

ОЦЕНКА ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ ТВЕРДЫХ ТЕЛ В КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ НА ОСНОВЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ИНВАРИАНТОВ С УЧЕТОМ ОСОБЕННОСТЕЙ ПРИЛОЖЕНИЯ ВНЕШНЕГО ВИБРАЦИОННОГО ВОЗМУЩЕНИЯ

Елисеев А.В.¹, Николаев А.В.²

^{1,2}*Иркутский государственный университет путей сообщения, Иркутск;*

¹*Иркутский национальный исследовательский технический университет, Иркутск*

Ключевые слова: структурное математическое моделирование, динамика вибрационных взаимодействий, динамическое состояние, действие вибрационного возмущения, формы взаимодействий элементов системы, динамические инварианты.

Аннотация. Развивается концепция динамических инвариантов для оценки динамических состояний и форм динамических взаимодействий элементов механических колебательных систем, используемых в качестве расчетных схем технических объектов транспортного и технологического назначения. Рассматривается механическая колебательная система, образованная твердым телом, расположенном на упругих опорах и находящемся под воздействием вибрационных нагрузений силовой природы. Ставится задача оценки разнообразия динамических состояний объекта в двух вариантах: в виде одиночного возмущения и в виде двух связанных силовых возмущений. Показано, что совокупности динамических инвариантов, отображающие разнообразие динамических состояние объекта, обладают рядом особенностей в зависимости от вариантов приложения внешнего возмущения.

EVALUATION OF INTERACTIONS OF SOLIDS IN VIBRATIONAL SYSTEMS BASED ON DYNAMIC INVARIANTS TAKING INTO ACCOUNT THE ACTION OF AN EXTERNAL VIBRATION DISTURBANCE

Eliseev A.V.¹, Nikolaev A.V.²

^{1,2}*Irkutsk State Transport University, Irkutsk;*

¹*Irkutsk National Research Technical University, Irkutsk*

Keywords: structural mathematical modeling, dynamics of vibration interactions, dynamic state, action of vibration disturbance, forms of interactions of system elements, dynamic invariants.

Abstract. The concept of dynamic invariants is being developed to evaluate dynamic states and forms of dynamic interactions of elements of mechanical oscillatory systems used as design schemes of technical objects of transport and technological purpose. A mechanical oscillatory system formed by a solid body located on elastic supports and under the influence of vibrational loads of a forceful nature is considered. The task of estimating the diversity of dynamic states of an object is set in two variants: in the form of a single disturbance and in the form of two connected force disturbances. It is shown that the sets of dynamic invariants, reflecting the variety of dynamic states of the object, have a number of features depending on the application options of the external disturbance.

Введение. Необходимость решения задачи динамики технических объектов, находящихся в условиях вибрационных нагрузений, обращает внимание на развитие научно-методологического базиса, позволяющего вести поисковые разработки в направлении создания математических моделей технических объектов на всех этапах жизненного цикла технических систем [1,

2]. Существенное значение приобретают методы структурного математического моделирования, в рамках которых механическим колебательным системам, отражающим существенные свойства технических объектов в условиях вибрационных нагрузений, сопоставляются схемы эквивалентных в динамическом отношении систем автоматического управления [3, 4]. В ряду направлений развития методов структурного математического моделирования может быть отмечена концепция динамических инвариантов, в рамках которой разнообразие динамических состояний механической колебательной системы может быть с обобщенной точки зрения отображено конечным набором критических состояний в виде режимов обнуления колебаний координат объекта, режимов резонанса, а также форм динамических взаимодействий элементов механической колебательной системы в малых установившихся колебаниях.

Вместе с тем, ряд вопросов, связанных с приложением концепции динамических инвариантов к проблемам оценки, контроля и формирования динамических состояний технических объектов, находящихся в условиях различных вариантов силовых нагрузений, ещё не получил должного развития.

Предлагаемая статья посвящена вопросам учета особенностей внешних воздействий с помощью динамических инвариантов в задачах оценки динамических состояний и форм динамических взаимодействий твердого тела в колебательных системах.

