УДК 534.16 https://doi.org/10.26160/2307-342X-2024-17-62-64

ДИНАМИКА ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ И ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРИ НЕЛИНЕЙНОМ ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

Алифов А.А.
Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва

Ключевые слова: смешанные колебания, параметрические колебания, вынужденные колебания, нелинейность, метод прямой линеаризации.

Аннотация. Рассмотрены смешанные параметрические и вынужденные колебания при нелинейном параметрическом возбуждении и нелинейной силы упругости. Решение нелинейного дифференциального уравнения построено методом прямой линеаризации. Получены уравнения нестационарных и стационарных режимов колебаний и условия устойчивости стационарных колебаний. Проведены расчеты для получения информации о влиянии нелинейного параметрического возбуждения на динамику колебаний.

DYNAMICS OF PARAMETRIC AND FORCED OSCILLATIONS UNDER NONLINEAR PARAMETRIC INFLUENCE

Alifov A.A.
Mechanical Engineering Research Institute of the RAS, Moscow

Keywords: mixed oscillations, parametric oscillations, forced oscillations, nonlinearity, method direct linearization.

Abstract. Mixed parametric and forced oscillations under nonlinear parametric excitation and nonlinear elastic force are considered. The solution to the nonlinear differential equation is constructed using the direct linearization method. Equations of non-stationary and stationary modes of oscillations and conditions for the stability of stationary oscillations are obtained. Calculations were carried out to obtain information about the influence of nonlinear parametric excitation on the dynamics of oscillations.

Возникновение колебаний может быть обусловлено различными причинами [1]. Описание и изучение различных колебательных процессов имеется в большом числе работ, в том числе [2, 3], и [3] посвящена широкому исследованию параметрических колебаний. Параметрические колебания возникают во многих системах (зубчатая передача, пластины, оболочки и др.).

Целью работы является анализ взаимодействия параметрических и вынужденных колебаний при нелинейном параметрическом возбуждении и нелинейной силе упругости. Для решения нелинейного дифференциального уравнения этих колебаний использован метод прямой линеаризации [4]. Он отличается от других методов нелинейной механики [5-7 и др.] возможностью получения конечных расчетных соотношений независимо от конкретного вида и степени нелинейности, достаточно малыми затратами труда и времени.

Рассмотрим следующее дифференциальное уравнение, описывающее смешанные параметрические и вынужденные колебания при вынуждающей силе $\lambda \sin \nu_1 t$ и нелинейном параметрическом возбуждении $x^3 \cos \nu t$:

$$m\ddot{x} + k_0 \dot{x} + c_0 x = \lambda \sin \nu_1 t - b x^3 \cos \nu t - \gamma x^3 , \tag{1}$$

где $\ddot{x}$, $\dot{x}$, x, $m = const$, $k_0 = const$, $c_0 = const$, $\gamma = const$, $\lambda = const$, $b = const$ – соответственно ускорение, скорость, перемещение, масса тела, коэффициенты демпфирования, жесткости, нелинейной части силы упругости, вынуждающей силы и параметрического возбуждения, $\nu_1 = const$, $\nu = const$ – частоты.

Нелинейную часть силы упругости методом прямой линеаризации [4] заменим линейной $c_f x$. *Коэффициент линеаризации* c_f определяется выражением $c_f = \bar{N}_3 \gamma a^2$, $\bar{N}_3 = (2r+3)/(2r+5)$, $a = \max|x|$, где r представляет *параметр точности линеаризации*. Интервал его выбора не ограничен, но может быть в пределах (0÷2).

Уравнение (1) принимает теперь вид

$$m\ddot{x} + k_0\dot{x} + cx = -\lambda \sin\nu_1 t - bx^3 \cos\nu t, \qquad (2)$$

где $c = c_0 + c_f$.

Для решения (2) используем *метод замены переменных с усреднением* [4]. В соответствии с ним имеем $x = a\cos\psi$, $\dot{x} = -ap\sin\psi$, $\psi = pt + \xi$, $p = \nu/2$ и нестационарные значения амплитуды и фазы определяются уравнениями

$$\dot{a} = -(4k_0 pa + 4\lambda\cos\xi - ba^3 \sin 2\xi)/8pm, \qquad (3)$$

$$\dot{\xi} = \left[2am(\omega_0^2 - p^2) + 2ac_f + 2\lambda\sin\xi + ba^3\cos 2\xi\right]/4pma.$$

Условия $\dot{a} = 0$, $\dot{\xi} = 0$ в (3) дают для стационарных значений амплитуды и фазы соотношения

$$(B - 2\lambda)^2(B^2 - b^2a^6) + 4k_0^2 b^2 p^2 a^8 = 0, \; tg\xi = B(B - 2\lambda)/2k_0 bpa^4,$$

где $B = \lambda \pm \sqrt{\lambda^2 + ba^4(ba^2 + 2m(\omega_0^2 - p^2) + 2c_f)}$, $\omega_0^2 = c_0/m$.

