{xxxx} + N\omega_{xx} + \alpha\dot{\omega}_{xxx} + \beta\dot{\omega} + \gamma\omega = \tilde{P} - P_0 - \rho\varphi_t(x, y_0, t), \quad x \in (a, b). \quad (7)$$

Здесь (1) – уравнение Лапласа для потенциала скорости $\varphi(x, y, t)$ рабочей среды в трубопроводе; (2)-(5) – условия непротекания среды через соответствующие границы; условие (6) задает закон изменения давления на входе в трубопровод; уравнение (7) для прогиба (деформации) $\omega(x, t)$ упругого элемента описывает его динамику; x_0, y_0 – продольный и поперечный размеры трубопровода; $m = \rho_{pl}h_{pl}$ – погонная масса пластины с плотностью ρ_{pl} и толщиной h_{pl} ; $D = \frac{Eh_{pl}^3}{12(1-\nu^2)}$ – изгибная жесткость пластины (E – модуль упругости, ν – коэффициент Пуассона); N – сжимающее (растягивающее) усилие; β, γ – коэффициенты демпфирования и жесткости основания; α – коэффициент внутреннего трения материала пластины; \tilde{P} – давление рабочей среды в трубопроводе в состоянии покоя; $P_*(y, t)$ – закон распределения давления рабочей среды в сечении $x = x_0$ (на входе в трубопровод); P_0 – давление над пластиной.

На основе метода Фурье задача сведена к исследованию уравнения для функции деформации упругого элемента:

$$L(\omega) = -P_0 + \frac{1}{y_0} \int_0^{y_0} P_*(y,t) dy - \frac{2\rho}{x_0} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(\lambda_n x) \frac{\text{cth}(\lambda_n y_0)}{\lambda_n} \int_a^b \ddot{\omega}(x,t) \cos(\lambda_n x) dx +$$

$$+ \frac{2}{y_0} \sum_{n=1}^{\infty} \text{ch}(v_n x) \frac{\cos(v_n y_0)}{\text{ch}(v_n x_0)} \int_0^{y_0} P_*(y,t) \cos(v_n y) dy, \quad v_n = \frac{n\pi}{y_0}, \quad \lambda_n = \frac{(2n-1)\pi}{2x_0}. \quad (8)$$

Это уравнение выражает связь между прогибом $\omega(x,t)$ упругого элемента датчика и законом изменения давления $P_*(y,t)$ рабочей среды на входе в трубопровод ($x = x_0$).

Для построения решения уравнения (8) применим метод Бубнова-Галеркина. Решение $\omega(x,t)$ уравнения (8) ищется в виде $\omega(x,t) = \sum_{k=1}^m \omega_k(t) \psi_k(x)$,

где $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ – полная на $[a,b]$ система базисных функций, которые удовлетворяют граничным условиям в соответствии с условиями закрепления пластины.

Оставляя в уравнении (8) в рядах N_1 членов, проведем процедуру метода Галеркина для m приближений. В результате для $\omega_k(t)$ получим систему из m обыкновенных дифференциальных уравнений. Задача Коши для данной системы решается с помощью системы Mathematica 12.0. Проведено численное моделирование на ЭВМ динамики упругого элемента датчика в зависимости от закона изменения давления в двигателе. Исследовалась деформация элемента как функция времени (в фиксированных точках элемента) и как функция координаты (в фиксированные моменты времени) для различных параметров механической системы.

Пример. Рассмотрим случай жесткого закрепления концов упругого элемента ($\omega = 0, \omega' = 0$, при $x = a, x = b$). В качестве базисных функций $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^m$ выберем собственные функции краевой задачи для уравнения $\psi'''' - \mu^4 \psi = 0$:

$$\psi_k(x) = \text{ch}(\mu_k(x-a)) - \cos(\mu_k(x-a)) - \frac{\text{ch}(\mu_k(b-a)) - \cos(\mu_k(b-a))}{\text{sh}(\mu_k(b-a)) - \sin(\mu_k(b-a))} (\text{sh}(\mu_k(x-a)) - \sin(\mu_k(x-a))), \quad k = 1, \dots, m,$$

где μ_k находятся из уравнения $\text{ch}(\mu_k(b-a)) \cos(\mu_k(b-a)) = 1$ ($k = 1, \dots, m$).