I. Основные положения. Постановка задачи. Рассматривается два варианта приложения силового возмущения к механической колебательной системе, образованной твердым телом с массой M и моментом инерции J , установленном на упругие элементы k_1, k_2 (рис. 1). В первом варианте силовые возмущения представляют собой связанные гармонические синфазные возмущения $Q_1, Q_2 = \gamma Q_1$, приложенные к т.А и т.В, где γ – коэффициент связности (рис. 1а). Во втором варианте внешнее возмущение представляет собой одиночное силовое гармоническое возмущение Q_0 , приложенное к т.С₀ на расстоянии l_0 от центра тяжести, находящегося в т. О отрезка АВ на расстоянии l_1 и l_2 от тт. А и В (рис. 1б).

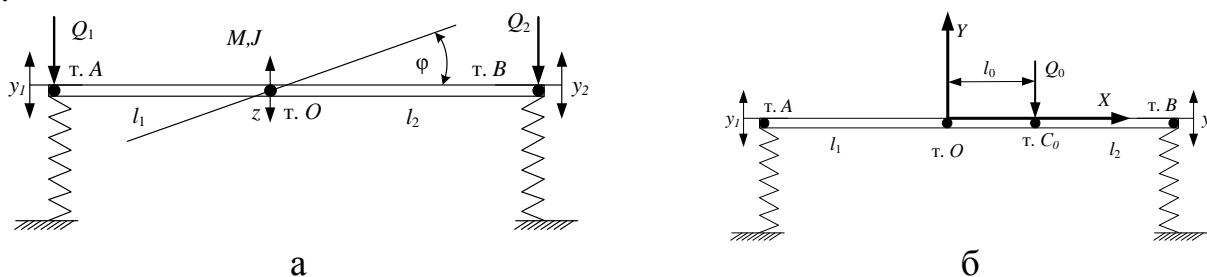


Рис. 1. Варианты приложения внешнего силового возмущения: а) связанные возмущения Q_1, Q_2 ; б) одиночное возмущения Q_0

Предполагается, что для произвольной частоты внешнего возмущения система совершает малые вынужденные установившиеся колебания, динамические особенности которых в общем случае проявляются в возможности реализации критических режимов колебаний и знакопоопределенных форм динамических взаимодействий элементов системы. Общая совокупность состояний и форм взаимодействий, определяемая частотой внешнего возмущения

ω , коэффициентом связности γ , точкой приложения l_0 одиночного возмущения и параметрами системы, может быть охарактеризована с обобщенной точки зрения конечным набором так называемых динамических инвариантов [5, 6].

Вместе с тем, представления о динамических инвариантах с учетом особенностей приложения внешних силовых возмущений требуют детализированного рассмотрения.

Задача заключается в сравнении совокупности динамических инвариантов, соответствующих вариантам приложения внешних силовых возмущений в виде связных силовых возмущений и одиночных воздействий.

II. Математическая модель. Система дифференциальных уравнений движения твердого тела может быть построена в рамках формализма уравнений Лагранжа 2-ого рода. В качестве обобщенных координат y_1, y_2 рассматриваются смещения тт. A и B относительно положения статического равновесия (рис. 1). Наравне с системой координат y_1, y_2 рассматривается система обобщенных координат φ, z , где φ – угол поворота твердого тела относительно центра тяжести, а z – величина вертикального смещения центра тяжести относительно положения статического равновесия. Потенциальная и кинетическая энергии колебательной системы могут быть выражены в координатах y_1, y_2, φ, z :

$$\Pi = \frac{1}{2}k_1y_1^2 + \frac{1}{2}k_2y_2^2, \tag{1}$$

$$T = \frac{1}{2}Mz^2 + \frac{1}{2}J\varphi^2. \tag{2}$$

Используемые системы координат $\{y_1, y_2\}$ и $\{\varphi, z\}$ связаны соотношениями

$$\begin{cases} y = ay_1 + by_2 \\ \varphi = c(y_2 - y_1) \end{cases} \text{ и } \begin{cases} y_1 = y - l_1\varphi \\ y_2 = y + l_2\varphi \end{cases} \tag{3}$$

где $a = \frac{l_2}{l_1 + l_2}$; $b = \frac{l_1}{l_1 + l_2}$; $c = \frac{1}{l_1 + l_2}$.

Приведенная к координатам $\{y_1, y_2\}$ на основе известных методов [3, 4] механическая колебательная система (рис. 1) может быть представлена в виде структурной схемы (рис. 2).