Составив уравнения в вариациях для (3) имеем на основе критериев Рауса-Гурвица следующие условия устойчивости стационарных колебаний:

$$D_1 > 0, \; D_2 > 0,$$

где $D_1 = -(b_{11} + b_{22})$, $D_2 = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}$,

$$b_{11} = -\frac{1}{8pm}\left[4pk_0 - 3ba^2\sin 2\xi\right], \; b_{12} = \frac{1}{4pm}\left[2\lambda\sin\xi + ba^3\cos 2\xi\right],$$

$$b_{21} = \frac{1}{2pma^2}\left[2\bar{N}_3\gamma a^3 - \lambda\sin\xi + ba^3\cos 2\xi\right],$$

$$b_{22} = \frac{1}{2pma}\left[\lambda\cos\xi - ba^3\sin 2\xi\right].$$

Проводились расчеты с использованием следующих параметров: $m = 1\,\text{кгс}\cdot\text{с}^2\cdot\text{см}^{-1}$, $k_0 = 0.02\,\text{кгс}\cdot\text{с}\cdot\text{см}^{-1}$, $c_0 = 1\,\text{кгс}\cdot\text{см}^{-1}$, $\gamma = \pm 0.2\,\text{кгс}\cdot\text{см}^{-3}$, $\lambda = 0.02\,\text{кгс}$, $b = 0.07\,\text{кгс}\cdot\text{см}^{-1}$, $\bar{N}_3 = 3/4$ (параметр точности линеаризации r = 1,5). Заметим, что число 3/4 получается также при методе усреднения [5], т.е. результаты по методам прямой линеаризации и усреднения одинаковы.

На рисунке 1 показаны некоторые результаты расчетов амплитудно-частотных кривых при «мягкой» ($\gamma<0$) характеристике нелинейной силы упругости, а при «жесткой» ($\gamma>0$) кривые наклоняются в целом вправо [7].

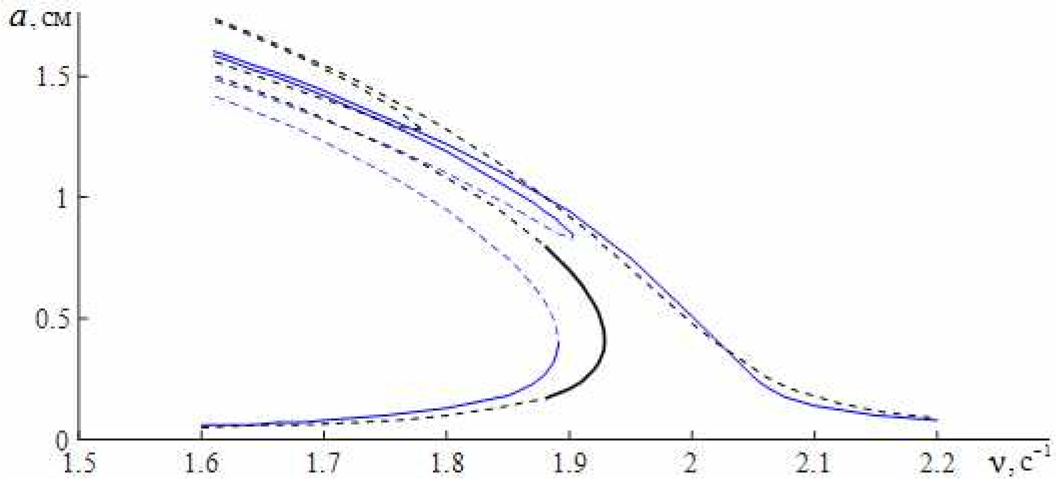

Рис. 1. Амплитудно-частотные кривые

Сплошные линии соответствуют устойчивым колебаниям, штриховые – неустойчивым. Кривые синего цвета представляют случай *линейного* параметрического возбуждения $x\cos\nu t$. Они приведены для сравнения и наглядно показывают различия при *линейном* и *нелинейном* (кубическом) параметрическом возбуждении.

Список литературы

1. Алифов А.А. Фундаментальный принцип, управляющий Вселенной. – М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2012. – 408 с.
2. Alifov A.A., Frolov K.V. Interaction of Nonlinear Oscillatory Systems with Energy Sources. – New York: Hemisphere Pub. Corp. Taylor & Francis Group, 1990.
3. Шмидт Г. Параметрические колебания. – М.: Мир, 1978. – 336 с.
4. Алифов А.А. Методы прямой линеаризации для расчета нелинейных систем. – М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2015. – 74 с.
5. Боголюбов Н.Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 504 с.
6. Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Введение в теорию нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1976. – 256 с.
7. Алифов А.А. Смешанные вынужденные и параметрические колебания при нелинейном параметрическом возбуждении // Международная конференция «Машины, технологии и материалы для современного машиностроения», посвященная 85-летию Института машиноведения им. А.А. Благонравова РАН. Сборник тезисов. – М.: ИМАШ РАН, 2023. – С. 20.

Сведения об авторе:
Алифов Алишир Али оглы – д.т.н., главный научный сотрудник.