Пусть материал пластины – алюминий ($E = 7 \cdot 10^{10}$, $\nu = 0,34$), рабочая среда – воздух ($\rho = 1$). Для значений параметров (все значения приведены в системе СИ) $x_0 = 3$, $y_0 = 0,03$, $a = 0$, $b = 0,03$, $M = 2,7$, $D = 6,596$, $N = 10^3$, $\alpha = 5 \cdot 10^{-5}$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$, $N1 = 15$, $h_{pl} = 0,001$, $\omega(y,0) = 0$, $\dot{\omega}(y,0) = 0$, $P_0 = 0$, $P(y,t) = 2 \cdot 10^6$ (давление полагаем постоянным) получим график функции $\omega(x,t) = \sum_{k=1}^4 \omega_k(t) \psi_k(x)$ в точке $x_* = 0,012$ на различных временных отрезках (рис. 2).

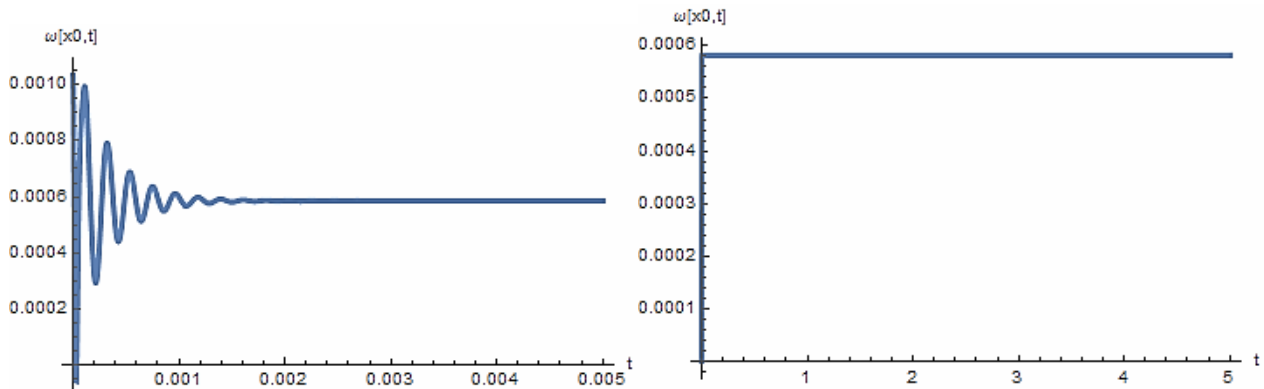


Рис. 2. График функции $\omega(x, t)$ в точке $x_* = 0,012$ ($P_*(y, t) = 2 \cdot 10^6$)

Предположим теперь, что давление на входе в трубопровод изменяется по закону $P_*(y, t) = 10^5 (20 + 3 \cos 30t)$. В результате получим график деформации упругого элемента (рис. 3).

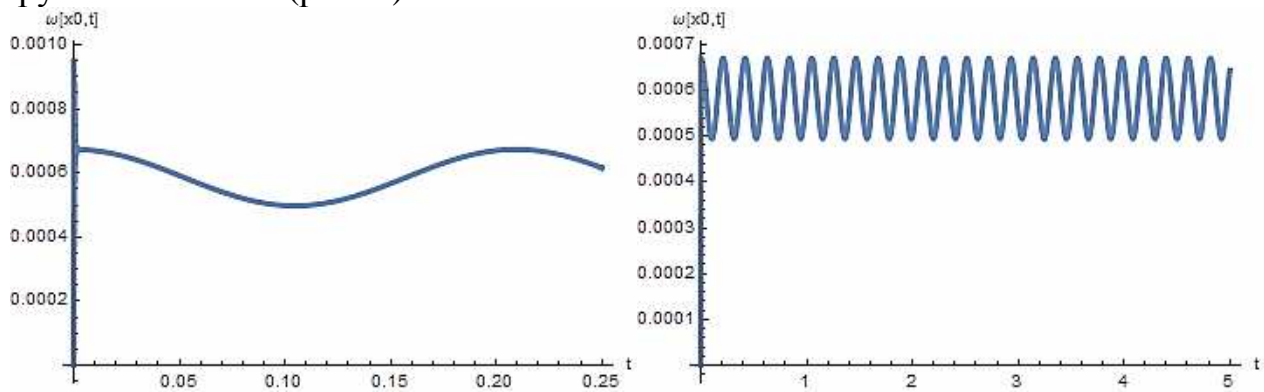


Рис. 3. График функции $\omega(x, t)$ в точке $x_* = 0,012$ ($P_*(y, t) = 10^5 (20 + 3 \cos 30t)$)

Пусть давление на входе в трубопровод изменяется по закону $P_*(y, t) = 10^5 (30 - 29e^{-t})$. График деформации упругого элемента показан на рисунке 4.