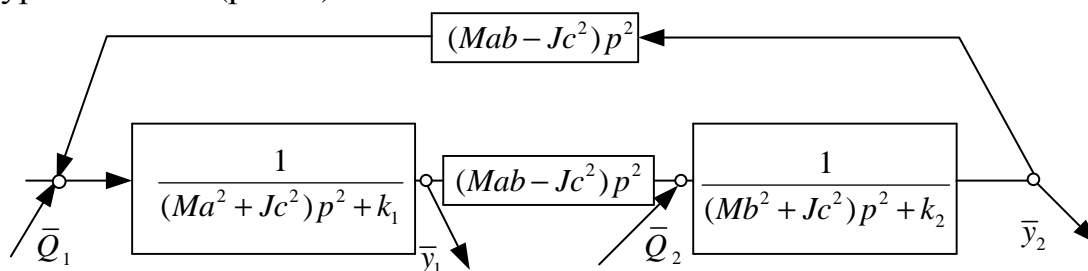


Рис. 2. Структурная схема механической колебательной системы (рис.1), $p=j\omega$ – комплексная переменная, $j=\sqrt{-1}$, ω – частота внешнего возмущения, символ «-» над переменной обозначает изображение Лапласа [7]

Динамические особенности движения твердого тела под действием внешних возмущений могут быть выражены с помощью передаточных отношений системы и межпарциальных связей [3, 4].

III. Совокупность динамических инвариантов в зависимости от связанных силовых возмущений. Для оценки динамического состояния в т.В (рис. 1а) на основе структурной схемы (рис. 2) с учетом коэффициента связности γ может быть построена передаточная функция системы:

$$W_{21}(p) = \frac{\bar{y}_2}{\bar{Q}_1} \Big|_{\bar{Q}_1 \neq 0} = \frac{((Ma^2 + Jc^2)p^2 + k_1)\gamma - (Mab - Jc^2)p^2}{A(p)}, \quad (4)$$

где $A(p) = ((Ma^2 + Jc^2)p^2 + k_1)((Mb^2 + Jc^2)p^2 + k_2) - (Mab - Jc^2)p^2$ представляет собой характеристический многочлен системы. Особенности динамических взаимодействий элементов системы, представляемые в виде семейства амплитудно-частотных характеристик передаточной функции (4), зависящего от коэффициента связности γ , могут быть представлены с помощью динамических инвариантов, обладающими характеристиками $S_1^k F_n^m$, где k – количество резонансов, l – количество режимов обнуления амплитуды колебания координаты объекта, динамическое состояние которого оценивается, m – количество положительных форм взаимодействий, n – количество отрицательных форм динамических взаимодействий, $J_{k+l+m+n}$ – интегральная характеристика (табл. 1).

Табл. 1. Динамические инварианты в зависимости от коэффициента связности γ

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
I	$\gamma < \gamma_1$	$\gamma = \gamma_1$	$\gamma_1 < \gamma < \gamma_0$	$\gamma = \gamma_0$	$\gamma_0 < \gamma < \gamma_{kp}$	$\gamma = \gamma_{kp}$	$\gamma_{kp} < \gamma < \gamma_2$	$\gamma = \gamma_2$	$\gamma_2 < \gamma$
II	$S_1^2 F_2^2$	$S_0^1 F_1^1$	$S_1^2 F_2^2$	$S_1^2 F_1^2$	$S_0^2 F_1^2$	$S_0^2 F_1^2$	$S_1^2 F_2^2$	$S_0^1 F_1^1$	$S_1^2 F_2^2$
III	J_7	J_3	J_7	J_6	J_5	J_5	J_7	J_3	J_7

Интегральная характеристика $J_{k+l+m+n}$ (табл. 1, строка III) может быть проиллюстрирована кусочно-постоянным графиком, имеющем разрывы в граничных точках $\gamma_1, \gamma_0, \gamma_{kp}, \gamma_2$ (рис. 3).

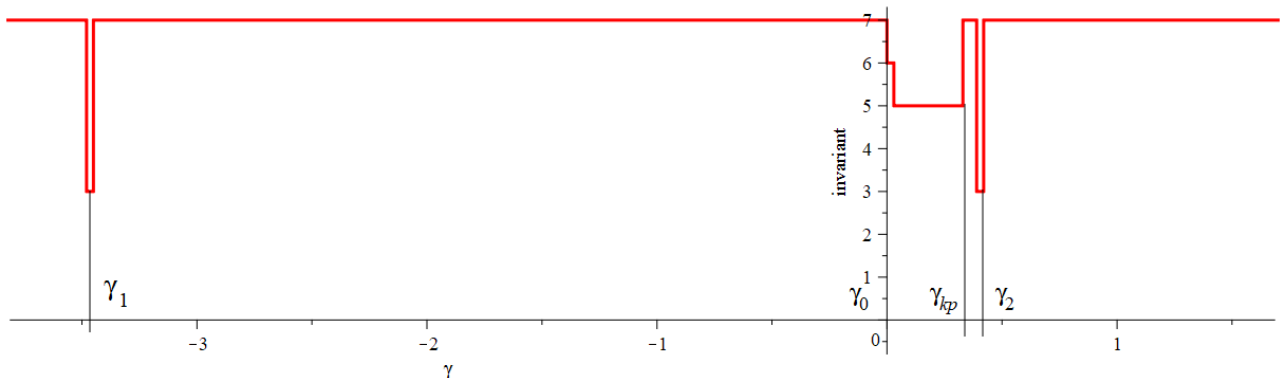


Рис. 3. Интегральная характеристика $J_{k+l+m+n}$ в зависимости от коэффициента связности γ

Каждый динамический инвариант отображает частотный характер взаимодействий элементов механической колебательной системы, реализующийся в выбранной точке твердого тела в зависимости от коэффициента связности внешних возмущений.

IV. Совокупность динамических инвариантов в зависимости от приложения одиночного силового возмущения. Для варианта приложения

единичного силового возмущения в т.С₀ с целью оценки динамического состояния в т.В (рис. 1б) может быть построена передаточная функция системы, имеющая в качестве параметра l_0 . На основе амплитудно-частотной характеристики и функции обнуления может быть построена совокупность динамических инвариантов в зависимости от координаты приложения одиночного силового возмущения [5, 6]. Для одиночного силового возмущения динамические инварианты «распределены» по «поверхности» твердого тела с учетом особенных точек $l_{01}, l_{00}, l_{0kp}, l_{02}$, значения которых определяется в процессе построения совокупности динамических инвариантов (табл. 2).

Табл. 2. Динамические инварианты в зависимости от координаты l_0

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
I	$l_0 < -l_1$	$l_0 = -l_1$	$-l_1 < l_0 < l_{0kp}$	$l_0 = l_{0kp}$	$l_{0kp} < l_0 < l_{02}$	$l_0 = l_{02}$	$l_{02} < l_0 < l_2$	$l_2 < l_0 < l_{01}$	$l_0 = l_{01}$	$l_{01} < l_0$
II	$S_1^2 F_2^2$	$S_1^2 F_1^2$	$S_0^2 F_1^2$	$S_0^2 F_1^2$	$S_1^2 F_2^2$	$S_0^1 F_1^1$	$S_1^2 F_2^2$	$S_1^2 F_2^2$	$S_0^1 F_1^1$	$S_1^2 F_2^2$
III	J_7	J_6	J_5	J_5	J_7	J_3	J_7	J_7	J_3	J_7

Непрерывное изменение координаты l_0 приложения возмущающего воздействия Q_0 , включая внутренние и внешние точки отрезка AB, может быть представлено кусочно-постоянно функцией независимой переменной l_0 (рис. 4).