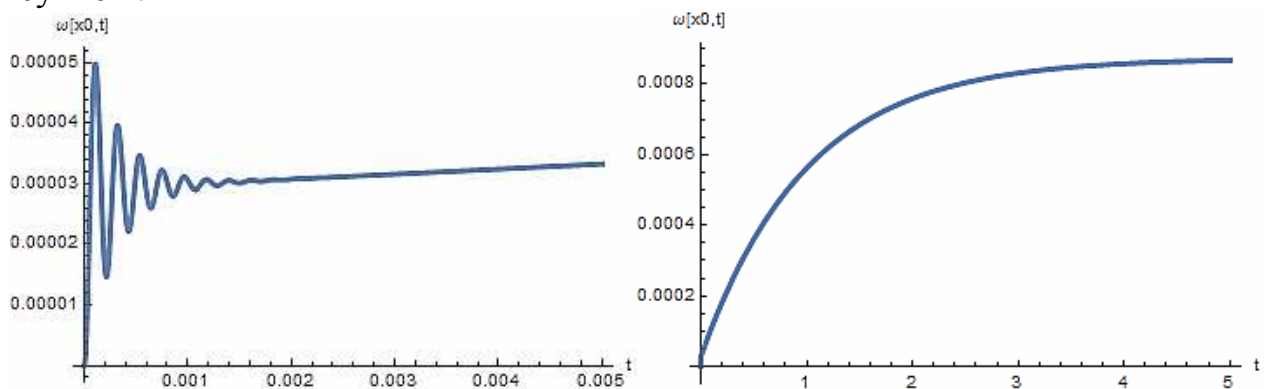


Рис. 4. График функции $\omega(x, t)$ в точке $x_* = 0,012$ ($P_*(y, t) = 10^5 (30 - 29e^{-t})$)

Прогиб упругого элемента ab в различные моменты времени для $P_*(y, t) = 10^5 (30 - 29e^{-t})$ представлен на рисунке 5.

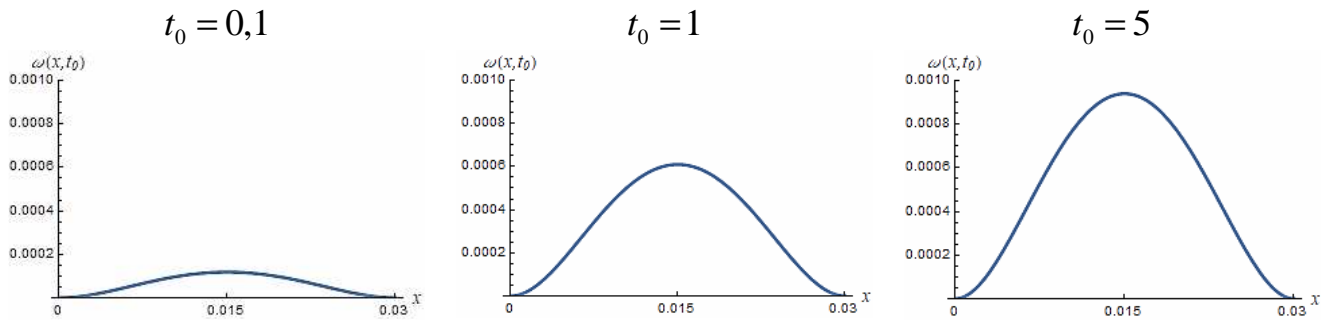


Рис. 5. Прогиб упругого элемента в различные моменты времени $t = t_0$

Предложенная математическая модель позволяет исследовать совместную динамику чувствительного элемента датчика давления и рабочей среды в трубопроводе и устанавливать соответствие между величиной деформации элемента и значением давления в двигателе. Исследование динамики упругого элемента основано на применении метода Бубнова-Галеркина и проведении численного эксперимента в системе Mathematica 12.0.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда №23-21-00517.

Список литературы

1. Эткин Л.Г. Виброчастотные датчики. Теория и практика. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 408 с.
2. Velmisov P.A., Pokladova Yu.V. Mathematical modelling of the “pipeline – pressure sensor” system // Journal of Physics: Conf. Ser. 2019, vol. 1353, p. 012085.
3. Velmisov P.A., Tamarova Yu.A., Pokladova Yu.V. Mathematical modeling of pressure monitoring systems in fluid and gaseous media // AIP Conference Proceedings. 2021, vol. 2333, p. 120004.
4. Вельмисов П.А., Тамарова Ю.А. Исследование математической модели системы контроля за изменением давления в камере сгорания двигателя // Мехатроника, автоматика и робототехника. – 2024. – №13. – С. 93-100.

Сведения об авторах:

Вельмисов Петр Александрович – д.ф.-м.н., профессор, профессор кафедры «Высшая математика»;

Покладова Юлия Валерьевна – к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры «Высшая математика».