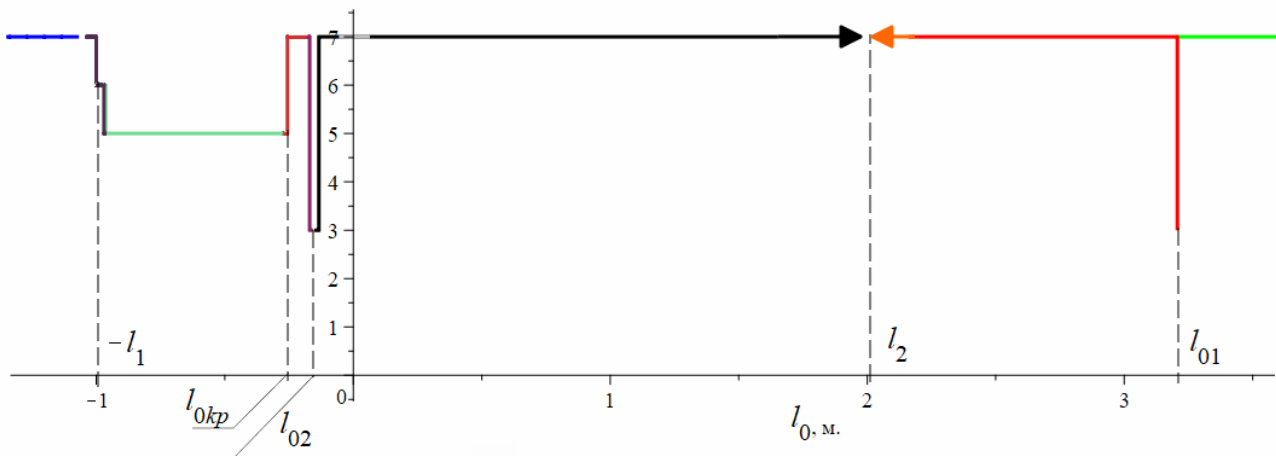


Рис. 4. Интегральная характеристика в зависимости от координаты l_0 приложения приведенной силы Q_0

Таким образом, многообразие динамических состояний точки твердого тела, проявляющееся в результате приложения возмущающего воздействия, определяется набором интервалов и граничных значений координаты приложения силового возмущения.

V. Особенности взаимосвязи динамических инвариантов с учетом приложения силовых возмущений. Особенности распределения динамических инвариантов по значениям коэффициента связности и координатам приложения одиночного возмущения определяются возможностью приведения связных силовых возмущений $\{Q_1, Q_2\}$ к одиночному $\{Q_0\}$. Условия эквивалентности систем силовых возмущений $\{Q_1, Q_2\}$ и $\{Q_0\}$ представляют собой равенства главных векторов и главных моментов относительно центра т.О:

$$\begin{cases} Q_0 = Q_2 + Q_1, \\ -l_0 Q_0 = -l_2 Q_2 + l_1 Q_1, \end{cases} \quad (5)$$

где $Q_2 = \gamma Q_1$ – связанные силовые возмущения.

Связь систем сил (5) позволяет выразить зависимость между коэффициентом связности γ и координатой l_0 :

$$l_0 = \frac{l_2 \gamma - l_1}{1 + \gamma}, \quad (6) \quad \gamma = \frac{l_1 + l_0}{l_2 - l_0}. \quad (7)$$

Зависимости между параметрами γ и l_0 могут рассматриваться как функции, графики которых терпят разрывы второго рода в критических значениях (рис. 5, 6).

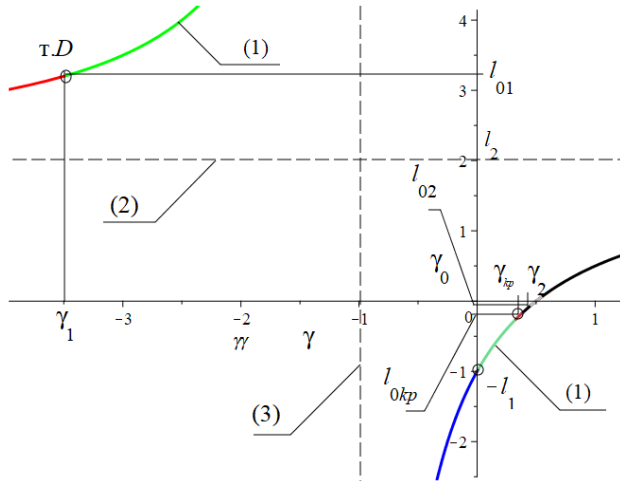


Рис. 5. Координата l_0 приложения приведенной силы Q_0 в зависимости от коэффициента связности γ внешних возмущений Q_1, Q_2

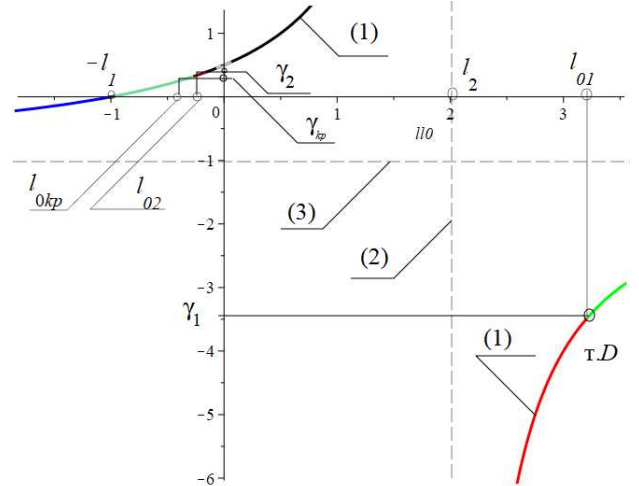


Рис. 6. Коэффициент связности γ силовых возмущений Q_1, Q_2 в зависимости от координаты l_0 приложения приведенной силы Q_0

Таким образом, распределение совокупности динамических инвариантов по значениям параметров γ и l_0 определяется граничными точками $\gamma_1, \gamma_0, \gamma_{kp}, \gamma_2$ для варианта приложения связанных возмущений, граничными точками $l_{01} = l_0(\gamma_1), l_{00} = l_0(\gamma_0), l_{0kp} = l_0(\gamma_{kp}), l_{02} = l_0(\gamma_2)$ для варианта приложения одиночного силового возмущения и характерами функциональных зависимостей $\gamma(l_0), l_0(\gamma)$.

Заключение. В рамках методологии структурного математического моделирования рассмотрена задача оценки динамических состояний точки твердого тела в зависимости от особенностей приложения внешнего вибрационного воздействия. Показано, что вариант приложения силового воздействия может изменять распределение динамических инвариантов по значениям вариационного параметра, представляющего собой, либо коэффициент связности внешних силовых возмущений, либо координату приложения одиночного силового возмущения.

Предложенный подход учета особенностей приложения внешних силовых возмущений показывает возможность определения совокупности динамических состояний для различных точек твердого тела с помощью определения зависимости граничных значений параметров от координаты точки, динамическое состояние которой оценивается с помощью динамических инвариантов.

Можно полагать, что разработанная методика обладает потенциалом создания на её основе технологии управления вибрационным полем рабочего

органа вибрационной технологической машины путем изменения распределения областей, обладающих различными динамическими инвариантами.

Список литературы

1. Harris C.M., Crede C.E. Shock and Vibration Handbook. – New York: McGraw – Hill Book Co, 2002. – 1457 p.
2. Пановко Г.Я. Динамика вибрационных технологических процессов. – М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных технологий, 2006. – 176 с.
3. Елисеев С.В. Прикладной системный анализ и структурное математическое моделирование (динамика транспортных и технологических машин: связность движений, вибрационные взаимодействия, рычажные связи): монография. – Иркутск: ИрГУПС, 2018. – 692 с.
4. Eliseev S.V., Eliseev A.V. Theory of Oscillations. Structural Mathematical Modeling In Problems Of Dynamics Of Technical Objects. – Cham, 2019. – 521 p.
5. Елисеев С.В. Методология системного анализа в задачах оценки, формирования и управления динамическим состоянием технологических и транспортных машин / С.В. Елисеев, А.В. Елисеев, Р.С. Большаков, А.П. Хоменко. – Новосибирск: Наука, 2021. – 679 с.
6. Елисеев А.В., Ситов И.С., Кузнецов Н.К. Системный подход к оценке динамических состояний технических объектов транспортного и технологического назначения: структурные схемы, передаточные функции, динамические инварианты // Системы. Методы. Технологии. – 2022. – №2(54). – С. 7-19.
7. Елисеев А.В., Кузнецов Н.К., Николаев А.В. Концепция динамических инвариантов в оценке структурных особенностей механических колебательных систем // Транспортное, горное и строительное машиностроение: наука и производство. – 2022. – №15. – С. 18-30.
8. Лурье А.И. Операционное исчисление и применение в технических приложениях. – М.: Наука. 1959. – 368 с.

Сведения об авторах:

Елисеев Андрей Владимирович – к.т.н., доцент;

Николаев Андрей Владимирович – соискатель.